Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Гусев, Эйлерова характеристика многообразия бифуркаций для многочлена степени 2, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 2, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9070>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:03:06

Эйлерова характеристика многообразия бифуркаций для многочлена степени 2

Г. Г. Гусев

Пусть коэффициенты многочлена $P_{\mathbf{x}}(t) = P_0(\mathbf{x})t^k + P_1(\mathbf{x})t^{k-1} + \dots + P_k(\mathbf{x})$ суть многочлены Лорана от комплексных переменных $(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}$. Пространство параметров $\mathbb{C}^{*n}$ ($\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$) разбивается на страты, соответствующие различным комбинациям совпадения корней многочлена $P_{\mathbf{x}}$. Для многочленов $P_0, P_1, \dots, P_k$ общего положения с фиксированными многогранниками Ньютона $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_k$ эйлеровы характеристики этих стратов также фиксированы. В работе получены формулы, выражающие их в терминах многогранников Δ_i для случая $k = 2$.

При $k = 2$ множество $\mathbb{C}^{*n}$ параметров разбивается на 5 стратов: 1) K : $\deg(P_{\mathbf{x}}) = 2$, корни $P_{\mathbf{x}}$ различны; 2) L : $\deg(P_{\mathbf{x}}) = 2$, корни совпадают; 3) M : $\deg(P_{\mathbf{x}}) = 1$; 4) N : $\deg(P_{\mathbf{x}}) = 0$; 5) O : $P_{\mathbf{x}} \equiv 0$.

Пусть $S_1, \dots, S_n$ – выпуклые подмножества в $\mathbb{R}^n$. Смешанный объем набора $S_1, \dots, S_n$ (см. [1]) обозначим $S_1 \cdots S_n$. В частности, S_1^n означает n -мерный объем множества S_1 . Для однородного многочлена $T(x_1, \dots, x_k) = \sum \alpha_{i_1 \dots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$ степени n выражение $T(S_1, \dots, S_k)$ будем использовать для $\sum \alpha_{i_1 \dots i_n} S_{i_1} \cdots S_{i_n}$.

ТЕОРЕМА 1. Для общих многочленов Лорана P_i с данными многогранниками Ньютона Δ_i , $i = 0, 1, 2$, имеем:

$$\chi(L) = (-1)^{n-1} n! [2\Delta_*^n + Q_n(\Delta_0, \Delta_*) + Q_n(\Delta_*, \Delta_2) + Q_n(\Delta_0, \Delta_1) + R_n(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)],$$

$$\chi(M) = (-1)^{n-1} n! [\Delta_0^n + Q_n(\Delta_0, \Delta_1)],$$

$$\chi(N) = (-1)^{n-2} n! [Q_n(\Delta_0, \Delta_1) + R_n(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)],$$

$$\chi(O) = (-1)^{n-1} n! R_n(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2),$$

где $\Delta_* = \langle \Delta_1 \cup (\Delta_0 + \Delta_2)/2 \rangle$, $\langle \cdot \rangle$ обозначает выпуклую оболочку, $+$ – сумма Минковского, $Q_n(x, y) := \sum_{i=1}^{n-1} x^i y^{n-i}$, $R_n(x, y, z) := \sum_{i,j,k \geq 1, i+j+k=n} x^i y^j z^k$.

Пусть система многочленов Лорана от n переменных $f_1, \dots, f_p$ невырождена относительно своих многогранников Ньютона $\Delta_1, \dots, \Delta_p$; $W \subset \mathbb{C}^{*n}$ – множество нулей системы $\{f_i\}$. В [2] доказано, что $\chi(W) = n! [\prod_{i=1}^p \Delta_i / (1 + \Delta_i)]_n$, где $[\cdot]_n$ – однородная часть степени n рассматриваемого ряда. В частности, при $p = 1, 2, 3$ получаем соответственно:

$$\begin{aligned} \chi(W) &= (-1)^{n-1} n! \Delta_1^n, \\ \chi(W) &= (-1)^{n-2} n! Q_n(\Delta_1, \Delta_2), \quad \chi(W) = (-1)^{n-3} n! R_n(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3). \end{aligned} \tag{1}$$

Множества O , $N \sqcup O$, $M \sqcup N \sqcup O$ задаются соответственно системами $\{P_0 = P_1 = P_2 = 0\}$, $\{P_0 = P_1 = 0\}$, $\{P_0 = 0\}$ (невырожденными для общих P_i). Применяя к ним формулы (1) и используя аддитивность эйлеровой характеристики, находим $\chi(M)$, $\chi(N)$, $\chi(O)$. Следующее рассуждение, аналогичное доказательству леммы 2 из [3], позволяет найти $\chi(L)$.

Пусть X – гиперповерхность в $\mathbb{C}^{*n} \times \mathbb{C}$, заданная уравнением $P = 0$, где $P(\mathbf{x}, t) = P_{\mathbf{x}}(t)$; p : $\mathbb{C}^{*n} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{*n}$ – проекция на первый сомножитель, π – ее ограничение на X . Характеристики стратов K , L , M , N , O и многообразия X связаны двумя линейными уравнениями. Первое уравнение $\chi(K) + \chi(L) + \chi(M) + \chi(N) + \chi(O) = 0$ справедливо в силу аддитивности эйлеровой характеристики (левая часть есть эйлерова характеристика комплексного тора $\mathbb{C}^{*n}$). Второе уравнение – результат вычисления

интеграла по эйлеровой характеристике $\chi(X) = \int_{\mathbb{C}^{*n}} \chi(\pi^{-1}(\mathbf{x})) d\chi$. Прообраз точки $\mathbf{x} \in K$ состоит из двух точек, прообраз точки $\mathbf{x} \in L \sqcup M$ — из одной точки, прообраз множества N пуст, и, наконец, для точки $\mathbf{x} \in O$ имеем: $\pi^{-1}(\mathbf{x}) \cong \mathbb{C}$, $\chi(\pi^{-1}(\mathbf{x})) = 1$. Таким образом, $\chi(X) = 2\chi(K) + \chi(L) + \chi(M) + \chi(O)$. Из приведенных линейных уравнений получаем

$$\chi(L) = -\chi(X) - \chi(M) - 2\chi(N) - \chi(O). \quad (2)$$

Найдем $\chi(X)$. Множество X состоит из двух стратов: $X_1 = X \setminus \{(\mathbf{x}, t) \mid t = 0\}$ и $X_2 = X \cap \{(\mathbf{x}, t) \mid t = 0\}$. Имеем: $\chi(X) = \chi(X_1) + \chi(X_2)$. Невырожденное уравнение $P_2(\mathbf{x}) = 0$ задает множество X_2 в $\mathbb{C}^{*n}$, так что по формулам (1) находим: $\chi(X_2) = (-1)^{n-1} n! \Delta_2^n$. Для общих P_i многочлен Лорана P , задающий в торе $\mathbb{C}^{*(n+1)}$ страт X_1 , также является невырожденным, поэтому

$$\chi(X_1) = (-1)^n (n+1)! \Delta^{n+1}, \quad (3)$$

где Δ обозначает многогранник Ньютона многочлена P .

Выразим объем многогранника $\Delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в терминах Δ_i . Координату в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, отвечающую переменной t , обозначим k_t . Вектор в $\mathbb{R}^n$ с единственной ненулевой координатой $k_t = 1$ обозначим v_t . Многогранники Δ_i лежат в гиперплоскости $k_t = 0$, многогранник Δ является выпуклой оболочкой их параллельных сдвигов вдоль оси k_t : $\Delta = \langle (\Delta_0 + 2v_t) \cup (\Delta_1 + v_t) \cup \Delta_2 \rangle$. Нетрудно показать, что гиперплоскость $k_t = 1$ пересекает многогранник Δ по многограннику $\Delta_* + v_t$, где Δ_* — многогранник, определенный в теореме 1. Объемы частей $\langle (\Delta_0 + 2v_t) \cup (\Delta_* + v_t) \rangle$ и $\langle (\Delta_* + v_t) \cup \Delta_2 \rangle$, на которые делится многогранник Δ , можно найти по следующей формуле.

ЛЕММА 1. Пусть многогранники Λ_0, Λ_1 лежат в n -мерных гиперплоскостях, заданных в $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнениями $x_1 = 0$, $x_1 = k$ соответственно. Тогда $(n+1)$ -мерный объем их выпуклой оболочки Λ равен

$$\Lambda^{n+1} = (n+1)^{-1} k (\Lambda_0^n + Q_n(\Lambda_0, \Lambda_1) + \Lambda_1^n). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\alpha \in [0, 1]$ сечение Λ_α многогранника Λ гиперплоскостью $x_1 = k\alpha$ состоит из точек вида $(1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$, где $\mathbf{x} \in \Lambda_0$, $\mathbf{y} \in \Lambda_1$. Таким образом, $\Lambda_\alpha = (1-\alpha)\Lambda_0 + \alpha\Lambda_1$ и, значит, $\Lambda^{n+1} = k \int_{[0,1]} (\Lambda_\alpha)^n d\alpha = k \int_{[0,1]} \left[\sum_{i=0}^n C_n^i \alpha^i (1-\alpha)^{n-i} (\Lambda_1)^i \times (\Lambda_0)^{n-i} d\alpha \right]$. Учитывая, что $\int_{[0,1]} (\alpha^i (1-\alpha)^{n-i}) d\alpha = i! (n-i)! / (n+1)! = 1 / ((n+1) C_n^i)$, получаем формулу (4).

Применяя (4) к частям многогранника Δ и пользуясь инвариантностью смешанных объемов относительно параллельного переноса аргументов, получаем: $\Delta^{n+1} = (n+1)^{-1} (\Delta_0^n + 2\Delta_*^n + \Delta_2^n + Q_n(\Delta_0, \Delta_*) + Q_n(\Delta_*, \Delta_2))$. Теперь формула теоремы 1 для $\chi(L)$ следует из (2), (3).

Автор благодарен С. М. Гусейн-Заде за постановку задачи и содействие в ее решении.

Список литературы

- [1] Г. Буземан, *Выпуклые поверхности*, Наука, М., 1964. [2] А. Г. Хованский, *Функц. анализ и его прил.*, 12:1 (1978), 51–61. [3] А. И. Эстеров, *Матем. сб.*, 197:7 (2006), 137–160.

Г. Г. Гусев (G. G. Gusev)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gusev@mccme.ru

Представлено С. М. Гусейн-Заде
Принято редколлегией
17.12.2007