Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Новиков, Оператор Шрёдингера на графах и топология, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm910>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:34:52

ОПЕРАТОР ШРЁДИНГЕРА НА ГРАФАХ И ТОПОЛОГИЯ

С. П. Новиков

Определим оператор Шрёдингера для одномерного симплициального комплекса (графа)¹ Γ без концов (т.е. в любой вершине сходится конечное число ребер, не меньшее двух), который действует на функции от вершин T или ребер R :

$$(B) \quad (L\psi)_T = \sum_{T'} b_{T:T'} \psi_{T'}$$

для $L_0 = \partial\partial^*$, $b_{T:T'} = 1$, $b_{T:T} = -m_T$,

$$(P) \quad (L\psi)_R = \sum_{R'} d_{R:R'} \psi_{R'}$$

для $L_0 = \partial^*\partial$, $d_{R:R'} = 1$, $d_{R:R} = -2$.

Здесь коэффициенты вещественны, симметричны и отличны от нуля только для ближайших соседей

$$T' \cup T = \partial R, \quad R \cap R' = T.$$

Коэффициенты $b_{T:T} = W_T$ и $d_{R:R} = W_R$ называются потенциалом, m_T – это число ребер в вершине, ∂ – граничный оператор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вронскианом пары решений $L\psi_i = \lambda\psi_i$, $i = 1, 2$, называется кососимметричное билинейное выражение

$$(B) \quad W_{\mathbf{R}} = b_{T:T'}(\psi_{1T}\psi_{2T'} - \psi_{2T}\psi_{1T'}), \quad T' \neq T,$$

$$(P) \quad W_{\mathbf{R}} = \sum_{R' \cap R = T} d_{R:R'}(\psi_{1R}\psi_{2R'} - \psi_{2R}\psi_{1R'}), \quad R' \neq R.$$

Здесь $\mathbf{R} = (TT')$ это ориентированное ребро, $W_{TT'} = -W_{T'T}$.

ТЕОРЕМА 1. Вронскиан пары решений корректно определен как 1-цепь на Γ , граница которой равна нулю: $\partial W = 0$.

Доказательство вытекает в обоих случаях из рассмотрения величины $(L\psi_1)\psi_2 - (L\psi_2)\psi_1$.

Рассмотрим граф Γ , имеющий k “хвостов” $(z_1, \dots, z_k)$, $k \geq 1$: хвосты z_j являются полупрямыми с ребрами R_{jn} , $n \geq 1$, и вершинами $T_{j,n-1}$, $\partial R_{jn} = T_{jn} - T_{j,n-1}$. Пусть оператор Шрёдингера “финитен”, т.е. при $n > n_0$ и всех j мы имеем: $L = L_0 + 2$ в обоих случаях.

Уравнение $L\psi = \lambda\psi$ имеет решения в z_j при $n \rightarrow \infty$ вида $\psi_{jn}^\pm = a_\pm^n$, $a_\pm = \frac{1}{2}(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4})$. Базис вещественных решений для $\lambda \in \mathbb{R}$ таков:

$$C_{jn} = (a_- \psi_{jn}^+ + a_+ \psi_{jn}^-)(a_+ + a_-)^{-1}, \quad S_{jn} = (\psi_{jn}^+ - \psi_{jn}^-)(a_+ - a_-)^{-1}.$$

Эти решения определены только в хвостах. Введем “фазовое пространство” $\mathbb{R}^{2k}$ с базисом $(C_1, S_1, \dots, C_k, S_k)$ и кососкалярным произведением

$$\langle C_i, C_j \rangle = \langle S_i, S_j \rangle = 0, \quad \langle C_i, S_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Оператор L определяет подпространство $\Lambda_\lambda^\infty \subset \mathbb{R}^{2k}$ векторов $\psi_\infty \in \Lambda_\lambda^\infty$, продолжающихся на весь граф Γ как решение

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \psi = \psi_\infty = (\psi_{1\infty}, \dots, \psi_{k\infty}), \quad \psi_{j\infty} = \alpha_j C_j + \beta_j S_j$$

в хвосте z_j для $n > n_0$.

¹Обсуждение этой проблемы мы начали вместе с А. П. Веселовым.

ТЕОРЕМА 2². Подпространство Λ_λ^∞ является лагранжевым, т.е. скалярное произведение на нем равно нулю.

Доказательство вытекает из теоремы 1. Действительно, для любой пары решений ψ_1, ψ_2 на Γ мы имеем $W = \sum_{j=1}^k \kappa_j z_j + (\text{конечное})$, где z_j – хвосты. Лишь разности $z_i - z_j$ продолжаются до циклов на Γ по модулю ∞ . Поэтому мы имеем $W = \sum_{l \geq 2}^k \mu_l (z_1 - z_l) + (\text{конечный цикл}) = \sum_{j=1}^k \kappa_j z_j + (\text{конечная цепь})$. Отсюда следует теорема

$$\sum_{j=1}^k \kappa_j = 0 = \langle \psi_{1\infty}, \psi_{2\infty} \rangle.$$

Представим граф Γ в виде $\Gamma = \Gamma' \cup K_1 \cup \dots \cup K_s$, где K_l – деревья, растущие из вершин (“гнезд”) $T_l \in \Gamma'$, причем Γ' – конечный граф без концов (“основа”), $s \leq k$.

ТЕОРЕМА 3. Размерность пространств решений $L\psi = \lambda\psi$ на Γ всегда не меньше, чем k . Оно строго больше чем k если и только если оператор Шрёдингера L' , ограниченный на основе Γ' , имеет “особое” собственное число λ'_p , где $\psi'_p(T_l) = 0$ во всех гнездах $l = 1, \dots, s$. В этом и только этом случае оператор, сопоставляющий решению $L\psi = \lambda\psi$ вектор $\psi_\infty \in \Lambda_\lambda^\infty$, имеет нетривиальное ядро.

Спектр оператора L в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2^\varepsilon(\Gamma) = H_\varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$ (вершины и ребра) делится на непрерывную часть $|\lambda| \leq 2$ (зона рассеяния) и дискретный спектр в зонах $\lambda < -2$, $\lambda > 2$. Точки дискретного спектра внутри зоны $|\lambda| \leq 2$ возможны лишь локализованные на основе Γ' , где $\lambda = \lambda'$ – “особое” собственное число. Алгебраические свойства зоны рассеяния (“унитарность”) целиком определяются теоремой 2. При $|\lambda| > 2$ мы имеем $a_+ a_- = 1$, $a_\pm \in \mathbb{R}$. Рассмотрим лагранжеву плоскость $\Lambda_\lambda^- \subset \mathbb{R}^{2k}$ с убывающим на бесконечности базисом Ψ_j^- , $j = 1, \dots, k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Точка $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| > 2$, является точкой дискретного спектра для L в H_ε ($\varepsilon = 0, 1$), если $\Lambda_\lambda^\infty \cap \Lambda_\lambda^-$ – непусто или $\lambda = \lambda'_p$ – особое собственное число на основе. Индексы Морса кривых Λ_λ^∞ в лагранжевом грассмане совпадают с алгебраическими числами собственных значений для $\lambda \in [2, \infty]$ и $\lambda \in [-\infty, -2]$. Дискретный спектр заведомо имеется если: $\max_T (\sum b_{T:T'}^2 + W_T^2) > 4$, $\max_R (\sum d_{R:R'}^2 + W_R^2) > 4$ или $\max_q |\lambda'_q| > 4$ для спектра основы Γ' (в том числе неособого).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Новиков С. П., Дынников И. А. // УМН. 1997. Т. 52. № 5. С. 175–234. [2] Новиков С. П. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 2. С. 253–288; № 3. С. 475–500.

University of Maryland at College Park
E-mail: novikov@ipst.umd.edu

Принято редколлегией
25.11.1997

²В 1971 г. И. М. Гельфанд сообщил автору интересную идею о связи самосопряженных расширений симметрических операторов с лагранжевыми плоскостями. Это было реакцией Гельфанда на работу автора [2], построенную на связи между гамильтоновым формализмом и дифференциальной топологией.