Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Олейник, Т. А. Шапошникова, Об усреднении эллиптических задач в перфорированных областях с непериодической структурой, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm911>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 08:23:50

**ОБ УСРЕДНЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
ЗАДАЧ В ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ
С НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ**

О. А. ОЛЕЙНИК, Т. А. ШАПОШНИКОВА

1. Здесь мы рассмотрим вопрос об усреднении решений уравнения Пуассона в перфорированной области с непериодической структурой и условиями Неймана или условиями смешанного типа на границе полостей. Случай периодической структуры области рассмотрен во многих работах и монографиях (см. [1], [2] и представленную там библиографию).

2. Пусть Ω – гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$. Пусть область G_ε^j принадлежит Ω , $j = 1, \dots, N(\varepsilon)$, ε – малый параметр, $G_\varepsilon^j \cap G_\varepsilon^i = \emptyset$ при $i \neq j$, G_ε^j имеет кусочно-гладкую границу ∂G_ε^j . Обозначим $|G|$ меру Лебега множества G . Положим

$$G_\varepsilon = \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} G_\varepsilon^j, \quad \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon}, \quad S_\varepsilon^* = \partial G_\varepsilon, \quad S_\varepsilon = S_\varepsilon^* \cap \Omega, \quad \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus S_\varepsilon, \quad M_\varepsilon = \partial\Omega \cap \overline{G_\varepsilon}.$$

3. Условие Неймана на границе полостей. Рассмотрим в Ω_ε краевую задачу

$$(1) \quad -\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } S_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon,$$

где ν – внешняя единичная нормаль к S_ε , f – гладкая функция в $\overline{\Omega}$.

Под обобщенным решением задачи (1) мы понимаем функцию u_ε из пространства $H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$. Здесь через $H_1(\omega, \gamma)$ мы обозначили пополнение бесконечно дифференцируемых в $\overline{\omega}$ функций, равных нулю в окрестности γ , по норме

$$\|u\|_{H_1(\omega, \gamma)}^2 = \int_\omega (|\nabla u|^2 + u^2) dx, \quad \nabla u \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Будем предполагать, что любую функцию $u \in H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ можно продолжить на Ω как функцию $\tilde{u} \in H_1(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$ так, что выполняются неравенства

$$(2) \quad \|\tilde{u}\|_{H_1(\Omega)} \leq K_1 \|u\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)}, \quad \|\nabla \tilde{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq K_2 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)},$$

где постоянные K_j здесь и далее не зависят от ε . Будем также предполагать, что для $u \in H_1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ выполнено неравенство Фридрихса

$$(3) \quad \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq K_3 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)},$$

Случаи, когда эти предположения выполнены, указаны в [1]. Пусть v_0 – решение задачи

$$(4) \quad -\Delta v_0 = f \quad \text{в } \Omega, \quad v_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть u_ε – решение задачи (1), v_0 – решение задачи (4). Тогда

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - v_0\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)} &\leq K_4 |G_\varepsilon|^{1/2}, & \text{если } S_\varepsilon^* \cap \partial\Omega = \emptyset, \\ \|u_\varepsilon - v_0\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)} &\leq K_5 (|G_\varepsilon|^{1/2} + |M_\varepsilon|^{1/2}), & \text{если } S_\varepsilon \cap \partial\Omega \neq \emptyset. \end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ. Пусть G_ε^j имеет диаметр a_ε^j и $N(\varepsilon) \leq d_s \varepsilon^{-s}$, $0 \leq s \leq n$, $d_s = \text{const} > 0$. Этот случай включает области, перфорированные вдоль многообразий $M^s \subset \Omega$ размерности s , $s < n$, либо G_ε^j могут быть расположены произвольным образом внутри Ω , $s = n$. Тогда

$$\|u_\varepsilon - v_0\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)} \leq K_6 \max_j |a_\varepsilon^j|^n \varepsilon^{-s}, \quad \text{если } S_\varepsilon^* \cap \partial\Omega = \emptyset,$$

$$\|u_\varepsilon - v_0\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)} \leq K_7 \left(\max_j |a_\varepsilon^j|^{n-1} \varepsilon^{-k} + \max_j |a_\varepsilon^j|^n \varepsilon^{-s} \right),$$

если $S_\varepsilon^* \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ и число полостей G_ε^j таких, что $\partial\Omega \cap \partial G_\varepsilon^j$, не превосходит $d_k \varepsilon^{-k}$, $N(\varepsilon) \leq d_s \varepsilon^{-s}$.

4. Смешанные граничные условия. Рассмотрим задачу

$$(5) \quad -\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \beta(x) u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } S_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\beta(x) \geq \beta_0 > 0$, u_ε – обобщенное решение задачи (5), v_0 – решение задачи (4). Тогда

$$\|u_\varepsilon - v_0\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq K_8 |S_\varepsilon|.$$

ПРИМЕРЫ. Пусть $|\partial G_\varepsilon^j| \leq K_9 (a_\varepsilon^j)^{n-1}$, a_ε^j – диаметр области G_ε^j и пусть $N(\varepsilon) \leq d_s \varepsilon^{-s}$. Тогда справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon - v_0\|_{H_1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq K_{10} \left(\max_j a_\varepsilon^j \right)^{n-1} \varepsilon^{-s}.$$

Задача усреднения с условиями Дирихле на границе полостей и усреднение некоторых задач смешанного типа мы рассмотрим в следующей статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993. [2] Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structure. Amsterdam: North Holland, 1978.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
25.11.1997