Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, О размерности в проблеме Борсука, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm912>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:56:19

О РАЗМЕРНОСТИ В ПРОБЛЕМЕ БОРСУКА

А. М. РАЙГОРОДСКИЙ

1. Введение. В [1] Борсук высказал гипотезу о том, что всякое ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$ может быть разбито на $d + 1$ часть меньшего диаметра. Определим величину $f(d)$ как минимальное число такое, что всякое ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$ может быть разбито на $f(d)$ частей меньшего диаметра. Утверждение гипотезы Борсука было доказано в размерностях 2 и 3, а также в произвольной размерности для множеств с гладкой границей. В работе [2] с помощью результатов работы [3] была получена оценка $f(d) \geq (1.2)^{d^{1/2}}$, которая позволила построить контрпример к гипотезе Борсука в размерности 1325. В [4] контрпример был построен в размерности $d = 946$. В настоящей работе за счет уточнения техники, предложенной в работе [4], доказывается следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. При $d = 561$ существует ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$, которое не может быть разбито на $d + 1$ часть меньшего диаметра.

2. Доказательство утверждения. Положим $n = 36$. Определим семейство векторов $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ как множество всевозможных вершин куба $[-1, 1]^n$, у которого первые три координаты положительны, а число отрицательных координат четно. Ясно, что $\text{card } \Sigma = 2^{n-4}$. Кроме того, легко видеть, что выполнены следующие 3 простые утверждения:

- (i) для любых двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Sigma$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv 0 \pmod{4}$;
- (ii) для любых двух различных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Sigma$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv 0 \pmod{9}$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$;
- (iii) для любых двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Sigma$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv 4 \pmod{9}$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 4$.

Каждому вектору $\mathbf{a} \in \Sigma$ поставим в соответствие многочлен $F_{\mathbf{a}} \in \mathbb{Q}[x_4, \dots, x_n]$, определяемый соотношением $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{9} \prod_{i=1}^3 (i - (\mathbf{a}, \mathbf{x})) \prod_{i=5}^8 (i - (\mathbf{a}, \mathbf{x}))$. (Здесь предполагается, что $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.) Из определения многочлена немедленно следует, что для любых двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \Sigma$ выполнено:

- (1) $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}$;
- (2) если $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \equiv 0 \pmod{9}$, то $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \not\equiv 0 \pmod{3}$;
- (3) если $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \not\equiv 0 \pmod{9}$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \not\equiv 4 \pmod{9}$, то $F_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \equiv 0 \pmod{3}$.

Используя стандартное представление многочлена $F_{\mathbf{a}}$ в виде линейной комбинации мономов и последовательно применяя соотношение $x_i^2 = 1$, для каждого вектора $\mathbf{a} \in \Sigma$ получаем новый многочлен $\tilde{F}_{\mathbf{a}} \in \mathbb{Q}[x_4, \dots, x_n]$. Понятно, что и для любого такого многочлена выполняются условия (1)–(3).

Рассмотрим произвольное семейство векторов $Q \subset \Sigma$ такое, что скалярное произведение любых двух его различных векторов не ноль и не четыре по модулю 9.

ЛЕММА. Каково бы ни было рассмотренное выше семейство векторов $Q \subset \Sigma$, для величины $s = \text{card } Q$ выполнена оценка:

$$(*) \quad s \leq \sum_{k=0}^7 C_{33}^k.$$

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00378).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Q = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s\}$. Каждому вектору $\mathbf{a}_i \in Q$ сопоставим многочлен $\tilde{F}_{\mathbf{a}_1}$. Используя свойства (1), (2), (3) многочленов $\tilde{F}_{\mathbf{a}_1}, \dots, \tilde{F}_{\mathbf{a}_s}$, нетрудно показать аналогично тому, как это было сделано в работе [4], что многочлены $\tilde{F}_{\mathbf{a}_1}, \dots, \tilde{F}_{\mathbf{a}_s}$ линейно независимы над $\mathbf{Q}$. Вспоминая определение многочленов $\tilde{F}_{\mathbf{a}_1}, \dots, \tilde{F}_{\mathbf{a}_s}$, получаем, что $s \leq \sum_{k=0}^7 C_{33}^k$. Лемма доказана.

Семейству векторов Σ сопоставим семейство $(n-1)$ $(n-3)$ -мерных векторов Σ^* следующим образом. Каждому вектору $\mathbf{x} \in \Sigma$ поставим в соответствие вектор $\mathbf{x} * \mathbf{x} = (x_i \times x_j)$, $i = 2, \dots, n$, $j = 4, \dots, n$. Легко убедиться в том, что для любых двух векторов $\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{z} * \mathbf{z} \in \Sigma^*$ выполнено равенство $(\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{z} * \mathbf{z}) = ((\mathbf{x}, \mathbf{z}) - 1)((\mathbf{x}, \mathbf{z}) - 3)$. Отсюда и из свойства (i) следует, что максимальное расстояние между векторами из Σ^* достигается в том и только том случае, когда скалярное произведение их прообразов равно нулю или четырем. Воспользовавшись последним рассуждением, утверждениями (ii) и (iii) и неравенством (*), получаем, что множество Σ^* невозможно разбить на $f < 2^{32} / \left(\sum_{k=0}^7 C_{33}^k \right)$ частей так, чтобы диаметр каждой части был меньше диаметра всего множества. Кроме того, понятно, что размерность семейства векторов Σ^* равна $C_{33}^2 + 33 = 561$. Положим $d = 561$. Из всего сказанного следует, что $f(d) \geq 2^{32} / \left(\sum_{k=0}^7 C_{33}^k \right) \geq 758 > 562$. Этим неравенством построение контрпримера к гипотезе Борсука в размерности $d = 561$ завершено.

Автор благодарит А. С. Тарасова за указание неточностей в первоначальном варианте работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Borsuk K. // Fund. Math. 1933. V. 20. P. 177–190. [2] Kahn J., Kalai G. // Bull. AMS (N.S.). 1993. V. 29. № 1. P. 60–62. [3] Frankl P., Wilson R. // Combinatorica. 1981. № 1. P. 259–286. [4] Nilli A. // Contemp. Math. 1994. V. 178. P. 209–210.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
03.09.1997