Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Оревков, Собственное аналитическое вложение $\mathbb{CP}^1$ без канторова множества в $\mathbb{C}^2$, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 1, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 04:42:46

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Собственное аналитическое вложение $\mathbb{CP}^1$
без канторова множества в $\mathbb{C}^2$

С. Ю. Оревков

В данной заметке строится собственное вложение $\mathbb{CP}^1 \setminus K \rightarrow \mathbb{C}^2$, где K – канторово множество. Это дает положительный ответ на вопрос, который мне задала Бурглинд Йорике.

Такая кривая строится как предел алгебраических кривых A_n , которые получают одна из другой применением бирациональных отображений $F_n: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. При этом для некоторого исчерпывания $\mathbb{C}^2$ вложенными бидисками $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ топологический тип пересечения $A_n \cup B_n$ не меняется при последующих преобразованиях.

Фиксируем произвольные комплексные числа $a_1, a_2, \dots$, модули которых строго возрастают и стремятся к бесконечности. Зададим индуктивно последовательность бирациональных отображений $F_n: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, полагая F_0 равным тождественному отображению, а $F_n = f_n \circ F_{n-1}$, где

$$f_n(x, y) = \begin{cases} (x, y + g_n(x)), & n \text{ четно,} \\ (x + g_n(y), y), & n \text{ нечетно,} \end{cases} \quad g_n(t) = \frac{\varepsilon_n}{t - a_n}, \quad 0 < \varepsilon_n \ll \varepsilon_{n-1}.$$

Обозначим через $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ и $\overline{\mathbb{C}^2} = \mathbb{C}^2 \cup \{\infty\}$ одноточечные компактификации пространств $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^2$ соответственно. Зададим $\gamma_n: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}^2}$, полагая $\gamma_n(z) = F_n(z, 0)$. Тогда при должном выборе малых параметров ε_n пределом отображений γ_n является непрерывное отображение (обозначим его через $\gamma: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}^2}$) такое, что $K = \gamma^{-1}(\infty)$ – канторово множество, и ограничение отображения γ на $\mathbb{C} \setminus K$ – собственное голоморфное вложение открытой римановой поверхности $\mathbb{C} \setminus K$ в $\mathbb{C}^2$.

Опишем более детально выбор параметров ε_n , из чего будет ясно, что γ обладает требуемыми свойствами. Фиксируем положительные числа R_n такие, что

$$|a_n| < R_n < |a_{n+1}|.$$

Пусть $A_n = \gamma_n(\mathbb{C})$, $D_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_n\}$. Обозначим через $\text{pr}_i: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, проекцию $(z_1, z_2) \mapsto z_i$ и положим

$$C_n^{(i)} = \text{pr}_i^{-1}(D_n), \quad B_n = C_n^{(1)} \cap C_n^{(2)} = D_n \times D_n, \quad C_n = C_n^{(1)} \cup C_n^{(2)}.$$

Ясно, что $B_1 \subset B_2 \subset \dots$, и при этом $\bigcup_n B_n = \mathbb{C}^2$. Будем задавать числа ε_n индуктивно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $A_n \subset C_n$;
- 2) $A_n \cap (C_n^{(i)} \setminus B_n)$, $i = 1, 2$, состоит из конечного числа компонент связности, каждая из которых биголоморфно отображается на $\mathbb{C} \setminus D_n$ при проекции pr_i ;

3) при каждом фиксированном n все кривые $A_p \cap B_n$ при $p \geq n$ изотопны друг дружке в B_n , и они $\mathcal{C}^\infty$ -гладко сходятся к некоторой аналитической кривой, которая тоже всем им изотопна;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$, где d_n – максимум диаметров (относительно некоторой фиксированной метрики на $\overline{\mathbb{C}}$) компонент связности множества $\gamma^{-1}(A_n \setminus B_n)$.

Назовем компоненту края кривой $A_n \cap B_n$ *горизонтальной*, если она лежит в $(\partial D_n) \times D_n$, и *вертикальной*, если она лежит в $D_n \times (\partial D_n)$ (из условия 1) следует, что других компонент быть не может). Если параметры ε_n выбраны так, как сказано выше, то, с точностью до малого возмущения, $A_{2n+1} \cap B_{2n+1}$ получается из $A_{2n} \cap B_{2n}$ приклеиванием кольца к каждой вертикальной компоненте края и приклеиванием штанов (т.е. кольца с дыркой) к каждой горизонтальной компоненте. При переходе от $A_{2n+1} \cap B_{2n+1}$ к $A_{2n+2} \cap B_{2n+2}$ вертикальные и горизонтальные компоненты края меняются ролями.

С. Ю. Оревков (S. Yu. Orevkov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;

Université Paul Sabatier, Toulouse, France

E-mail: orevkov@mi.ras.ru

Представлено А. Г. Сергеевым

Принято редколлегией

14.12.2007