Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Агранович, Ю. Д. Бураго, Б. Р. Вайнберг,
М. И. Вишик, С. Г. Гиндикин, В. А. Кондратьев,
В. П. Маслов, С. В. Поборчий, Ю. Г. Решетняк, В. П. Ха-
вин, М. А. Шубин, Владимир Гилелевич Мазья (к
70-летию со дня рождения), *УМН*, 2008, том 63, вы-
пуск 1, 183–189

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:42:51

Владимир Гилелевич Мазья

(к семидесятилетию со дня рождения)

31 декабря 2007 г. исполнилось 70 лет выдающемуся математику Владимиру Гилелевичу Мазье – автору многочисленных работ и фундаментальных результатов в различных областях анализа и математической физики.

В. Г. Мазья родился 31 декабря 1937 г. в Ленинграде. Его отец погиб на войне в 1941 г., а оба деда и обе бабушки умерли в Ленинграде во время блокады. Мать воспитывала Владимира одна. Они жили вдвоем с сыном на скромную зарплату бухгалтера в девятиметровой комнате в большой коммунальной квартире.

Школу Владимир закончил с золотой медалью, а в старших классах был неоднократным победителем городских олимпиад по математике и физике.

В 1955 г. В. Г. Мазья поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета. Он рано начал публиковаться: первая заметка в “Докладах АН СССР” (о задаче Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка) появилась в 1959 г., когда он был студентом 4 курса. В том же году он сделал два сообщения на семинаре В. И. Смирнова о необходимых и достаточных условиях справедливости интегральных неравенств соболевского типа. Результаты были напечатаны в “Докладах” в 1960 г. За эту работу В. Г. Мазья стал в 1962 г. первым лауреатом премии молодому математику, учрежденной Ленинградским математическим обществом.

По окончании университета В. Г. Мазья получил место младшего научного сотрудника в Научно-исследовательском институте математики и механики (НИИММ) ЛГУ. В 1961 г. он организовал на матмехе Юношескую математическую школу и был ее первым директором. В 1962 г. В. Г. Мазья защитил в МГУ кандидатскую диссертацию на тему “Классы множеств и теоремы вложения функциональных пространств”, основу которой составили идеи, высказанные в упомянутых сообщениях на семинаре В. И. Смирнова. В своих отзывах оппоненты и ведущая организация отметили, что работа по уровню намного превосходит требования ВАК к кандидатским диссертациям, а на защите в Ученом совете МГУ она была признана выдающейся.

В. Г. Мазья не имел формального руководителя ни по дипломной работе, ни по кандидатской диссертации: он сам выбирал темы для своей научной работы и самостоятельно решал поставленные задачи. Однако еще в студенческие годы он познакомился с С. Г. Михлиным, и это знакомство, перешедшее в многолетнюю дружбу, оказало большое влияние на формирование математического стиля Владимира Гилелевича.

В 1961 г. В. Г. Мазья получил должность старшего научного сотрудника НИИММ, которую занимал вплоть до 1986 г. В 1965 г. он защитил в ЛГУ докторскую диссертацию "Задачи Дирихле и Неймана в области с нерегулярной границей". С 1968 по 1978 г. он читал лекции в Ленинградском кораблестроительном институте, где получил звание профессора в 1976 г. В 1986 г. он перешел из ЛГУ в Ленинградское отделение Института машиноведения АН СССР, где создал лабораторию математических моделей в механике и был ее руководителем. В это время успешно функционировал Консультационный центр по математике для инженеров, который также создал и возглавлял В. Г. Мазья. Под его руководством в то время успешно работал и городской семинар по гидромеханике.

В 1990 г. В. Г. Мазья переехал в Швецию и стал профессором университета в Линчёпинге. В том же году он получил звание почетного доктора университета в Ростове. В 1999 г. он стал лауреатом премии Гумбольдта. В 2000 г. В. Г. Мазья был избран членом-корреспондентом Королевского математического общества в Эдинбурге, а в 2002 г. он становится действительным членом Шведской королевской академии наук. В его честь была организована конференция по пространствам Соболева в Киото в 1993 г. Две международных конференции состоялись в 1998 г. в связи с 60-летием Владимира Гилелевича: одна в университете в Ростове (по функциональному анализу и дифференциальным уравнениям), другая в Политехнической школе в Париже (по методу граничных элементов). В 2002 г. В. Г. Мазья был приглашенным докладчиком на Международном математическом конгрессе в Пекине в секции по дифференциальным уравнениям в частных производных. Он является членом редколлегий нескольких математических журналов, издаваемых в Германии, США, Швеции, Голландии, Индии, Франции. В последние годы В. Г. Мазья является профессором университета в Ливерпуле (Англия) и университета в Коламбусе (Огайо, США).

Результаты 50-летней научной деятельности юбиляра отражены более чем в 20 его книгах и 420 статьях. Далее мы приводим краткое описание этих результатов, где используем статью [1], в которой дан обзор работ, написанных до 2002 г.

Изопериметрические и интегральные неравенства. Еще студентом четвертого курса В. Г. Мазья обнаружил, что интегральные неравенства соболевского типа эквивалентны изопериметрическим или емкостным неравенствам для подмножеств области, на которой определена функция. Эти результаты (вошедшие впоследствии в кандидатскую диссертацию) были опубликованы в 1960–61 гг. Предложенный метод доказательства позволял получать точные константы в интегральных неравенствах. Так, точная константа в неравенстве Гальярдо

$$\|u\|_{L_{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

оказалась равной $^1 C = n^{-1} v_n^{-1/n}$, где v_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Более того, как подчеркнул В. Г. Мазья в 1966 г., его доказательство не использует специфических свойств евклидова пространства и может быть перенесено на римановы многообразия. Емкостные критерии оценок соболевского типа основаны на одном замечательном неравенстве, которое доказал В. Г. Мазья (1964, 1972) и которое впоследствии стало называться сильным емкостным неравенством. Некоторые обобщения этого неравенства В. Г. Мазья получил в недавних работах (2005, 2006). Выяснилось также (2003), что вложения в дробные пространства Бесова или потенциалов Рисса равносильны изопериметрическим неравенствам нового типа. Упомянутые выше ранние работы Владимира Гилелевича послужили отправной точкой изучения различных аспектов

¹Одновременно и независимо точная константа в неравенстве Гальярдо была получена Г. Федерером и В. Флемингом.

теории пространств Соболева и оказали серьезное влияние на эту теорию. В настоящее время методы, используемые в этих работах, с успехом применяются, например, при исследовании пространств Соболева на метрических пространствах.

Результаты, полученные до 1985 г., собраны в книге [2], пожалуй, самой известной книге Владимира Гилелевича.²

Свойства оператора Шрёдингера. С помощью емкостных критериев В. Г. Мазья сформулировал необходимые и достаточные условия справедливости различных спектральных свойств оператора Шрёдингера (1962, 1964). В. Г. Мазья и И. Э. Вербицкий (2002) получили описание оператора потенциальной энергии V (класса комплекснозначных распределений), для которого оператор Шрёдингера $H = -\Delta + V$ переводит энергетическое пространство в свое сопряженное. В. Г. Мазья, В. А. Кондратьев и М. А. Шубин (2004) нашли необходимые и достаточные условия положительности и дискретности спектра оператора Шрёдингера с магнитным потенциалом. Этот результат обобщает классический критерий А. М. Молчанова дискретности спектра в отсутствие магнитного поля.

В. Г. Мазья и М. А. Шубин (2005) охарактеризовали так называемые пренебрежимые множества в критерии Молчанова, решив тем самым проблему, поставленную И. М. Гельфандом в 1953 г. Уточнение этого результата в простейшем случае оператора Лапласа с граничным условием Дирихле в области n -мерного евклидова пространства (а именно явное указание констант в двусторонней оценке нижней границы спектра через обратный квадрат емкостного внутреннего диаметра) дано в работе В. Г. Мазья и М. А. Шубина, названной в форме вопроса “Можно ли увидеть основную частоту барабана?” (“Can one see the fundamental frequency of a drum?”)³ и дающей частичный ответ на этот вопрос, являющийся в некотором смысле противоположным вопросом к знаменитому вопросу Марка Каца “Можно ли услышать форму барабана?” (“Can one hear the shape of a drum?”)

Емкости и нелинейные потенциалы. В. Г. Мазья в своих работах систематически использует понятие емкости множества. В 1963 г. он вводит полигармоническую емкость, в терминах которой дает необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи Дирихле в энергетическом пространстве для эллиптических уравнений любого порядка. В 1970 г. В. Г. Мазья и В. П. Хавин определяют нелинейные потенциалы и изучают их свойства. В настоящее время теория нелинейных потенциалов (которую можно рассматривать как обобщение классической линейной теории) представляет собой обширное поле деятельности. С ее помощью удалось ответить на многие вопросы теории функций, особенно касающиеся исключительных множеств.

Граничное поведение решений эллиптических уравнений. В своих исследованиях В. Г. Мазья неоднократно обращался к вопросу о регулярности граничной точки в смысле Винера. Так, в 1962 г. он получил формулируемую в терминах интеграла Винера оценку модуля непрерывности гармонической функции, имеющую важные приложения в теории линейных и нелинейных эллиптических уравнений. В 1970 г. В. Г. Мазья нашел условие регулярности (в смысле Винера) граничной точки для некоторого класса квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка, содержащих p -лапласиан. Отметим, что до 2002 г. практически ничего не было известно о регулярности граничной точки для уравнений порядка выше второго. В 2002 г. В. Г. Мазья обобщил условие Винера на эллиптические уравнения высокого порядка. Это было темой его доклада на Международном математическом конгрессе в Пекине.

²Издательство Springer готовит новое, переработанное ее издание.

³Lett. in Math. Phys., 74 (2005), 135–151.

Контрпримеры, связанные с 19-й проблемой Гильберта. Согласно гипотезе Гильберта, решения регулярных вариационных задач первого порядка с аналитическими коэффициентами должны быть аналитическими. Попытки доказать это делались многими математиками, и во второй половине 20-го века такое доказательство стало известно в достаточной общности. Можно было предположить, что то же верно и для вариационных задач порядка выше первого. Однако в 1968 г. В. Г. Мазья показал, что это не так. Он построил квазилинейные эллиптические уравнения высоких порядков с аналитическими коэффициентами, имеющие негладкие решения.

Оценки для дифференциальных операторов общего вида. В 70-е годы В. Г. Мазья и И. В. Гельман исследовали различные неравенства для дифференциальных и псевдодифференциальных операторов в полупространстве. Они получили результаты окончательного характера, не требуя, чтобы дифференциальные операторы априори имели какой-нибудь тип. Книга [3] содержит необходимые и достаточные условия для справедливости таких неравенств.

Граничные интегральные уравнения. Ю. Д. Бураго и В. Г. Мазья в 1967 г. внесли значительный вклад в теорию граничных интегральных уравнений, развив теорию гармонического потенциала простого и двойного слоев в пространстве C на поверхностях весьма широкого класса. В 1981 г. В. Г. Мазья предложил метод изучения граничных интегральных уравнений, основанный на предварительном исследовании некоторой вспомогательной краевой задачи. Этот метод позволил доказать теоремы о разрешимости классических граничных интегральных уравнений на кусочно-гладких поверхностях и найти асимптотику их решений около особенностей границы (в 2005 г. В. Г. Мазья и Т. О. Шапошникова обобщили этот метод на случай липшицевых поверхностей). Н. В. Грачёв и В. Г. Мазья (1991) решили классическую задачу об однозначной разрешимости граничного интегрального уравнения задачи Дирихле для оператора Лапласа в пространстве C на многограннике. В. Г. Мазья и А. А. Соловьёв (1990) впервые рассмотрели граничные интегральные уравнения на кривой, имеющей нулевые углы. Модифицируя упомянутый выше метод, они развили теорию логарифмического потенциала, пригодную для уравнений теории упругости в плоской области с вершиной внутреннего или внешнего пика на границе (2001).

Волны на воде. Читая лекции в Ленинградском кораблестроительном институте, В. Г. Мазья заинтересовался теорией поверхностных волн. В двух статьях, написанных совместно с Б. Р. Вайнбергом (1973), им были изучены основные краевые задачи этой теории. В. Г. Мазья в 1977 г. впервые доказал достаточно общий признак единственности решения в задаче о колебаниях полностью погруженного в жидкость тела. Эта проблема была поставлена Ф. Джоном еще в 1950 г. в его работе о колебаниях тела, частично погруженного в жидкость. Статьи, которые В. Г. Мазья с коллегами написал на эту тему, отражены в книге [4].

Краевые задачи в областях с кусочно-гладкой границей. Исследования на эту тему В. Г. Мазья предпринял в начале шестидесятих годов прошлого века. Его первые публикации содержали глубокие результаты для эллиптических уравнений второго порядка. Например, изучая условия самосопряженности оператора Лапласа с нулевыми условиями Дирихле на контуре класса C^1 (но не C^2), он обнаружил неожиданный эффект неустойчивости индекса при аффинном преобразовании координат. После появления известной статьи В. А. Кондратьева (1967) об эллиптических краевых задачах в областях с коническими точками В. Г. Мазья начал активную работу в этом направлении совместно с Б. А. Пламеневским и позже с В. А. Козловым и Ю. Россманом. В их работах была построена теория краевых задач в областях с кусочно-гладкой границей, включая различные оценки, асимптотические представления решений и теоремы существования. В частности, В. Г. Мазья и Б. А. Пламеневский предложили метод вычисления коэффициентов в асимптотике решений вблизи особенностей

границы, который имеет важные приложения в механике трещин. Эллиптические краевые задачи в областях с точечными особенностями рассмотрены в книгах [5] и [6].

Пространства Соболева в сингулярно возмущенных областях. Если область определения функции зависит от малых или больших параметров таким образом, что предельная область вырождается, то свойства пространств Соболева в этих областях существенно зависят от упомянутых параметров. Точные оценки норм операторов вложения, продолжения и граничного следа в зависимости от сингулярных параметров были получены в работах Владимира Гилелевича и С.В. Поборчег, начиная с 80-х годов. Подобного рода оценки интересны не только сами по себе: они оказываются полезными при обосновании асимптотики решений краевых задач для дифференциальных уравнений в сингулярно возмущенных областях. Результаты теории пространств Соболева в таких областях отражены в книгах [7], [8].

Асимптотическая теория эллиптических краевых задач в сингулярно возмущенных областях. Двухтомная монография [9], авторами которой являются В.Г. Мазья, С.А. Назаров и Б.А. Пламеневский, посвящена нахождению асимптотики решений эллиптических краевых задач в областях с сингулярными малыми возмущениями границы (сглаженные углы, ребра, тонкие полости и т. п.). Монография [10], написанная Владимиром Гилелевичем совместно с В.А. Козловым и А.Б. Мовчаном, посвящена тому же кругу вопросов, касающихся асимптотической теории мультиструктур. Одной из решенных здесь проблем является проблема “гладкой склейки” трехмерных и одномерных элементов упругих тел. В.Г. Мазья и А.Б. Мовчан получили недавно аналог асимптотической формулы Адамара для функций Грина сингулярно возмущенных областей.

Особенности решений нелинейных дифференциальных уравнений. Особенности решений могут возникать как из-за нелинейности, так и из-за негладкости коэффициентов. В.А. Козлов и В.Г. Мазья предложили (1998–2000) метод изучения особенностей решений большого класса краевых задач путем сведения исследования асимптотики решения вблизи точки или на бесконечности к исследованию асимптотического поведения траекторий конечномерной динамической системы. Линейная версия этой теории нашла отражение в книге [11].

Приближенные вычисления. В конце 80-х годов В.Г. Мазья предложил новый способ аппроксимации функций, ориентированный в основном на численное решение операторных уравнений. При этом численный процесс не обязательно сходится, когда параметр аппроксимации стремится к нулю. Основные приложения этого метода связаны с вычислением многомерного объемного потенциала и использованием полуаналитических методов для нелинейных эволюционных уравнений. Особенно эффективным упомянутый метод оказался для решения нелинейных эволюционных уравнений с нелокальными операторами, когда традиционные разностные схемы неприменимы. В.Г. Мазья и Г. Шмидт продолжают развивать теорию таких приближений. Они также предложили вейвлет-разложение, которое оказалось весьма удобным для построения полуаналитических кубатурных формул высокого порядка, используемых при численном решении псевдодифференциальных и интегральных уравнений математической физики. Эти исследования представлены в недавно вышедшей книге [12].

Мультипликаторы в паре пространств гладких функций. В 1979 г. В.Г. Мазья и его супруга Т.О. Шапошникова начали исследования пространств мультипликаторов в различных пространствах дифференцируемых функций. Результаты отражены в их совместной книге [13]. Для мультипликаторов были доказаны теоремы о спектре, о следах и продолжениях, о неявных функциях, получены двусторонние оценки существенной нормы. Были найдены классы отображений, описываемые в терминах

мультипликаторов и сохраняющие пространства Соболева. Было построено исчисление сингулярных интегральных операторов с символами в пространствах мультипликаторов, и были рассмотрены приложения к эллиптическим краевым задачам в областях с негладкой границей. В. Г. Мазья и Т. О. Шапошникова описали максимальные банаховы подалгебры в различных пространствах мультипликаторов (2000), охарактеризовали мультипликаторы в парах пространств Бесова (2004) и следы мультипликаторов в парах весовых пространств Соболева (2005).

Принцип максимума для эллиптических и параболических систем. Начиная с 1984 г., В. Г. Мазья и Г. И. Кресин в ряде статей получили в алгебраических терминах необходимое и достаточное условие справедливости классического принципа максимума модуля для эллиптических и параболических систем второго порядка. В. Г. Мазья и Ю. Россман (1992) показали, что принцип максимума Миранды–Агмона имеет место для сильно эллиптического оператора любого порядка в плоской области с кусочно-гладкой границей без пиков. Подобный результат верен и в трехмерном случае. Однако, начиная с размерности 4, этот принцип нарушается для некоторых областей с коническими точками.

Точечные интерполяционные оценки для производных. Идея получения информации о промежуточных производных в зависимости от свойств производных высших порядков и самой функции является классической. В. Г. Мазья и Т. О. Шапошникова (1999–2002) получили интерполяционные неравенства для производных целого или дробного порядка, в которых роль норм играют значения некоторых операторов (действующих на функцию) в произвольной точке области. Они нашли интересные приложения этих неравенств к оценкам типа Гальярдо–Ниренберга, к операторам в пространствах Соболева дробного порядка, к теории мультипликаторов.

Научная биография Адамара. В течение 12 лет В. Г. Мазья и Т. О. Шапошникова работали над книгой о жизни и творчестве великого французского математика Жака Адамара [14]. Книга содержит уникальную информацию, собранную авторами в многочисленных архивах и библиотеках, а также анализ большого научного наследия Адамара. В 2003 г. Французская академия наук наградила авторов этой книги специальной премией.

Оценки аналитических функций с ограниченной вещественной частью. Точные точечные оценки для аналитических в круге функций, где в качестве мажоранты фигурирует максимум вещественной части функции на границе круга, являются классическим объектом анализа и играют особую роль в теории аналитических функций. Они имеют приложения к аналитической теории чисел и математической физике. В. Г. Мазья и Г. И. Кресин в своей монографии [15] (основанной на совместных исследованиях авторов за последние годы) рассматривают различные неравенства такого типа с единой точки зрения.

Научные интересы Владимира Гилелевича не ограничиваются перечисленными выше. Упомянем еще некоторые из них: аппроксимация аналитическими и гармоническими функциями, задача с косой производной, вырождающиеся эллиптические псевдодифференциальные операторы, теоремы единственности для систем Ламэ с данными на части границы, методы решения плохо поставленных краевых задач. Список можно продолжить.

Нельзя не отметить удивительную работоспособность Владимира Гилелевича, широту и глубину его математических результатов. Мы желаем юбиляру хорошего здоровья и дальнейших достижений.

М. С. Агранович, Ю. Д. Бураго, Б. Р. Вайнберг, М. И. Вишик,
С. Г. Гиндикин, В. А. Кондратьев, В. П. Маслов,
С. В. Поборчий, Ю. Г. Решетняк, В. П. Хавин, М. А. Шубин

Список литературы

- [1] M. S. Agranovich et al., “Vladimir G. Maz’ya. On the occasion of his 65th anniversary”, *Russ. J. Math. Phys.*, **10**:3 (2003), 239–244.
- [2] В. Г. Мазья, *Пространства С.Л. Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985; англ. пер.: V. G. Maz’ya, *Sobolev spaces*, Springer Ser. Soviet Math., Springer, Berlin, 1985.
- [3] I. W. Gelman, W. G. Maz’ya, *Abschätzungen für Differentialoperatoren im Halbraum*, Mathematische Lehrbücher und Monographien. II. Abteilung: Mathematische Monographien, **54**, Akademie-Verlag, Berlin, 1981.
- [4] N. G. Kuznetsov, V. G. Maz’ya, B. R. Vainberg, *Linear water waves. A mathematical approach*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [5] V. A. Kozlov, V. G. Maz’ya, J. Rossmann, *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*, Math. Surveys Monogr., **52**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [6] V. A. Kozlov, V. G. Maz’ya, J. Rossmann, *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations*, Math. Surveys Monogr., **85**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [7] V. G. Maz’ya, S. V. Poborchii, *Differentiable functions on bad domains*, World Scientific, River Edge, NJ, 1997.
- [8] В. Г. Мазья, С. В. Поборчий, *Теоремы вложения и продолжения для функций в нелипшицевых областях*, СПбГУ, 2006.
- [9] W. G. Mazja, S. A. Nazarov, B. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. B. I: Störungen isolierter Randsingularitäten*, Akademie-Verlag, Berlin, 1991; англ. пер.: V. G. Maz’ya, S. A. Nazarov, B. A. Plamenevskii, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. V. I: Perturbations of isolated boundary singularities*, Oper. Theory Adv. Appl., **111**, Birkhäuser, Basel, 2000; B. II: *Nichtlokale Störungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1991; англ. пер.: V. II: *Nonlocal perturbations*, Oper. Theory Adv. Appl., **112**, Birkhäuser, Basel, 2000.
- [10] V. A. Kozlov, V. G. Maz’ya, A. B. Movchan, *Asymptotic analysis of fields in multi-structures*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 1999.
- [11] V. A. Kozlov, V. G. Maz’ya, *Differential equations with operator coefficients with applications to boundary value problems for partial differential equation*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [12] V. Maz’ya, G. Schmidt, *Approximate approximations*, Math. Surveys Monogr., **141**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [13] В. Г. Мазья, Т. О. Шапошникова, *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, ЛГУ, Л., 1986; пер. с англ.: V. G. Maz’ya, Т. О. Shaposhnikova, *Theory of multipliers in spaces of differentiable functions*, Monogr. and Studies in Math., **23**, Pitman, Boston, MA, 1985.
- [14] V. G. Maz’ya, Т. О. Shaposhnikova, *Jacques Hadamard, a universal mathematician*, Hist. Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI; London Math. Soc., London, 1998; франц. пер.: V. G. Maz’ya, Т. О. Shaposhnikova, *Jacques Hadamard, un mathématicien universel*, EDP Sciences, 2005.
- [15] G. Kresin, V. Maz’ya, *Sharp real-part theorems. A unified approach*, Lecture Notes in Math., **1903**, Springer, Berlin, 2007.