Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Головки, Вариационные скобки Схоутена и Нийен-
хейса, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 2, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 05:53:34

Вариационные скобки Схоутена и Нийенхейса

В. А. Головки

Мы показываем, что вариационные скобки Нийенхейса и Схоутена на эволюционных уравнениях можно понимать как суперскобки Якоби на естественных расширениях этих уравнений – так называемых ℓ - и ℓ^* -накрытиях. Полученный результат важен для обобщения вариационных скобок на случай произвольных уравнений и нелокальных операторов.

Предварительные сведения (см. [1]). Рассмотрим систему эволюционных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right), \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ – вектор-функция с компонентами $(u^1, \dots, u^m)$ и $f = (f^1, \dots, f^m)$ – также вектор-функция. Пусть $\mathcal{E}$ – бесконечное продолжение системы (1), рассматриваемое как подмногообразие в пространстве джетов $J^\infty(\pi)$ тривиального расслоения $\pi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ с координатами (x, t) в базе и $u_0^1, \dots, u_0^m$ вдоль слоя. В качестве координат на $\mathcal{E}$ выбираются функции x, t и u_i^j , $j = 1, \dots, m$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Кольцо гладких функций на $\mathcal{E}$ обозначается через $\mathcal{F}(\mathcal{E})$. Основная геометрическая структура на $\mathcal{E}$ – это распределение Картана $\mathcal{C}$, задаваемое полными производными $D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^m \sum_{i \geq 0} u_{i+1}^j \frac{\partial}{\partial u_i^j}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \sum_{i \geq 0} D_x^i(f^j) \frac{\partial}{\partial u_i^j}$. Симметрии распределения $\mathcal{C}$ образуют алгебру Ли, совпадающую с алгеброй симметрий уравнения (1)

и состоящую из эволюционных дифференцирований вида $\mathcal{D}_\varphi = \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 0} D_x^k(\varphi^j) \frac{\partial}{\partial u_k^j}$,

где вектор-функция $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ удовлетворяет линейаризованному уравнению $\ell_{\mathcal{E}}(\varphi) = 0$. Здесь $\ell_{\mathcal{E}} = D_t - \sum \frac{\partial f}{\partial u_i^j} D_x^i$. Скобка Якоби двух симметрий задается равенством $\{\varphi, \psi\} = \mathcal{D}_\varphi \psi - \mathcal{D}_\psi \varphi$. Множество вектор-функций φ обозначается через $\mathcal{X}$.

Пусть P и Q – $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ -модули. Операторы $P \rightarrow Q$ в полных производных называются $\mathcal{C}$ -дифференциальными. Множество всех таких операторов обозначается через $\mathcal{C} \text{Diff}(P, Q)$. Оператор, сопряженный к $\Delta: P \rightarrow Q$, обозначается через $\Delta^*: \hat{Q} \rightarrow \hat{P}$, где $\hat{P} = \text{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{E})}(P, \bar{\Lambda}^n)$, а $\bar{\Lambda}^n$ – пространство горизонтальных дифференциальных n -форм, где n – число независимых переменных. Множество k -линейных кососимметричных $\mathcal{C}$ -дифференциальных операторов $\underbrace{P \times \dots \times P}_{k \text{ раз}} \rightarrow Q$ обозначим через

$\mathcal{C} \text{Diff}_{(k)}^{\text{skew}}(P, Q)$, а подмножество в $\mathcal{C} \text{Diff}_{(k)}^{\text{skew}}(P, \hat{P})$, состоящее из кососопряженных по каждому аргументу операторов, – через $\mathcal{C} \text{Diff}_{(k)}^{\text{sk-ad}}(P, \hat{P})$.

Скобка Нийенхейса. Оператор $R \in \mathcal{C} \text{Diff}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ называется вариационным тензором типа (1, 1) на уравнении (1), если

$$\ell_{\mathcal{E}} \circ R = A \circ \ell_{\mathcal{E}} \quad (2)$$

для некоторого $\mathcal{C}$ -дифференциального оператора A . Рассмотрим ℓ -накрытие уравнения (1), получаемое добавлением к (1) уравнения $q_t = \ell_f(q)$, где q – новая нечетная зависящая переменная, см. [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует естественное вложение множества вариационных тензоров типа $(1, 1)$ в алгебру суперсимметрий ℓ -накрытия.*

Пусть R_1 и R_2 – вариационные тензоры типа $(1, 1)$. Их вариационной скобкой Нийенхейса называется оператор $\llbracket R_1, R_2 \rrbracket^N \in \mathcal{C}\text{Diff}_{(2)}^{\text{skew}}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$, определяемый равенством

$$\begin{aligned} \llbracket R_1, R_2 \rrbracket^N(\varphi_1, \varphi_2) = & \{R_1\varphi_1, R_2\varphi_2\} + \{R_2\varphi_1, R_1\varphi_2\} - R_1(\{R_2\varphi_1, \varphi_2\} + \{\varphi_1, R_2\varphi_2\} \\ & - R_2\{\varphi_1, \varphi_2\}) - R_2(\{R_1\varphi_1, \varphi_2\} + \{\varphi_1, R_1\varphi_2\} - R_1\{\varphi_1, \varphi_2\}), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место равенство $\mathcal{N}_{\llbracket R_1, R_2 \rrbracket^N} = \{\mathcal{N}_{R_1}, \mathcal{N}_{R_2}\}$, где $\mathcal{N}_R$ – симметрия, соответствующая вариационному тензору R в силу предложения 1, а $\{\varphi, \psi\} = \mathfrak{D}_\varphi\psi - (-1)^{\bar{\varphi}\cdot\bar{\psi}}\mathfrak{D}_\psi\varphi$ – суперскобка Якоби на ℓ -накрытии.*

Здесь и ниже $\bar{a}$ обозначает четность элемента a .

Скобка Схоутена. Оператор $Q \in \mathcal{C}\text{Diff}^{\text{sk-ad}}(\widehat{\mathcal{K}}, \mathcal{K})$ называется вариационным бивектором на уравнении (1), если

$$\ell_{\mathcal{G}} \circ Q = B \circ \ell_{\mathcal{G}}^* \quad (3)$$

для некоторого $\mathcal{C}$ -дифференциального оператора B . Рассмотрим ℓ^* -накрытие уравнения (1), получаемое добавлением к (1) уравнения $p_t = -\ell_f^*(p)$, где p – новая нечетная зависимая переменная (ср. с [2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует естественное вложение множества вариационных бивекторов в алгебру суперсимметрий ℓ^* -накрытия.*

Пусть Q_1 и Q_2 – бивекторы. Их вариационной скобкой Схоутена называется оператор $\llbracket Q_1, Q_2 \rrbracket^S \in \mathcal{C}\text{Diff}_{(2)}^{\text{sk-ad}}(\widehat{\mathcal{K}}, \mathcal{K})$, определяемый равенством

$$\begin{aligned} \llbracket Q_1, Q_2 \rrbracket^S(\psi_1, \psi_2) = & -\ell_{Q_1, \psi_1}(Q_2\psi_2) + \ell_{Q_1, \psi_2}(Q_2\psi_1) - Q_1(\ell_{Q_2, \psi_1}^*(\psi_2)) \\ & - \ell_{Q_2, \psi_1}(Q_1\psi_2) + \ell_{Q_2, \psi_2}(Q_1\psi_1) - Q_2(\ell_{Q_1, \psi_1}^*(\psi_2)), \quad \psi_1, \psi_2 \in \widehat{\mathcal{K}}, \end{aligned}$$

где $\ell_{Q, \psi}(\varphi) = \mathfrak{D}_\varphi(A)(\psi)$, $\varphi \in \mathcal{K}$.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место равенство $\mathcal{H}_{\llbracket Q_1, Q_2 \rrbracket^S} = \{\mathcal{H}_{Q_1}, \mathcal{H}_{Q_2}\}$, где $\mathcal{H}_Q$ – симметрия, соответствующая вариационному бивектору Q в силу предложения 2.*

Заключение. Полученные результаты тесно связаны с вопросами интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений. Из уравнения (2) видно, что вариационные тензоры являются операторами рекурсии для симметрий, а уравнение (3) показывает, что если Q – вариационный бивектор, то оператор $Q \circ \delta$, где δ – оператор Эйлера–Лагранжа, переводит законы сохранения в симметрии. Если при этом $\llbracket Q, Q \rrbracket^S = 0$, то Q – гамильтонова структура на рассматриваемом уравнении. Теоремы 1 и 2 позволяют обобщить понятия гамильтоновых структур структур Пуассона–Нийенхейса (см. [3]) на произвольные (а не только эволюционные) уравнения и открывают возможности для исследования нелокальных структур подобного рода.

Автор выражает благодарность А. М. Вербоветскому и И. С. Красильщику за обсуждения и ценные советы.

Список литературы

- [1] А. В. Бочаров, В. Н. Четвериков, В. Н. Дужин и др., *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, Факториал, М., 1997. [2] P. Kersten, I. Krasil'shchik, A. Verbovetsky, *J. Geom. Phys.*, **50**:1–4 (2004), 273–302; [arXiv:math/0304245](https://arxiv.org/abs/math/0304245). [3] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **53**:1 (1990), 35–81.

В. А. Головки (V. A. Golovko)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: govlovo@mccme.ru

Представлено С. К. Ландо
Принято редколлегией
09.12.2007