Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Нгуен Кхак Вьет, О классификации эллиптических расслоений с малым числом особых слоев над базой рода 1, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm909>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 17:16:11

О КЛАССИФИКАЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ РАССЛОЕНИЙ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЫХ СЛОЕВ НАД БАЗОЙ РОДА 1

К. В. НГУЕН

Пусть k – некоторое алгебраически замкнутое поле характеристики $p \neq 2, 3$. Пусть $f: X \rightarrow C$ – нетривиальное относительно минимальное якобиево эллиптическое расслоение над k с базой – неособой проективной кривой C . Пусть s обозначает число особых слоев расслоения f . Хорошо известно, что в общем случае $s \geq 1$, а в случае $C \simeq \mathbb{P}^1$ мы имеем $s \geq 2$; если при этом f неизотривиально, то $s \geq 3$. В [3] мы классифицировали эллиптические расслоения над $\mathbb{P}^1$ с $s \leq 3$. Там же было установлено, что в случае $C \simeq E$ – некоторой эллиптической кривой и $s = 1$ расслоение $f: X \rightarrow E$ имеет единственную конфигурацию (I_6^*) или ее обратный образ при действии абсолютного морфизма Фробениуса. Наша следующая цель – завершить классификацию в этом случае. Результат этой заметки следует рассматривать как алгебраизацию подобной классификации над комплексными числами, полученную в [5].

Всюду мы фиксируем эллиптическое расслоение $f: X \rightarrow E$ над эллиптической базой E , имеющее ровно один особый слой. Типичным примером для этой ситуации служит следующее семейство:

$$(1) \quad y^2 = x^3 - \frac{27v}{4}x - \frac{27u}{4}$$

над базой $E_0: u^2 = v^3 - 1$. Другое семейство получается из (1) “скручиванием” на $\sqrt{v - w}$, где $w^3 = 1$:

$$(2) \quad y^2 = x^3 - \frac{27v}{4(v - w)^2}x - \frac{27u}{4(v - w)^3}.$$

Заметим, что кривая E_0 имеет группу автоморфизмов G порядка 6 и J -инвариант указанных выше семейств индуцирует изоморфизм $E_0/G \simeq \mathbb{P}^1$. На самом деле, (1) соответствует эллиптической модулярной поверхности X_Γ над кривой $Y_\Gamma \simeq E_0$, определенной коммутантом Γ группы $SL(2, \mathbb{Z})$, для которой $-1_2 \notin \Gamma \supset \Gamma(6)$ (ср. [4, § 5], [5]). Подгруппа Γ свободно порождается двумя следующими образующими: $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Семейство типа (2) оказывается одной из трех (изоморфных) эллиптических модулярных поверхностей, определенных следующими (парно сопряженными в $SL(2, \mathbb{Z})$) подгруппами соответственно: $\langle -\gamma_1, \gamma_2 \rangle$; $\langle \gamma_1, -\gamma_2 \rangle$; $\langle -\gamma_1, -\gamma_2 \rangle$. Эти подгруппы также не содержат -1_2 и их образы в $PSL(2, \mathbb{Z})$ те же, что для Γ , а именно, коммутант группы $PSL(2, \mathbb{Z})$. Другими словами, соответствующие модулярные кривые изоморфны E_0 . Заметим, что J -инвариант может отождествляться с рациональной функцией v^3 .

ТЕОРЕМА 1. *С точностью до изоморфизма семейства (1), (2) исчерпывают все якобиевы эллиптические расслоения $f: X \rightarrow E$, имеющие только один особый слой и ненулевой класс Кодаяры–Спенсера.*

ЛЕММА 2. *Если якобиево эллиптическое расслоение $f: X \rightarrow E$ имеет ровно один особый слой и ненулевой класс Кодаяры–Спенсера, то этот слой имеет тип I_6^* и J -инвариант определяет сепарабельный морфизм $J: E \rightarrow \mathbb{P}^1$ степени 6.*

Тот факт, что особый слой имеет тип I_6^* , следует из гипотезы Шпиро над функциональными полями (ср. [2, Theorem 3] и [3]). Для доказательства второго утверждения рассмотрим разложение $J: E \rightarrow E' \xrightarrow{J'} \mathbb{P}^1$ на чисто несепарабельную и сепарабельную части. Затем, применение формулы Римана–Гурвица к J' показывает, что $J = J'$.

ЛЕММА 3. *Все эллиптические расслоения из леммы 2 имеют одну и ту же базу, которая может быть отождествлена с кривой $E_0 : u^2 = v^3 - 1$.*

Из леммы 2 легко видеть, что мы имеем следующее описание ветвления: одна точка, полностью разветвленная над ∞ ; над 0 две точки ветвления, каждая с индексом ветвления 3; а над 1 три точки ветвления, каждая из которых имеет индекс ветвления 2. Далее, положим $\pi_1^t := \pi_1^t(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$. Поскольку $(p, |S_6|) = 1$, то, согласно известному результату Гротендика о ручных фундаментальных группах ([SGA, v. 1, XIII, 2.12]) мы видим, что кривая E полностью определена представлением π_1^t в группу перестановок S_6 , образ которого должен быть транзитивной подгруппой в S_6 . Заметим, что это представление по существу описывает, как листы накрытия $J : E \rightarrow \mathbb{P}^1$ переставляются. Из описания ветвления выше мы видим, что обход вокруг ∞ дает полный цикл; вокруг 0 – произведение трех непересекающихся 2-циклов; а вокруг 1 – произведение двух непересекающихся 3-циклов. Простая комбинаторная проверка показывает, что имеется только одна возможность с точностью до сопряжения (ср. [5, Proposition 3]): $(12)(34)(56) \circ (135)(246) = (145236)$. Имея ввиду семейство (1) (или (2)), мы заключаем, что база E может быть отождествлена с кривой E_0 .

Рассматривая вейерштрассову нормальную форму для расслоения $f : X \rightarrow E_0$ из теоремы 1, видим, что эта нормальная форма также задает эллиптическую поверхность в нулевой характеристике, которая имеет $q = 1$ и ровно один особый слой (типа I_6^*). Утверждение теоремы 1 теперь следует из упомянутой классификации (над комплексными числами) в [5].

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $f : X \rightarrow E$ – нетривиальное якобиево семейство эллиптических кривых в характеристике $\neq 2, 3$ над некоторой эллиптической базой. Предположим, что $s = 1$. Тогда база E может быть отождествлена с кривой E_0 и $f : X \rightarrow E$ получается из семейств (1) или (2) посредством замены базы с помощью некоторой степени морфизма Фробениуса.*

Доказательство сводится к случаю с $K - S(f) \neq 0$ в теореме 1 стандартными рассуждениями ([3], ср. [1]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для полустабильного эллиптического расслоения $f : X \rightarrow E$, имеющего минимальное число особых слоев $s = 2$ и ненулевой класс Кодаиры–Спенсера, известно, что f имеет конфигурацию особых слоев (I_m, I_n) с $m + n = 12$ (см. [1]). Этот метод доказательства также применяется к этому случаю при условии $p \nmid 6mn$.

Автор выражает благодарность В. А. Исковских, А. Н. Паршину и Т. Шиоде за поддержку и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Нгуен К. В. Полустабильные эллиптические расслоения с малым числом слоев над базой рода 0 и 1 (в печати). [2] Goldfeld D., Szpiro L. // Compositio Math. 1995. V. 97. P. 71–87. [3] Nguyen K. V. // Proc. Japan Acad. Ser. A. 1997. V. 73. №6. P. 103–104. [4] Shioda T. // J. Math. Soc. Japan. 1972. V. 24. P. 20–59. [5] Stiller P. F. // Manuscripta Math. 1988. V. 60. P. 299–321.