Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Серебряков, Об индексе дефекта матричных дифференциальных операторов второго порядка, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm913>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:37:39

ОБ ИНДЕКСЕ ДЕФЕКТА МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. П. СЕРЕБРЯКОВ

Рассмотрим матричное дифференциальное выражение

$$l[y] = -\{Q_0(x)y'\}' + Q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty,$$

где

$$Q_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_0(x) \\ q_0(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q(x) \\ q(x) & q_2(x) \end{pmatrix}$$

суть квадратные матрицы второго порядка, элементы $q_0(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q(x)$ которых есть действительнoзначные функции, причем три последние из них и $\{q_0(x)\}^{-1}$ локально суммируемы на полуоси $I = [0, \infty)$, а $y = (y_1(x), y_2(x))^T$ есть двухкомпонентная вектор-функция (τ – символ транспонирования).

Приведенные ниже утверждения дают соответствующие результаты относительно индекса дефекта минимального замкнутого симметрического оператора, порожаемого выражением $l[y]$ в пространстве $L^2(I)$ двухкомпонентных вектор-функций (см. [1], [2], а также литературу, указанную в конце этих работ).

Наряду с выражением $l[y]$ рассмотрим более общее выражение

$$m[y] = -\{P_0(x)y'\}' + P(x)y, \quad 0 \leq x < \infty;$$

здесь $y = (y_1(x), y_2(x))^T$ – двухкомпонентная вектор-функция, $P_0(x)$ и $P(x)$ – квадратные матрицы второго порядка, $P_0(x) = Q_0(x) + iR_0(x)$, $P(x) = Q(x) + iR(x)$,

$$Q_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_0(x) \\ q_0(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad R_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & r_0(x) \\ r_0(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q(x) \\ q(x) & q_2(x) \end{pmatrix}, \quad R(x) = \begin{pmatrix} r_1(x) & r(x) \\ r(x) & r_2(x) \end{pmatrix},$$

причем функции $q_0(x)$, $r_0(x)$, $q(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, $r(x)$, $r_1(x)$, $r_2(x)$ действительнoзначны, последние шесть из них и $\{p_0(x)\}^{-1}$ локально суммируемы на I , где $p_0(x) = q_0(x) + ir_0(x)$.

Каждое из уравнений $l[y] = 0$ и $m[y] = 0$ в силу наложенных на их коэффициенты условий имеет четыре линейно независимых решения. Сформулируем результаты о числе решений из пространства $L^p(I)$ двухкомпонентных вектор-функций этих уравнений. L^p -свойства решений скалярного уравнения Штурма–Лиувилля с действительнoзначным потенциалом при $1 \leq p \leq \infty$ изучались в работе [3] (см. также [4]), а с комплекснозначным потенциалом при $p = 2$ – в [5].

ТЕОРЕМА 1. Пусть существует последовательность попарно непересекающихся конечных интервалов $I_n = (a_n, b_n) \subset I$ ($n = 1, 2, \dots$) такая, что:

- 1) почти всюду на $\bigcup_n I_n$ функция $q_0(x)$ положительна, а функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ либо обе неотрицательны, либо обе неположительны;
- 2) при некотором p , $1 < p < \infty$, $\{q_0(x)\}^{\frac{p}{1-p}}$ суммируема на каждом I_n и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{I_n} \{q_0(x)\}^{\frac{p}{p-1}} dx \right\}^{1-p} \{\sigma(a_n, b_n)\}^{\frac{3p}{2}}$$

расходится, где

$$\sigma(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \{q_0(x)\}^{-1} dx;$$

- 3) имеет место неравенство

$$\int_{I_n} \sigma(a_n, x) \sigma(x, b_n) q_-(x) dx \leq \sigma(a_n, b_n) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $q_-(x) = -\min\{q(x), 0\}$.

Тогда уравнение $l[y] = 0$ имеет решение, не принадлежащее $L^p(I)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть существуют последовательность попарно непересекающихся конечных интервалов $I_n = (a_n, b_n) \subset I$ и последовательность интервалов $I'_n = (a'_n, b'_n) \subset I_n$ ($n = 1, 2, \dots$) такие, что:

- 1) для некоторого действительного α функция $q_0(x) \cos \alpha + r_0(x) \sin \alpha$ положительна почти всюду на $\bigcup_n I_n$ и

$$\int_{a_n}^{a'_n} \rho(x) dx \geq \gamma \int_{I_n} \rho(x) dx, \quad \int_{b'_n}^{b_n} \rho(x) dx \geq \gamma \int_{I_n} \rho(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $\rho(x) = \{q_0(x) \cos \alpha + r_0(x) \sin \alpha\}^{\frac{1}{2}} |p_0(x)|^{-1}$, $\gamma > 0$ — постоянная;

- 2) функция

$$\begin{aligned} \mu(x) = & q(x) \cos \alpha + r(x) \sin \alpha - \frac{1}{2} \{ \{q_1(x)\}^2 + \{q_2(x)\}^2 + \{r_1(x)\}^2 + \{r_2(x)\}^2 \\ & + 2\{q_1(x)q_2(x) - r_1(x)r_2(x)\} \cos 2\alpha + 2\{q_1(x)r_2(x) + q_2(x)r_1(x)\} \sin 2\alpha \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

неотрицательна почти всюду на $\bigcup_n I_n$ и для некоторого p , $2 \leq p < \infty$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)^{1-\frac{p}{2}} \left\{ \int_{I_n} \rho(x) dx \right\}^p \left\{ \exp \left(\theta \int_{I'_n} \rho(x) \{\mu(x)\}^{\frac{1}{2}} dx \right) - 1 \right\}^{\frac{p}{2}}$$

расходится при некоторой постоянной θ , $0 < \theta < 1$.

Тогда уравнение $m[y] = 0$ имеет не более двух линейно независимых решений из $L^p(I)$.

Из теоремы 2 легко получается

СЛЕДСТВИЕ (ср. с [4], [6], [7]). Пусть $q_0(x) > 0$ или $q_0(x) < 0$ почти всюду на I и уравнение $l[y] = \lambda y$, где λ — постоянное комплексное число, имеет более двух линейно независимых решений из $L^p(I)$ при некотором p , $2 \leq p < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $E \subset I$ положительной лебеговой меры меньше ε и локально суммируемая на I функция $q_E(x)$ такие, что $q_E(x) = q(x)$ при $x \in I \setminus E$, и если в $l[y]$ заменить $q(x)$ на $q_E(x)$ (не изменяя других коэффициентов), уравнение $l[y] = \lambda y$ будет иметь не более двух линейно независимых решений из $L^p(I)$; если функция $q(x)$ удовлетворяет каким-либо условиям гладкости, то функцию $q_E(x)$ можно также выбрать из этого класса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Серебряков В. П. // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1992. № 6. С. 7–9. [2] Серебряков В. П. // Изв. вузов. Математика. 1995. № 3. С. 45–50. [3] Мирзоев К. А. // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 4. С. 77–82. [4] Мирзоев К. А. // Функци. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. № 1. С. 80–83. [5] Read T. T. // Lect. Notes in Math. 1983. V. 1032. P. 407–426. [6] Eastham M. S. P., Thompson M. L. // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1973. V. 24. № 96. P. 531–535. [7] Исмагилов Р. С. // УМН. 1963. Т. 18. № 5. С. 161–166.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
03.09.1997