Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Белов, А. Л. Чернятьев, Слова медленного роста и перекладывания отрезков, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 1, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:30:25

Слова медленного роста и перекладывания отрезков

А. Я. Белов, А. Л. Чернятьев

Пусть W – сверхслово над конечным алфавитом A . Символ $x \in A$ – *левое* (*правое*) *расширение* v , если xv (соответственно vx) есть подслово W . Подслово v называется *левым* (*правым*) *специальным подсловом*, если для него существуют два или более левых (правых) расширения, и *биспециальным*, если оно и левое, и правое специальное. Количество различных левых (правых) расширений подслова v назовем *левой* (*правой*) *валентностью* в слове W . k -*граф Рози* слова W – это такой граф: его вершины отвечают подсловам длины k слова W , из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в W есть подслово длины $k+1$, у которого первые k символов – подслово, соответствующее A , а последние k символов – подслово, соответствующее B . Правым (левым) специальным словам соответствуют *развилки* вершины, из которых выходит (в которые входит) больше одной стрелки. *Последователем* графа Рози G называется граф $D(G)$: его вершины отвечают ребрам G , из вершины A в вершину B ведет стрелка, если в G конечная вершина ребра A является начальной вершиной ребра B . Последовательность $G_1, G_2, \dots$ назовем *эволюцией графов Рози* данного слова W . При переходе от G_n к G_{n+1} возможны следующие варианты.

1. В графе G_n нет сцепленных циклов (т.е. нет входящих развилок, являющихся одновременно исходящими). В этом случае граф G_{n+1} совпадает с последователем $D(G_n)$.

2. В графе G_n одна развилка является одновременно входящей и выходящей. Граф последователя $D(G_n)$ в этом случае имеет три развилки, так как одна развилка размножилась. Следовательно, граф G_{n+1} получается из последователя $D(G_n)$ путем удаления одного ребра, соответствующего минимальному не встречающемуся слову.

3. В графе есть не менее двух развилок, являющихся одновременно входящими и выходящими. Граф G_{n+1} получается из $D(G_n)$ удалением двух или более ребер, соответствующих минимальным не встречающимся словам.

С отображением $f: M \rightarrow M$ компакта в себя, его разбиением на $U_1, \dots, U_n$ и начальной точкой x_0 связана символическая динамика (см. [1]).

Если точка принадлежит множеству $T^{-n}(U_{i_n}) \cap T^{-(n-1)}(U_{i_{n-1}}) \cap \dots \cap T^{-1}(U_{i_1}) \cap U_{i_0}$, то эволюция начинается со слова $a_{i_0}a_{i_1} \dots a_{i_n}$. I_u – множество разбиений, которое соответствует слову u . Для слова u назовем слово v *левым* (*правым*) *потомком*, если u – суффикс (префикс) слова v , в соответствии с этим будем называть вершину в G_n *левым* (*правым*) *потомком* вершины в G_k , $n > k$. Прообраз конца интервала может являться граничной точкой только для двух интервалов; соответственно, специальные подслова могут иметь валентность только равную 2.

Правило 1. Чтобы слово W порождалось перекладыванием отрезков, необходимо, чтобы при $k \geq k_0$ все k -графы Рози имели развилки только степени 2.

Пусть некоторому подслову w соответствует характеристический интервал, лежащий внутри интервала перекладывания, точка $A \in [0, 1]$ делит I_w на два интервала, образы которых лежат в I_{a_k} и I_{a_l} соответственно, а точка $B \in [0, 1]$ – делит I_w на интервалы, прообразы которых лежат в I_{a_i} и I_{a_j} соответственно. Выбор минимального не встречающегося слова (т.е. удаляемого ребра) определяется взаиморасположением точек A и B , сохранением или сменой ориентации отображения на характеристических множествах, всего 8 вариантов.

Граф Рози G_1 – *размеченный*, если: 1) ребра каждой развилки помечены символами l (“left”) и r (“right”); 2) некоторые вершины помечены символом “–”. *Последователем* G_1 назовем граф, являющийся его последователем как графа Рози, такой, что:

1) ребра, входящие в развилку, помечены теми же символами, что и ребра, входящие в любого левого потомка этой вершины; 2) ребра, выходящие из развилки, помечены теми же символами, что и ребра, выходящие из любого правого потомка этой вершины; 3) если вершина помечена знаком “–”, то все ее правые потомки помечены знаком “–”.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть ребра входящей развилки соответствуют a_i и a_j , символы l и r соответствуют левому и правому множеству в паре $(T(I_{a_i}), T(I_{a_j}))$. Если символы a_k и a_l соответствуют ребрам исходящей развилки, то символы l и r ставятся в соответствии с порядком “лево-право” в паре (I_{a_k}, I_{a_m}) . Знак “–” ставится в вершине, если характеристическое множество, ей соответствующее, принадлежит интервалу перекладывания, на котором меняется ориентация.

Условие для перехода от графа G_n к G_{n+1} :

ПРАВИЛО 2. 1) Если в графе нет двойных развилочек, соответствующих биспециальным подсловам, то при переходе от G_n к G_{n+1} имеем $G_{n+1} = D(G_n)$.

2) Если вершина помечена знаком “–”, то удаляемые ребра должны выбираться из пары ll или rr .

3) В противном случае ребра, соответствующие запрещенным словам, выбираются из пар lr и rl .

Эволюция размеченных графов Рози *правильна*, если правила 1 и 2 выполняются для всей цепочки эволюции графов, начиная с G_1 , и *асимптотически правильна*, если правила 1 и 2 выполняются, начиная с некоторого G_n . Эволюция размеченных графов Рози *ориентирована*, если в k -графах нет вершин, помеченных знаком “–”.

ТЕОРЕМА. *Равномерно-рекуррентное слово W*

1) *порождается перекладыванием отрезков тогда и только тогда, когда W обеспечивается асимптотически правильной эволюцией размеченных графов Рози;*

2) *порождается перекладыванием отрезков с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда W обеспечивается асимптотически правильной ориентированной эволюцией размеченных графов Рози.*

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть эволюция устроена хорошим образом. На первом этапе построим кусочно непрерывное преобразование, которое будет порождать данное слово. Разобьем отрезок на достаточно большое количество интервалов, которые соответствуют буквам алфавита, и будем поэтапно определять образы концевых точек согласованно с эволюцией графов. Далее продолжаем отображение по непрерывности (отметим, что условие согласованности при выборе запрещенного ребра в графах соответствует тому, что отображение имеет конечное число точек разрыва). Имеется инвариантная мера. Рассмотрим топологию, склеивающую точки с нулевым расстоянием, и построим соответствующую фактординамику. Полученное отображение и будет перекладыванием отрезков.

Список литературы

- [1] А.Я. Белов, Г.В. Кондаков, *Фундам. и прикл. матем.*, 1:1 (1995), 71–79.
 [2] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, Encyclopedia Math. Appl., 90, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

А. Я. Белов (A. Ya. Belov)

Московский институт открытого образования
 International University Bremen, Germany
 E-mail: akanel@mail.ru, kanel@mccme.ru

Представлено А. В. Михалёвым

Принято редколлегией
 15.07.2007

А. Л. Чернятьев (A. L. Chernyatiev)

Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: chernyatiev@gmail.com