Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Нежинский, Многомерный аналог теории Гусарова одномерных узлов, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 1, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:29:18

Многомерный аналог теории Гусарова одномерных узлов

В. М. Нежинский

Для сферических узлов коразмерности большей двух определены и, насколько это оказалось возможным, изучены аналоги инвариантов конечной степени и групп Гусарова одномерных узлов.

Мы будем считать фиксированными натуральные числа n и p такие, что $n - p > 2$.

1. Группа $C(p, n)$ и ее фильтрация. Пусть r – натуральное число. *Зацеплением типа (r, p, n)* называется последовательность гладких вложений $(f_1: S^p \rightarrow S^n, f_2: S^p \rightarrow S^n, \dots, f_r: S^p \rightarrow S^n)$ с попарно непересекающимися образами; зацепление типа $(1, p, n)$ называется также *узлом типа (p, n)* . Зацепление $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ называется *брунновым*, если любое его подзацепление $(f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_r)$ изотопно стандартному тривиальному зацеплению (для $1 \leq i \leq r$). Хорошо известно (ср., например, [1; п. 9.3]), что множество изотопических классов брунновых зацеплений типа (r, p, n) образует абелеву группу относительно покомпонентного связного суммирования. Эту группу мы будем обозначать через $C(r, p, n)$, а если $r = 1$, то и через $C(p, n)$.

Определим гомоморфизм $f_r(p, n): C(r, p, n) \rightarrow C(p, n)$ правилом, сопоставляющим классу любого зацепления типа (r, p, n) класс (какого-нибудь) узла типа (p, n) , получаемого из этого зацепления (последовательным) связным суммированием всех его компонент. Мы полагаем $F_r(p, n) = f_r(p, n)(C(r, p, n))$. Заметим, что, поскольку отображение $f_1(p, n)$ тождественно, $F_1(p, n) = C(p, n)$.

Для любого натурального числа k положим $d(k) = (n - p - 2)k + 1$. Далее, для любой последовательности целых неотрицательных чисел $k_1, \dots, k_r$ таких, что $k_1 + \dots + k_r \geq 1$, положим

$$e(k_1, \dots, k_r) = \frac{1}{k_1 + \dots + k_r} \sum_{d|k_i} \mu(d) \left[\frac{((k_1 + \dots + k_r)/d)!}{(k_1/d)! \dots (k_r/d)!} \right],$$

где μ – функция Мёбиуса (суммирование производится по всевозможным общим делителям d чисел $k_1, \dots, k_r$). Наконец, положим $\tilde{\pi}(r, p, n) = \bigoplus [\pi_p(S^{d(k_1 + \dots + k_r)}) \oplus \dots \oplus \pi_p(S^{d(k_1 + \dots + k_r)})]$, где число слагаемых в квадратных скобках равно $e(k_1, \dots, k_r)$, а внешнее суммирование производится по всевозможным последовательностям целых чисел $k_1, \dots, k_r$ таким, что (для некоторого натурального числа $s \leq r$) $k_s = 0$, $k_i \geq 1$ при $i < s$ и $k_i > 1$ при $i > s$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть n и p – натуральные числа такие, что $n - p > 2$, и r – еще одно натуральное число. Тогда: 1) $F_1(p, n) \supset F_2(p, n) \supset F_3(p, n) \supset \dots$; 2) $F_1(p, n) = C(p, n)$; 3) $F_2(p, n) \subset \text{Ker } E$, и если $4p < 3n - 6$, то $F_2(p, n) = \text{Ker } E$, где $E: C(p, n) \rightarrow C(p, n + 1)$ – гомоморфизм надстройки (определение надстройки имеется, например, в [2; п. 6.1]); 4) если $r > p/(2(n - p - 2)) + 1$, то существует канонический эпиморфизм $\tilde{\pi}(r, p, n) \rightarrow F_r(p, n)$, и, следовательно, если $r > (p - 1)/(n - p - 2) + 1$, то группа $F_r(p, n)$ тривиальна.

2. Аналоги групп Гусарова. Для любого натурального числа r мы полагаем: $G_r(p, n) = C(p, n)/F_r(p, n)$. Что эти группы – аналоги групп Гусарова, прямо следует из сравнения нашего определения с определениями соответствующих групп одномерных узлов, содержащимися в [3] и [4]. Заметим (в этом состояла основная трудность), что удовлетворительного аналога определения групп Гусарова, содержащегося в его пионерской работе [5], построить не удастся: в его определениях принципиально важно, что узлы одномерны.

Из нашей основной теоремы следует, что $G_1(p, n) = 0$, что если $4p < 3n - 6$, то $G_2(p, n) = C(p, n)/\text{Ker } E$, что если $r > (p - 1)/(n - p - 2) + 1$, то $G_r(p, n) = C(p, n)$, и,

наконец, что существуют канонические эпиморфизмы $\cdots \rightarrow G_3(p, n) \rightarrow G_2(p, n) \rightarrow G_1(p, n)$. Заметим, что последнее утверждение является прямым аналогом первой части теоремы 3.3 статьи [5] и что предпоследнее утверждение является новым, т. е. подобное равенство в теории одномерных узлов отсутствует.

ПРИМЕР. Для любого натурального числа k группа $G_r(4k-1, 6k)$ тривиальна при $1 \leq r \leq 3$ и изоморфна $\mathbb{Z}$ при $r \geq 4$. Это – прямое следствие результатов, содержащихся в [1], [2].

3. Аналоги инвариантов конечной степени. Пусть A – коммутативная группа. Назовем (аддитивным изотопическим) инвариантом узлов типа (p, n) со значениями в группе A гомоморфизм $\varphi: C(p, n) \rightarrow A$. Пусть, далее, r – натуральное число; мы будем говорить, что инвариант φ имеет степень, не превосходящую числа r , если $F_r(p, n) \subset \text{Ker } \varphi$. В основе этого определения лежит фундаментальное свойство инвариантов конечной степени, см. [5; лемма 5.1]. (Заметим, что наш инвариант степени, не превосходящей числа r , – это аналог инварианта Гусарова из [6] степени, не превосходящей числа $r-2$.) Независимое прямое определение, аналогичное определению из [6], построить не удастся: в упомянутом определении существенно, что узлы одномерны (ср. соответствующее замечание п. 2 настоящей заметки).

Обозначим (для любого натурального числа i) через G_i пространство непрерывных отображений $S^{i-1} \rightarrow S^{i-1}$ степени 1, через G – индуктивный предел последовательности $G_1 \hookrightarrow G_2 \hookrightarrow G_3 \hookrightarrow \cdots$, через SO индуктивный предел последовательности $SO_1 \hookrightarrow SO_2 \hookrightarrow SO_3 \hookrightarrow \cdots$ и положим $H(p, n) = \pi_p(G; SO, G_{n-p})$. Хорошо известно (см. [1], [2] и [7]), что: существует канонический изоморфизм $\psi: C(p, n) \rightarrow H(p, n)$; для $r > 1$ существуют коммутативная (гомотопическая) группа $H(r, p, n)$ и изоморфизм $\psi: C(r, p, n) \rightarrow H(r, p, n)$.

Определим гомоморфизм $f'_r(p, n): H(r, p, n) \rightarrow H(p, n)$ формулой $f'_r(p, n) = \psi \circ f_r(p, n) \circ \psi^{-1}$ и положим $A(r, p, n) = H(p, n)/f'_r(p, n)(H(r, p, n))$. Определим изотопический инвариант узлов типа (p, n) со значениями в группе $A(r, p, n)$ как композицию гомоморфизма ψ и проекции $H(p, n) \rightarrow A(r, p, n)$. Ясно, что этот инвариант является (универсальным) инвариантом степени, не превосходящей числа r . Это – многомерный аналог части а) теоремы 2.2.6 работы [8] и последнего замечания шестого абзаца п. 0.4 той же работы.

Автор благодарит С. С. Подкорытова за полезные советы.

Список литературы

- [1] A. Haefliger, *Comment. Math. Helv.*, **41**:1 (1966), 51–72. [2] A. Haefliger, *Ann. of Math.* (2), **83**:3 (1966), 402–436. [3] T. B. Stanford, *J. Knot Theory Ramifications*, **9**:2 (2000), 213–219; [arXiv:math/9807161](#). [4] A. Yasuhara, *Fund. Math.*, **190** (2006), 289–297; [arXiv:math/0412489v1](#). [5] М. Н. Гусаров, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **208** (1993), 152–173; англ. пер.: M. N. Gusarov, *J. Math. Sci.*, **81**:2 (1996), 2549–2561. [6] М. Н. Гусаров, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **193** (1991), 4–9. [7] В. М. Нежинский, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:1 (1984), 127–154; англ. пер.: V. M. Nezhtinskii, *Math. USSR-Izv.*, **24**:1 (1985), 121–150. [8] М. Н. Гусаров, *Инварианты конечной степени и n-эквивалентность зацеплений*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Санкт-Петербург, 1997.

В. М. Нежинский (V. M. Nezhtinskii)
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: nezhin@pdmi.ras.ru

Представлено И. А. Дынниковым
Принято редколлегией
19.12.2007