Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Комаров, Локальная управляемость в типичных двупараметрических семействах бидинамических систем на плоскости, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 2, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 10:57:05

Локальная управляемость в типичных двухпараметрических семействах бидинамических систем на плоскости

М. А. Комаров

Полидинамическая система на гладком (класса C^∞) многообразии задается конечным набором гладких полей скоростей. Управление такой системой представляет собой выбор в последовательные моменты времени одного из полей для дальнейшего движения.

Полидинамическая система называется *локально управляемой* в точке P многообразия, если существует время $T > 0$ такое, что для любой окрестности U этой точки найдется меньшая окрестность $V \subset U$, через каждую точку p которой можно провести кусочно гладкую замкнутую кривую (цикл), целиком лежащую в U , проходящую через P и состоящую из отрезков фазовых кривых полей системы, соответствующих некоторому управлению, причем время движения по циклу меньше T .

Для плоскости случаи локальной управляемости типичных полидинамических систем и бидинамических систем типичного однопараметрического семейства были изучены в [1] и [2] соответственно (*типичными* мы называем объекты из некоторого открытого всюду плотного множества в пространстве объектов, снабженном тонкой гладкой топологией, а *бидинамической* – полидинамическую систему с двумя полями скоростей). В настоящей работе представлены все возможные случаи локальной управляемости бидинамических систем типичного двухпараметрического семейства на плоскости.

Понятно, что локальная управляемость сохраняется при переходе к семейству, *гладко эквивалентному* данному, т.е. получаемому диффеоморфизмами фазового пространства, гладко зависящими от параметров, и диффеоморфизмами пространства параметров. Поскольку в точке с локальной управляемостью одно из полей обязательно ненулевое, анализ случаев сводится к изучению семейства вида

$$\{v = (0, 1); w = (w_1, w_2)\}, \quad (1)$$

в котором первое поле выпрямлено [3] вдоль второй координаты. Далее, известно, что если в некоторой точке оба поля ненулевые и фазовая кривая одного касается фазовой кривой другого с конечным порядком, то локальная управляемость в этой точке есть тогда и только тогда, когда поля в ней противоположно направлены, а порядок касания их фазовых кривых нечетный (для типичного двухпараметрического семейства этот порядок не превосходит 4). Таким образом, остается изучить локальную управляемость систем типичного семейства (1) в точке, особой для второго поля. Обозначим через $D(w)$ дискриминант характеристического многочлена матрицы w_* линеаризации поля w в этой точке.

ТЕОРЕМА. В особой точке поля w система из типичного двухпараметрического семейства (1) обладает локальной управляемостью, если и только если или

F) $D(w) < 0$, или

L) семейство (1) в этой точке гладко эквивалентно семейству $\{(0, 1); (Ay, w_2)\}$ в нуле, где $A(0, 0) \neq 0$, $dw_2(0, 0) = 0$, $(w_2)_{xx}(0, 0) < 0$,

и не обладает локальной управляемостью, если и только если или

NF) $D(w) > 0$, или

NJ) w_* определяет жорданов узел, или

NL) семейство (1) в этой точке гладко эквивалентно семейству $\{(0, 1); (Ay, w_2)\}$ в нуле, где $A(0, 0) \neq 0$, $dw_2(0, 0) = 0$, $(w_2)_{xx}(0, 0) > 0$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Обозначения **F**) и **L**) мотивированы тем, что линеаризация второго поля системы в случае **F**) определяет фокус или центр, а в случае **L**) – расслоение плоскости на параллельные прямые. Случаи **L**) и **NL**), равно как и случай одновременного обращения полей в нуль, не встречаются у систем типичного однопараметрического семейства.

2. Перечисленные в теореме случаи исключают друг друга и являются инвариантами семейства (1) относительно гладкой эквивалентности. Они связаны, хотя и опосредованно, с инвариантами семейства двумерных аффинных управляемых систем с одним входом и неограниченным управлением, полученными (для одномерного параметра) в работах [4] и [5].

Схема доказательства теоремы представлена ниже в определителе случаев со следующими обозначениями: P – изучаемая точка, которую мы принимаем за начало координат; $\Rightarrow$ – “следует”; $\mapsto n$ – переход на позицию n ; $\rightsquigarrow n$ – переход на позицию n , сопровождаемый гладким преобразованием семейства, сохраняющим первое поле выпрямленным.

- 1) $w(P) = 0 \Rightarrow$ одно из двух: $(w_1)_y(P) \neq 0 \rightsquigarrow 2$,
 $(w_1)_y(P) = 0 \mapsto 10$;
- 2) $w = [A(x, y, \varepsilon)y, w_2]$ с $A(P) \neq 0 \Rightarrow$ одно из двух: $(w_2)_y(P) \neq 0 \mapsto 3$,
 $(w_2)_y(P) = 0 \mapsto 6$;
- 3) $w = [A(x, y, \varepsilon)y, B(x, y, \varepsilon)(y + b(x, \varepsilon))]$ с $(AB)(P) \neq 0 = b(P) \mapsto 4$;
- 4) одно из двух: $D(w) = 0 \Rightarrow (\text{NJ})$,
 $D(w) \neq 0 \mapsto 5$;
- 5) одно из двух: $D(w) < 0 \Rightarrow (\text{F})$,
 $D(w) > 0 \Rightarrow (\text{NF})$;
- 6) одно из двух: $(w_2)_x(P) \neq 0 \mapsto 7$,
 $(w_2)_x(P) = 0 \Rightarrow (w_2)_{xx}(P) \neq 0 \rightsquigarrow 8$;
- 7) $w = [A(x, y, \varepsilon)y, B(x, y, \varepsilon)(x + b(y, \varepsilon))]$ с $(AB)(P) \neq 0 = b(P) = b_y(P) \mapsto 5$;
- 8) $w = [A(x, y, \varepsilon)y, B(x, y, \varepsilon)(y^2 + a(x, \varepsilon)y \pm x^2 + \varepsilon_1)]$ с $a(P) = 0 \neq (AB)(P) \mapsto 9$;
- 9) одно из двух: $(w_2)_{xx}(P) < 0 \Rightarrow (\text{L})$,
 $(w_2)_{xx}(P) > 0 \Rightarrow (\text{NL})$;
- 10) одно из двух: $(w_1)_x(P) \neq 0 \mapsto 11$,
 $(w_1)_x(P) = 0 \Rightarrow (w_1)_{yy}(P) \neq 0 \rightsquigarrow 14$;
- 11) $w = [A(x, y, \varepsilon)(x + a(y, \varepsilon)), w_2]$ с $A(P) \neq 0 = a_y(P) \Rightarrow$ одно из двух:
 $(w_2)_y(P) \neq 0 \mapsto 12$,
 $(w_2)_y(P) = 0 \neq (w_2)_x(P) \Rightarrow (\text{NF})$;
- 12) $w = [A(x, y, \varepsilon)(x + a(y, \varepsilon)), B(x, y, \varepsilon)(y + b(x, \varepsilon))]$ с $(AB)(P) \neq 0 = b(P) \Rightarrow$ одно из двух:
 $A(P) \neq B(P) \Rightarrow (\text{NF})$,
 $A(P) = B(P) \Rightarrow (w_2)_x(P) \neq 0 \rightsquigarrow 13$;
- 13) $w = [A(x, y, \varepsilon)(x + a(y, \varepsilon)), B(x, y, \varepsilon)(y + c(x, \varepsilon)x)]$ с $(ABc)(P) \neq 0 = a(P) = a_y(P) \Rightarrow (\text{NJ})$;
- 14) $w = [A(x, y, \varepsilon)(y^2 + g(x, \varepsilon)), w_2]$ с $g(P) = g_x(P) = 0 \neq (A(w_2)_y)(P) \Rightarrow (\text{NF})$.

Список литературы

- [1] A. A. Davydov, *Qualitative theory of control systems*, Transl. Math. Monogr., **141**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. [2] L. Azevedo, *Transitividade local de sistemas polidinamicos*, Master Thesis, Departamento de Matemática Aplicada, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006. [3] В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, 4-е изд., РХД, Ижевск, 2000. [4] B. Jakubczyk, W. Respondek, *SIAM J. Control Optim.*, **44**:6 (2006), 2038–2062. [5] M. W. Rupniewski, *J. Dyn. Control Syst.*, **13**:1 (2007), 135–159.