Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Скурихин, Об одном классе категорных топологических пространств, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 1, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9160>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:04:48

Об одном классе категорных топологических пространств

Е. Е. Скурихин

Категорное топологическое пространство – это обобщенный объект произвольного сайта Гротендика вместе со структурой его подобъектов [1], [2]. Результаты работы [3] мы применяем к случаю, когда сайт является нижней полурешеткой, а топология Гротендика задается единственным семейством. Определяются длины Чу-пространства и устанавливаются их связи с кохомологическими размерностями, в том числе с вьлой. Дается кохомологическая характеристика размерности нётерова пространства и значит алгебраического многообразия.

Пусть K – $\wedge$ -полурешетка, $\alpha = \{a_i \in K \mid i \in I\}$ – семейство элементов, τ – топология Гротендика на K . Если K имеет нуль 0, то топология Гротендика τ' определяется так: $\tau'(a) = \tau(a)$, если $a \neq 0$, и $\tau'(0) = \tau(0) \cup \{\emptyset\}$. Определим для всякого $a \in K$ класс семейств $\tau_\alpha(a)$, полагая для $\beta = \{b_j \in K \mid j \in J\}$: $\beta \in \tau_\alpha(a)$ тогда и только тогда, когда $\beta \in \tau(a)$ и $\alpha \wedge a < \beta$. Легко видеть, что τ_α – топология Гротендика на K . Будем в индексах писать μ вместо τ'_α .

Зафиксируем $\gamma = \{c_l \in K \mid l \in L\}$ и введем следующие обозначения: K_1 – множество всех подпредпучков предпучка множеств 1 такого, что $1(a)$ – одноэлементное множество для любого $a \in K$; $\mathcal{U} = \{\gamma_M \wedge a \mid M \subset K, a \in K\}$, где $\gamma_M = \{c_l \in K \mid l \in M\}$; если δ – семейство элементов K , то $\tilde{\delta} \in K_1$ – предпучок множеств, для которого δ является μ -покрытием; $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{\delta} \mid \delta \in \mathcal{U}\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть δ – семейство элементов K , $\delta < \alpha$.

1) Если $\mathcal{A}$ – абелев предпучок и $\mathcal{A}(0) = 0$, то для любого $n \geq 0$ $\check{H}_\mu^n(\tilde{\delta}, \mathcal{A}) = H_\mu^n(\tilde{\delta}, S_\mu(\mathcal{A})) = H^n(\delta, \mathcal{A}) = \lim^{(n)}(\mathcal{A} \mid R_\delta)$, где справа стоит n -й производный функтор обратного предела ограничения абелева предпучка $\mathcal{A}$ на решето $R_\delta \subset K$, порожденное семейством δ . Здесь $S_\mu(\mathcal{A})$ обозначает μ -пучок, порожденный $\mathcal{A}$, $\check{H}_\mu^n$ и H_μ^n – кохомологии Чеха и Гротендика соответственно.

2) Если кратность δ не превышает k , то для любого μ -пучка $\mathcal{A}$ $H_\mu^m(\tilde{\delta}, \mathcal{A}) = 0$ при $m \geq k$.

Назовем μ -пучок $\mathcal{A}$ $\mathcal{U}$ -вьялым, если для любого $\delta \in \mathcal{U}$ отображение $H^0(\gamma, \mathcal{A}) \rightarrow H^0(\delta, \mathcal{A})$ является эпиморфизмом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\gamma < \alpha$.

1) Если $\mathcal{A}$ есть $\mathcal{U}$ -вьялый μ -пучок, $C = \tilde{\gamma}$, то для любого $B \in \tilde{\mathcal{U}}$ и любого $n \geq 1$ $H_\mu^n(C, \mathcal{A}) = H_\mu^n(B, \mathcal{A}) = H_\mu^n(C, B, \mathcal{A}) = 0$.

2) Если кратность γ не превышает $n + 1$, то любой абелев μ -пучок имеет вьялую резольвенту длины $\leq n + 1$.

Тройка $\mathcal{X} = (X, Y, r: X \times Y \rightarrow \{0, 1\})$, где X, Y – множества и r – отображение, называется Чу-пространством [4], [5]. Определим множества $X_y \subset X$ и $Y_x \subset Y$, полагая $x \in X_y \Leftrightarrow y \in Y_x \Leftrightarrow r(x, y) = 1$. Длиной семейства $\{x_i \in X \mid i \in I\}$ назовем супремум по $y \in Y$ мощностей множеств $\{i \in I \mid x_i \in X_y\}$. Симметрично определяется длина семейства элементов Y .левой длиной $lL\mathcal{X}$ назовем длину X , а правой $rL\mathcal{X}$ – длину Y . Через τ будем обозначать канонические топологии Гротендика на упорядоченных по включению множествах $S(X)$ и $S(Y)$ всех подмножеств соответственно X и Y . Это означает, что семейство множеств является τ -покрытием некоторого множества A тогда и только тогда, когда его объединение равно A . Пусть $\alpha = \{X_y \mid y \in Y\}$, $\beta = \{Y_x \mid x \in X\}$. Обозначим: $\tau_1 = \tau'_\alpha$, $\tau_r = \tau'_\beta$ – соответственно левая и правая топологии на $\mathcal{X}$, $H_1^n(\mathcal{X}, \mathcal{A}) = H_\mu^n(X, \mathcal{A})$, $H_r^n(\mathcal{X}, \mathcal{A}) = H_\mu^n(Y, \mathcal{B})$ – соответственно левые и правые кохомологии Гротендика $\mathcal{X}$ с коэффициентами в μ -пучке $\mathcal{A}$, соответственно $\mathcal{B}$, где $\mu = \tau'_\alpha$, соответственно $\mu = \tau'_\beta$.

Отметим, что длина семейства $\{x_i \in X \mid i \in I\}$ равна кратности семейства $\{Y_{x_i} \subset Y \mid i \in I\}$. Поэтому следующий результат получается из сформулированных выше общих результатов.

Если γ – семейство подмножеств X , то через γ_X обозначаем семейство, получаемое из γ добавлением всех одноточечных подмножеств X , не входящих в объединение γ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{X} = (X, Y, r: X \times Y \rightarrow \{0, 1\})$ – Чу-пространство.

1) Если $\mathcal{A}$ – абелев предпучок на $S(X)$, $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$ и $S_I(\mathcal{A})$ обозначает τ_1 -пучок, порожденный $\mathcal{A}$, то для любого $n \geq 0$ $H^n(\mathcal{X}, S_I(\mathcal{A})) = H^n(\alpha_X, \mathcal{A})$.

2) Если $\text{ll}\mathcal{X} \leq n$ и $\mathcal{B}$ – τ_r -пучок, то для любого $k > n$ $H_r^k(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = 0$ и $\mathcal{B}$ имеет r -взлупую резольвенту длины $\leq n$. Здесь r -взлупость означает $\mathcal{U}$ -взлупость, где $\mathcal{U}$ строится по семейству $\gamma = \beta$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{X} = (X, \mathcal{M}, r: X \times \mathcal{M} \rightarrow \{0, 1\})$ – Чу-пространство, где X – множество, $\mathcal{M}$ – некоторое множество его непустых подмножеств, отображение r задается равенством $r(x, A) = 1 \Leftrightarrow x \in A$. Тогда $\text{ll}\mathcal{X}$ равняется супремуму мощностей элементов $\mathcal{M}$. Предположим, что условия $A \in \mathcal{M}$ и $B \subset A$ влекут $B \in \mathcal{M}$. Тогда если $\text{ll}\mathcal{X} = n$, то имеется абелев τ_r -пучок $\mathcal{A}$ такой, что $H_r^n(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – нётерово топологическое пространство, $\mathcal{X} = (I(X), \mathcal{M}, r: I(X) \times \mathcal{M} \rightarrow \{0, 1\})$ – Чу-пространство, где $I(X)$ – множество всех замкнутых неприводимых подмножеств X , $\mathcal{M}$ – множество линейно упорядоченных по включению подмножеств $I(X)$, $r(A, M) = 1 \Leftrightarrow A \in M$. Тогда размерность X равна правой когомологической размерности $\mathcal{X}$, т. е. максимальному n такому, что $H_r^n(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \neq 0$ для некоторого τ_r -пучка $\mathcal{A}$. В частности, это так, если X – алгебраическое многообразие.

Пусть $\mathcal{X} = (X, Y, r: X \times Y \rightarrow \{0, 1\})$ и $\mathcal{X}' = (X', Y', r': X' \times Y' \rightarrow \{0, 1\})$ – Чу-пространства. Морфизмом $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}'$ называется пара отображений $(f: X \rightarrow X', g: Y' \rightarrow Y)$ такая, что для любых x и y' $r'(f(x), y') = r(x, g(y'))$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть (f, g) – морфизм Чу-пространств, $\alpha' = \{X'_{y'} \mid y' \in Y'\}$, $\beta = \{Y_x \mid x \in X\}$.

1) Для любого абелева предпучка $\mathcal{A}$ на $S(X)$ такого, что $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$, существует спектральная последовательность со вторым членом $E_2^{pq} = H_1^p(\mathcal{X}', \mathcal{E}_f^q(\mathcal{A}))$, сходящаяся к $H^*(f^{-1}(\alpha')_X, \mathcal{A})$, где предпучок $\mathcal{E}_f^q(\mathcal{A})$ на $S(X')$ задается равенством

$$\mathcal{E}_f^q(\mathcal{A})(C) = H^q(f^{-1}(\alpha')_X \wedge f^{-1}(C), \mathcal{A}) = H^q(f^{-1}(\alpha')_X \wedge f^{-1}(C), S_I(\mathcal{A})).$$

2) Для любого абелева предпучка $\mathcal{B}$ на $S(Y')$ такого, что $\mathcal{B}(\emptyset) = 0$, существует спектральная последовательность со вторым членом $E_2^{pq} = H_r^p(\mathcal{X}, \mathcal{E}_g^q(\mathcal{B}))$, сходящаяся к $H^*(g^{-1}(\beta)'_Y, \mathcal{B})$, где предпучок $\mathcal{E}_g^q(\mathcal{B})$ на $S(Y)$ задается равенством

$$\mathcal{E}_g^q(\mathcal{B})(C) = H^q(g^{-1}(\beta)'_Y \wedge g^{-1}(C), \mathcal{B}) = H^q(g^{-1}(\beta)'_Y \wedge g^{-1}(C), S_r(\mathcal{B})).$$

Список литературы

- [1] Е. Е. Скурихин, *Топология и ее приложения*, Тр. междунар. топологической конф. (Баку, 1987), Тр. МИАН, **193**, Наука, М., 1992, 169–173. [2] Е. Е. Скурихин, *Дискретная геометрия и геометрия чисел*, Тр. МИАН, **239**, Наука, М., 2002, 289–317. [3] Е. Е. Скурихин, *Пучки на нормальных и паракомпактных решетках*, Дальнаука, Владивосток, 1998. [4] Barr M., **-autonomous categories*, Lecture Notes in Math., **752**, Springer, Berlin, 1979. [5] Е. Е. Скурихин, А. Г. Сухонос, *Дальневост. мат. журн.*, **6**:1–2 (2005), 14–22.