Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Сидельников, С. П. Струнков, О некоторых арифметических свойствах орбитных кодов в пространстве матриц, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm914>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:31:35

О НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОРБИТНЫХ КОДОВ В ПРОСТРАНСТВЕ МАТРИЦ

В. М. Сидельников, С. П. Струнков

Пусть G – конечная группа ортогональных (или унитарных) матриц размера $n \times n$ и x – вектор евклидова (или эрмитова) пространства V , на котором естественным образом действует группа G , причем норма $\|x\| = 1$. Орбита Gx вектора x называется орбитным кодом (или групповым кодом) $K(G, x)$ [1]. Орбитные коды широко используются при передаче сигналов по каналам связи с шумами. Множество расстояний D кода $K(G, x)$ – это множество всех попарно различных неотрицательных чисел $\|g'x - g''x\|$, $g', g'' \in G$. Спектром расстояний кода $K(G, x)$ с множеством расстояний $D = \{d_0 = 0, d_1, \dots, d_k\}$ называется множество чисел $S = \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$, в котором каждое число s_i , $0 \leq i \leq k$, равно числу таких элементов gx орбиты Gx , расстояние от которых до вектора x равно числу d_i . Так как группа G действует транзитивно на своей орбите, то это определение вполне согласуется с классическим [3]. Спектр и множество расстояний кода являются его основными параметрами, поэтому задача исследования связей между ними для различных кодов является одной из важнейших в теории кодирования.

Мы рассматриваем здесь орбитные коды

$$K(G, A) = \{gA; g \in G\},$$

в матричном пространстве $W \supset G$ [2], где $A = (a_{i,j}) \in W$ – произвольная вещественная (комплексная) матрица размера $n \times n$ с евклидовой (соответственно эрмитовой) нормой

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2} = 1.$$

Заметим, что орбитные коды, определенные выше, получаются как частный случай орбитных кодов в матричном пространстве, если в качестве матрицы A взять такую матрицу, в которой коэффициенты первого столбца совпадают с координатами вектора x , а все остальные элементы равны нулю. Универсальным в некотором смысле орбитным кодом является код $K(G, \frac{1}{\sqrt{n}}E)$, где E – единичная матрица. Поэтому свойства этого кода интересны в первую очередь. Расстояния в нем и элементы спектра расстояний имеют следующие арифметические связи.

ТЕОРЕМА. Пусть $D = \{d_0 = 0, d_1, \dots, d_k\}$ – множество расстояний и $S = \{s_0 = 1, s_1, \dots, s_k\}$ – спектр орбитного кода $K(G, \frac{1}{\sqrt{n}}E)$, где E – единичная матрица. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Число

$$N_0 = n^k \prod_{i=1}^k d_i^2$$

является целым рациональным и при этом делится на порядок $|G|$ группы G . Если следы $\text{tr}(g)$ вещественны для всех $g \in G$, то число $N_0/2^k$ также является целым рациональным и также делится на $|G|$.

2. Числа

$$N_j = \frac{1}{|G|} s_j n^k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k (d_i^2 - d_j^2)$$

для всех j , $1 \leq j \leq k$, являются целыми алгебраическими. Если следы $\text{tr}(g)$ вещественны для всех $g \in G$, то все числа $N_j/2^k$ также являются целыми алгебраическими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Slepian D. // Bell Syst. Tech. J. Apr. 1968. V. 47. P. 575–602. [2] Sidelnikov V. M., Strunkov S. P., Klyachko A. A. // Proceedings of Fifth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory (1–7 June 1996, Sozopol, Bulgaria): Shumen, 1996. P. 256–258. [3] Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Московский государственный инженерно-физический институт

Принято редколлегией
03.09.1997