Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Нгуен Мань Хунг, Первая начально-краевая задача для гиперболических систем в негладких областях, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm916>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 05:53:26

ПЕРВАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В НЕГЛАДКИХ ОБЛАСТЯХ

НГУЕН МАНЬ ХУНГ

В работе рассматривается первая начально-краевая задача для гиперболических систем в области $Q_T = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T)\}$, где Ω – ограниченная область из $\mathbb{R}^n$. Такая задача была рассмотрена Г. Фикера [1] для систем с C^∞ -коэффициентами, которые не зависят от t .

В настоящей работе эти задачи изучаются в случае комплексных коэффициентов, зависящих как от x так и от t . Установлены теоремы существования и единственности решения. Эти теоремы были рассмотрены О. А. Ладыженской [3] при несколько более сильных предположениях о коэффициентах. Основными результатами работы являются теоремы о гладкости обобщенных решений по времени. С помощью полученных теорем рассматривается нестационарная начально-первая граничная задача равновесия в теории упругости.

Введем следующие обозначения:

$H_m(\Omega)$ – гильбертово пространство комплексных r -мерных вектор-функций, имеющих обобщенные производные до порядка m включительно внутри Ω такие, что

$$\|u\|_{m,\Omega}^2 = \sum_{0 \leq |p| \leq m} \int_{\Omega} |D^p u|^2 dx < +\infty, \quad D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}, \quad |p| = p_1 + \dots + p_n.$$

$H_{m,1}(Q_T)$ – гильбертово пространство комплексных r -мерных вектор-функций таких, что u из $L_2(Q_T)$ и существуют обобщенные производные $u_t, D^p u, 0 \leq |p| \leq m$ из $L_2(Q_T)$ с нормой

$$\|u\|_{m,1,Q_T}^2 = \sum_{0 \leq |p| \leq m} \int_{Q_T} |D^p u|^2 dx dt + \int_{Q_T} |u_t|^2 dx dt.$$

$H_{m,1}^0(Q_T)$ – подпространство $H_{m,1}(Q_T)$, плотным множеством в котором являются гладкие функции, равные нулю вблизи $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$.

Положим

$$(1) \quad L(x, t, D) \equiv \sum_{|p|, |q|=1}^m D^p a_{pq}(x, t) D^q + \sum_{|p|=1}^m a_p(x, t) D^p + a(x, t),$$

где a_{pq}, a_p, a ($1 \leq |p|, |q| \leq m$) – ограниченные измеримые комплексные матрицы размера $r \times r$. Оператор L называется *сильно эллиптическим* в области Q_T , если

$$(2) \quad \operatorname{Re} \left[\sum_{|p|=|q|=m} a_{pq}(x, t) \xi^p \xi^q \eta \eta \right] > p_0 |\xi|^{2m} |\eta|^2 \quad (p_0 = \text{const} > 0)$$

при всякой точке $(x, t) \in Q_T$, для любого действительного n -мерного вектора ξ , отличного от нуля, и для любого комплексного r -мерного вектора η , отличного от нуля.

В цилиндре Q_T мы будем исследовать задачу

$$(3) \quad (-1)^{m-1} L u - u_{tt} = f,$$

$$(4) \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \Big|_{S_T} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, m-1),$$

где L – оператор в (1), ν – нормаль к S_T , направленная вне Q_T .

Назовем *обобщенным решением* из $H_{m,1}(Q_T)$ задачи (3)–(4) функцию $u(x, t)$, принадлежащую $H_{m,1}^0(Q_T)$, равную нулю при $t = 0$ такую, что

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left[u_t \bar{\eta}_t + \sum_{|p|, |q|=1}^m (-1)^{m-1+|p|} a_{pq} D^q u \overline{D^p \eta} + (-1)^{m-1} \left(\sum_{|p|=1}^m a_p D^p u + a u \right) \bar{\eta} \right] dx dt \\ = \int_{Q_T} f \bar{\eta} dx dt \quad \forall \eta \in H_{m,1}^0(Q_T), \quad \eta(x, T) = 0. \end{aligned}$$

Для $u, v \in H_{m,1}(Q_T)$ положим $B(u, v)(t) = \sum_{|p|, |q|=1}^m (-1)^{|p|} \int_{\Omega} a_{pq}(x, t) D^q u \overline{D^p v} dx$. Предположим, что $\overline{a}_{pq} \equiv (-1)^{|p|+|q|} a_{pq}$. Тогда $\overline{B(v, v)}(t) = B(v, v)(t) \quad \forall t \in [0, T]$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор L удовлетворяет условиям: (i) $\left| \frac{\partial a_{pq}}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial a_p}{\partial t} \right| \leq \mu$ в Q_T ($\mu > 0, 1 \leq |p|, |q| \leq m$); (ii) $(-1)^m B(v, v)(t) \geq \mu_0 \|v(x, t)\|_{m, \Omega}^2$ ($\mu_0 > 0$) для любой $v(x, t) \in H_{m,1}^0(Q_T)$.

Тогда задача (3)–(4) может иметь не более одного обобщенного решения из $H_{m,1}(Q_T)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условию (ii) теоремы 1 и следующему условию: $\left| \frac{\partial a_{pq}}{\partial t} \right| \leq \mu$ в Q_T ($\mu > 0, 1 \leq |p|, |q| \leq m$).

Тогда задача (3)–(4) имеет обобщенное решение из $H_{m,1}(Q_T) \quad \forall f \in L_2(Q_T)$ и справедливо неравенство $\|u\|_{m,1,Q_T} \leq C \|f\|_{L_2(Q_T)}, C = \text{const} > 0$.

Для доказательства теоремы 2 используем метод Галеркина [2] и теорему 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (ii) теоремы 1 и (i) $\left| \frac{\partial^{k+|p|} a_{pq}}{\partial t^k \partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} \right| < \mu$ в Q_T ($\mu = \text{const}, 1 \leq |p|, |q| \leq m, k < h-1$); (ii) $f_{tk} \in L_2(Q_T)$ ($k \leq h$), $f_{tk}(x, 0) = 0$ ($k \leq h-1$).

Тогда обобщенное решение задачи (3)–(4) имеет производные по t до h -порядка включительно из $H_{m,1}(Q_T)$ и справедливо неравенство $\|u_{th}\|_{m,1,Q_T}^2 \leq C \sum_{k=0}^h \|f_{tk}\|_{L_2(Q_T)}^2, C = \text{const} > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = 0$ утверждение теоремы следует из теоремы 2. В общем случае теорема может быть получена индукцией по h .

Рассмотрим в цилиндре Q_T следующую задачу теории упругости:

$$(5) \quad \sum_{k,h,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_h} \left[a_{ih}^{jk}(x, t) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$(6) \quad u_i|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad u_i|_{S_T} = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

где a_{ik}^{jh} – ограниченные измеримые действительные функции, удовлетворяющие $a_{ih}^{jk} \equiv a_{jk}^{ih} \equiv a_{hi}^{kj} \equiv a_{ih}^{kj}$. Положим

$$e_{ih} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right), \quad W(x, t, e) = \sum_{i,j,h,k=1}^n \frac{1}{2} a_{ih}^{jk} e_{ih} e_{jk}.$$

Предполагается, что упругий потенциал $W(x, t, e)$ является положительно определенной квадратичной формой относительно $n(n+1)/2$ переменных e_{ih} ($1 \leq i \leq h \leq n$). Из первого неравенства Корна мы имеем теоремы существования и единственности обобщенного решения, а также теоремы о гладкости обобщенного решения по переменной t для задачи (5)–(6).

Выражаю глубокую благодарность профессору В. А. Кондратьеву за помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. [2] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Мир, 1973. [3] Ладыженская О. А. // Матем. сб. 1958. Т. 45 (87). № 2. С. 123–158.