Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Чалых, Дуальность обобщенных задач Калоджеро и Рудженаарса, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm917>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:16:58

ДУАЛЬНОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ ЗАДАЧ КАЛОДЖЕРО И РУДЖЕНААРСА

О. А. ЧАЛЫХ

Рассмотрим квантовую задачу Калоджеро–Мозера–Сазерленда [1], [2], соответствующий оператор Шрёдингера в $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$(1) \quad \mathcal{H} = -\Delta + \sum_{i < j} \frac{1}{2} m(m+1) \omega^2 \operatorname{sh}^{-2} \frac{\omega}{2} (x_i - x_j),$$

где Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, m и ω – произвольные параметры. В работе [3] А.П. Веселовым, К.Л. Стыркасом и автором было показано, что для натуральных значений m оператор (1) обладает собственной функцией $\psi(k, x)$ ($k \in \mathbb{R}^n$ – спектральный параметр) вида $\psi = P(k, x) \exp(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)$, где P – многочлен по k . При этом функция ψ однозначно определяется следующими аналитическими свойствами:

- (А) старшие члены многочлена P имеют вид $\prod_{i < j} (k_i - k_j)^m$;
- (Б) для каждого вектора $\alpha \in \mathbb{R}^n$ вида $\alpha = \frac{\omega}{2}(e_i - e_j)$ и $s = 1, \dots, m$
 $\psi(k - s\alpha, x) = \psi(k + s\alpha, x)$ при $(\alpha, k) = 0$.

Наличие такой ψ -функции, которую естественно называть многомерной функцией Бейкера–Ахизера в соответствии с традицией, идущей от работ И.М. Кричевера [4], позволяет построить коммутативное кольцо дифференциальных операторов, содержащее оператор (1) и изоморфное кольцу $\mathcal{R}$ многочленов $f(k)$, обладающих свойством (Б): $f(k - s\alpha) = f(k + s\alpha)$ при $(\alpha, k) = 0$ для всех $s = 1, \dots, m$ (см. [3]). При этом ψ является общей собственной функцией этого кольца.

Оказывается, $\psi(k, x)$ как функция спектрального параметра является общей собственной функцией коммутативного кольца *разностных* операторов, а именно, рациональных операторов Рудженаарса [5]. Система Рудженаарса, являющаяся разностным аналогом системы Калоджеро, образована n коммутирующими операторами $D_1, \dots, D_n$, простейший из которых $D = D_1$ имеет вид

$$(2) \quad D = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \left(1 - \frac{m\omega}{k_i - k_j} \right) T_i^\omega,$$

где T_i^ω – оператор сдвига, действующий на функцию $f(k)$ по формуле $(T_i^\omega f)(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n) = f(k_1, \dots, k_i + \omega, \dots, k_n)$. (Формулы для $D_2, \dots, D_n$ для тригонометрического случая см. в работе [6], рациональный предел отвечает $\alpha \rightarrow 0$.)

ТЕОРЕМА 1. *Многомерная функция Бейкера–Ахизера $\psi(k, x)$, определяемая условиями (А)–(Б), является собственной для рациональных операторов Рудженаарса $D_1, \dots, D_n$. При этом $D_i \psi = \lambda_i(x) \psi$, где $\lambda_i(x)$ есть i -я элементарная симметрическая функция от $e^{\omega x_1}, \dots, e^{\omega x_n}$.*

Таким образом, рациональная система Рудженаарса является биспектрально дуальной в смысле Дюйстермата–Грюнбаума [7] для тригонометрической задачи Калоджеро. Отметим, что, как нетрудно вывести из теоремы 1, такая дуальность имеет место для произвольного (не обязательно целого) m в том смысле, что собственная функция задачи (1) при подходящей нормировке является собственной для задачи (2). В простейшем случае $n = 2$ это было отмечено Рудженаарсом [8], им же высказывалось предположение, что подобное утверждение справедливо для всех n .

Рассмотрим теперь деформацию квантовой задачи Калоджеро–Мозера, предложенную в работе [9], соответствующий оператор Шрёдингера в $\mathbb{R}^{n+1}$ имеет вид

$$(3) \quad \widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(m+1)}{2} \omega^2 \operatorname{sh}^{-2} \frac{\omega}{2} (x_i - \sqrt{m} x_{n+1}),$$

где $\mathcal{H}$ – оператор (1), m и ω – произвольные параметры. Как отмечено в работе [9], оператор (3) является интегрируемым при всех m и алгебраически интегрируемым при целых m . (Заметим,

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-01404) и INTAS (грант № 93-166-ext).

что при $m = 1$ задача (3) сводится к специальному случаю задачи (1).) Соответствующая целым значениям m функция Бейкера–Ахиезера имеет вид $\psi = P(k, x) \exp(k_1 x_1 + \dots + k_{n+1} x_{n+1})$, P – многочлен по k , и однозначно определена следующими аналитическими свойствами:

(А1) старшие члены многочлена P имеют вид $\prod_{i < j} (k_i - k_j)^m \prod_{i=1}^n (k_i - \sqrt{m} k_{n+1})$;

(Б1) для $\alpha = \frac{\omega}{2}(e_i - \sqrt{m} e_{n+1})$ выполняется $\psi(k - \alpha, x) = \psi(k + \alpha, x)$ при $(\alpha, k) = 0$, а для $\alpha = \frac{\omega}{2}(e_i - e_j)$, $1 \leq i < j \leq n$, выполнены условия (Б).

Как и в случае задачи (1), ψ является общей собственной функцией коммутативного кольца дифференциальных операторов (по x), содержащего оператор (3) и изоморфного кольцу $\hat{\mathcal{R}}$ многочленов $f(k)$, удовлетворяющих условиям (Б1). Чтобы описать дуальную систему разностных операторов по k , рассмотрим следующую деформацию оператора Рудженаарса (2):

$$(4) \quad \hat{D} = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\omega}{k_i - \sqrt{m} k_{n+1} + \gamma} \right) \prod_{j \neq i} \left(1 - \frac{m\omega}{k_i - k_j} \right) T_i^\omega + m^{-1} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{m\omega}{k_i - \sqrt{m} k_{n+1} + \gamma} \right) T_{n+1}^{\sqrt{m}\omega}.$$

Здесь T_i^ω имеют тот же смысл, что и в формуле (2), $\gamma = (1 - m)\omega/2$. Введем также следующие многочлены $f_j = (k_1)^j + \dots + (k_n)^j + p_j(k_{n+1})$, где $p_j(t)$ однозначно определяется для всех $m \neq 0$ и $j = 1, 2, \dots$ из тождества $p_j(t + \sqrt{m}\omega) - p_j(t) = (\sqrt{m}t + (m+1)\omega/2)^j - (\sqrt{m}t + (m-1)\omega/2)^j$ и условия $p_j(0) = 0$. Смысл тождества в том, что оно обеспечивает выполнение условий (Б1) для многочлена f_j .

Рассмотрим разностные операторы $\hat{D}_j = \frac{1}{j!\omega^j} (\text{ad}_{\hat{D}})^j [f_j]$, $j = 2, \dots, n+1$, где $\hat{D}$ – оператор (4), f_j понимается как оператор умножения на функцию, а $(\text{ad}_{\hat{D}})^j$ означает многократное применение операции ad : $\text{ad}_A B = AB - BA$.

ТЕОРЕМА 2. Разностные операторы $\hat{D}_1 = \hat{D}, \hat{D}_2, \dots, \hat{D}_{n+1}$ коммутируют для любого m . Для $m \in \mathbb{Z}_+$ функция Бейкера–Ахиезера $\psi(k, x)$ задачи (3), определяемая условиями (А1)–(Б1), является собственной для операторов $\hat{D}_1, \dots, \hat{D}_{n+1}$. При этом $\hat{D}_j \psi = \lambda_j(x) \psi$, где $\lambda_j(x) = e^{j\omega x_1} + \dots + e^{j\omega x_n} + \frac{1}{m} e^{j\sqrt{m}\omega x_{n+1}}$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Из теоремы 2 так же, как и для задачи (1), можно заключить, что системы (3) и (4) дуальны для произвольного (не обязательно целого) m .

2. Можно показать, что операторы (2) и (4) являются алгебраически интегрируемыми при целых m в смысле [3].

3. С помощью оператора (2) можно указать следующую явную формулу для ψ -функции задачи Калоджеро (1): $\psi(k, x) = C(x)(D - \lambda)^M [A(k) \exp(k, x)]$, где $\lambda = e^{\omega x_1} + \dots + e^{\omega x_n}$, оператор $(D - \lambda)^M$ применяется к выражению в квадратных скобках, $M = mn(n-1)/2$, $A(k)$ – многочлен вида $\prod_{i < j} \prod_{s=1}^m [(k_i - k_j)^2 - s^2 \omega^2]$, $C^{-1}(x) = M! \prod_{i < j} (e^{\omega x_i} - e^{\omega x_j})^m$. Аналогичная формула справедлива и для задачи (3). Эти формулы являются разностным аналогом формул, полученных Ю. Ю. Берестом в случае $\omega = 0$.

Большая часть данной работы была выполнена во время моего пребывания в университете Paris-XII (IUT, Fontainebleau) в июне 1997 г. Я глубоко признателен моим коллегам за гостеприимство. Я также хотел бы поблагодарить А. П. Веселова и Ю. Ю. Береста за чрезвычайно полезные обсуждения и советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Calogero F. // J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 419–436. [2] Sutherland B. // Phys. Rev. A (5). 1972. P. 1372–1376. [3] Веселов А. П., Стыркас К. Л., Чалых О. А. // ТМФ. 1993. Т. 94. №2. С. 253–275. [4] Кричевер И. М. // УМН. 1977. Т. 32. №6. С. 198–245. [5] Ruijsenaars S. N. M. // Comm. Math. Phys. 1987. V. 110. P. 191–213. [6] van Diejen J. F. // Compositio Math. 1995. V. 95. P. 183–233. [7] Duistermaat J., Grunbaum F. A. // Comm. Math. Phys. 1986. V. 103. P. 177–240. [8] Ruijsenaars S. N. M. // Integrable and superintegrable systems / ed. B. Kupershmidt. Singapore: World Scientific, 1990. P. 165–206. [9] Веселов А. П., Фейгин М. В., Чалых О. А. // УМН. 1996. Т. 51. №3. С. 185–186.