Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, Теорема типа Харнака для семейства комплексно изоморфных вещественных алгебраических кривых, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm908>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:11:29

ТЕОРЕМА ТИПА ХАРНАКА ДЛЯ СЕМЕЙСТВА КОМПЛЕКСНО ИЗОМОРФНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

С. М. НАТАНЗОН

Пусть X неособая неприводимая вещественная алгебраическая кривая рода g . Она называется ориентируемой (или типа I в терминологии Клейна), если множество ее вещественных точек $\mathbb{R}(X)$ делит множество ее комплексных точек $\mathbb{C}(X)$. Рассмотрим теперь семейство $X_1, \dots, X_n$ попарно неизоморфных ориентируемых вещественных алгебраических кривых рода g , классификации которых $\mathbb{C}(X_i)$ изоморфны как комплексные алгебраические кривые. Все такие семейства легко описать для $g \leq 1$ и далее мы считаем, что $g > 1$. Согласно [1] $(n-4)2^{n-3} \leq g-1$ и эта оценка точна.

Согласно теореме Харнака вещественные точки $\mathbb{R}(X_i)$ распадаются на простые замкнутые контуры, называемые овалами. Их число $|X_i|$ не превосходит $g+1$ и эта оценка точна. Наша цель – оценить число $\sum_{i=1}^n |X_i|$. Очевидная оценка $|X_1| + |X_2| \leq 2g+2$ точна и достигается на вещественных гиперэллиптических кривых. Согласно [2] $\sum_{i=1}^3 |X_i| \leq 2g+4$ и $\sum_{i=1}^4 |X_i| \leq 2g+8$. В этой статье мы дадим набросок доказательства.

ТЕОРЕМА.

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n |X_i| \leq 2g - (n-9)2^{n-3} - 2 \leq 2g + 30,$$

причем первая оценка точна при каждом n для бесконечного числа g .

Доказательство основано на работе [3], согласно которой семейство $X_1, \dots, X_n$ порождает конечную группу Кокстера и классификации [4] конечных групп Кокстера.

Напомним, что вещественная алгебраическая кривая порождает пару $(\mathbb{C}(X), \tau)$, где $\tau: \mathbb{C}(X) \rightarrow \mathbb{C}(X)$ – инволюция комплексного сопряжения, причем множество

$$\mathbb{R}(X) = \{p \in \mathbb{C}(X) \mid \tau p = p\}.$$

Группа Кокстера возникает следующим образом. Рассмотрим комплексную алгебраическую кривую P , которая комплексно изоморфна кривым $\mathbb{C}(X_i)$. Комплексные многообразия P и $\mathbb{C}(X_i)$ являются римановыми поверхностями рода $g = g(P)$. Изоморфизмы между $\mathbb{C}(X_i)$ и P индуцируют биголоморфные отображения $\varphi_i: \mathbb{C}(X_i) \rightarrow P$. Они переводят инволюции комплексного сопряжения $\tilde{\tau}_i: \mathbb{C}(X_i) \rightarrow \mathbb{C}(X_i)$ в антиголоморфные инволюции $\tau_i: P \rightarrow P$. Попарная неизоморфность X_i эквивалентна попарной несопряженности инволюций τ_i в группе $\text{Aut}(P)$ голоморфных и антиголоморфных автоморфизмов P . Множество $P^{\tau_i} = \{p \in P \mid \tau_i p = p\}$ распадается на $|\tau_i| = |X_i|$ простых контуров. Таким образом, неравенство (1) сводится к неравенству

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n |\tau_i| \leq 2g - (n-9)2^{n-3} - 2$$

для произвольного набора попарно несопряженных в $\text{Aut}(P)$ антиголоморфных инволюций $\tau_i: P \rightarrow P$ таких, что P^{τ_i} делит P .

ЛЕММА 1. *Существуют антиголоморфные инволюции $\alpha_i: P \rightarrow P$ ($i = 1, \dots, n$) такие, что P^{α_i} делят P , $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, $\alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i$ и $\sum_{i=1}^n |\tau_i| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$.*

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Согласно [3] инволюции $\tau_1, \dots, \tau_n$ порождают группу Кокстера $\widetilde{W}$, используя этот факт и теорию групп Кокстера [4], можно доказать существование множества инволюций $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, порождающих систему Кокстера (W, B) , и таких, что β_i сопряжены τ_i в $\widetilde{W}$. Положим $\alpha_i = \beta_i$, если β_i принадлежит центру группы W . Элементы $\beta_i \beta_j$ имеют четную степень, поскольку β_i и β_j не сопряжены в W . Из этого факта и классификации систем Кокстера [4] следует, что не принадлежащие центру группы W инволюции β_i разбиваются на пары (β_i, β_j) , где β_j коммутирует с $B \setminus \beta_i$. Пусть $\gamma = (\beta_i \beta_j)^m$, где $2m$ – порядок $(\beta_i \beta_j)$. Для $|\beta_i| \geq |\beta_j|$ положим $\alpha_i = \beta_i$, $\alpha_j = \gamma \beta_i$. Тогда $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \geq \sum_{i=1}^n |\tau_i|$.

Таким образом, нам осталось доказать неравенство

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 2g - (n-9)2^{n-3} - 2$$

для множества $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ коммутирующих антиголоморфных инволюций римановой поверхности P таких, что P^{α_i} делит P .

Это делается индукцией по g с помощью двух лемм.

ЛЕММА 2. Если неравенство доказано для поверхностей рода $< g$ и одна из связанных компонент множества $\bigcup_{\alpha_i \in A} P^{\alpha_i}$ содержится в $P^{\alpha_{n-1}} \cup P^{\alpha_n}$, то неравенство верно для поверхностей рода g .

ЛЕММА 3. Если среди компонент связности множества $\bigcup_{\alpha_i \in A} P^{\alpha_i}$ нет компонент, содержащихся в множествах вида $P^{\alpha_i} \cup P^{\alpha_j}$ ($i, j = 1, \dots, n$), то неравенство (3) выполняется.

Лемма 2 доказывается с помощью “хирургии” поверхностей, то есть разрезами и склейками вдоль P^{α_i} . Дадим набросок доказательства леммы 3. Пусть W – группа, порожденная A . Граница связной компоненты $K \in P \setminus \bigcup_{\alpha_i \in A} P^{\alpha_i}$ распадается на k связных компонент. Каждая из них состоит из отрезков $\ell_{i1}, \dots, \ell_{im_i}$, где $\ell_{ij} \in P^{\sigma(i,j)}$. Пусть t_i число разных элементов группы W среди $\sigma(i, 1), \dots, \sigma(i, m_i)$. По условию $t_i \geq 3$ и $\sum_{i=1}^n t_i \geq n$. Для $n \in \mathbb{Z}$ положим $\sigma(i, j + nt_i) = \sigma(i, j)$. Рассмотрим

$$L_i^1 = \{\ell_{ij} \mid \sigma(i, j-1) = \sigma(i, j+1)\}, \quad L_i^2 = \{\ell_{ij} \mid \sigma(i, j-1) \neq \sigma(i, j+1)\}.$$

Обозначим через s_i число элементов в множестве L_i^2 . Тогда $s_i \geq t_i - 1$.

Рассмотрим естественную проекцию $\varphi: P \rightarrow P/W = \tilde{P}$. Прообраз $\varphi^{-1}(\ell_{ij})$ состоит из овалов инволюции $\sigma(i, j)$, число которых равно 2^{n-2} , если $\ell_{ij} \in L_i^1$ и 2^{n-3} , если $\ell_{ij} \in L_i^2$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = \sum_{i=1}^n s_i \cdot 2^{n-3} + (m_i - s_i)2^{n-2} \leq \sum_{i=1}^k m_i \cdot 2^{n-2} + (k-n) \cdot 2^{n-3}.$$

Кроме того, согласно теореме Римана–Гурвица $4g - 4 = 2^n(2\tilde{g} - 4 + 2k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k m_i)$, где $\tilde{g}$ – род $\tilde{P}$. Сопоставление этих неравенств дает $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| - 2g \leq -(n-9)2^{n-3} - 2$.

Точность неравенства (2) доказывается построением поверхности P с помощью неевклидовых кристаллографических групп. А именно, пусть $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ – верхняя полуплоскость, наделенная стандартной структурой геометрии Лобачевского. Рассмотрим прямоугольник геометрии Лобачевского с несоизмеримыми сторонами $\ell_1, \dots, \ell_{n+2m} \in \Lambda$. Пусть σ_i – отражение в стороне ℓ_i в смысле геометрии Лобачевского. Пусть G – группа, порожденная σ_i . Пусть $\psi: G \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ – эпиморфизм такой, что $\psi(\sigma_1), \dots, \psi(\sigma_{n-1}), \psi(\sigma_{n+1})$ – образующие $(\mathbb{Z}_2)^n$ и $\psi(\sigma_{n+2j}) = \psi(\sigma_2)$, $\psi(\sigma_{n+2j+1}) = \psi(\sigma_{n+1})$ ($j = 0, \dots, m$). Тогда $P = \Lambda/G$ – компактная риманова поверхность рода $g = 2^{n-3}(n+2m-4) + 1$. Инволюции σ_i порождают на P антиголоморфные инволюции τ_i ($i = 1, \dots, n-1, n+1$). Ввиду несоизмеримости ℓ_i инволюции τ_i не сопряжены в группе $\operatorname{Aut}(P)$, и, следовательно, вещественные кривые (P, τ_i) попарно не изоморфны. С другой стороны, можно доказать, что $|\tau_1| + \dots + |\tau_{n-1}| + |\tau_{n+1}| = (n-1)2^{n-1} + (2m+1)2^{n-2}$, откуда $|\tau_1| + \dots + |\tau_{n-1}| + |\tau_{n+1}| = 2g - (n-9)2^{n-3} - 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bujalance E., Gromadzki G., Singerman D. // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120. № 2. P. 507–513. [2] Натанзон С. М. // Труды ММО. 1988. Т. 51. С. 3–53. [3] Натанзон С. М. // УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 215–216. [4] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972.