Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Л. Гуревич, О несуществовании полугрупп Феллера в нетрансверсальном случае, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 3, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:44:30

О несуществовании полугрупп Феллера в нетрансверсальном случае

П. Л. Гуревич

В теории марковских процессов возникает вопрос существования сильно непрерывной сжимающей неотрицательной полугруппы (полугруппы Феллера) операторов, действующих в пространствах непрерывных функций. Полугруппы Феллера описывают (с вероятностной точки зрения) движение марковской частицы в области. Общий вид генератора такой полугруппы на интервале был исследован в [1]. В многомерном случае было доказано, что генератором полугруппы Феллера является эллиптический дифференциальный оператор (возможно, с вырождением), область определения которого состоит из непрерывных функций, удовлетворяющих нелокальным условиям, которые содержат интеграл по замыканию области относительно неотрицательной борелевской меры [2]. Обратная задача остается нерешенной. Пусть задан эллиптический интегро-дифференциальный оператор, область определения которого описывается нелокальными условиями; будет ли замыкание этого оператора генератором полугруппы Феллера? В трансверсальном случае порядок нелокальных членов меньше порядка локальных [3]–[7], в более сложном нетрансверсальном случае эти порядки совпадают [7] (см. также библиографию в [7]).

В [8] был построен пример нелокального оператора (содержащего преобразование, отображающее границу в себя), замыкание которого не является генератором полугруппы Феллера. Мы строим три примера несуществования полугрупп Феллера в тех случаях, когда преобразования $\Omega(y)$ (в *нетрансверсальных* нелокальных условиях) отображают границу внутрь области. Для любого y на границе упомянутая борелевская мера есть дельта-функция с носителем в точке $\Omega(y)$ из замыкания области. Отметим, что в первом и втором примерах нарушены условия 3.3 и 3.6 из [7], а в третьем примере – условия 3.5 и 3.9 из [7].

1. “Скачки” с ненулевой вероятностью за пределы окрестности точек завершения процесса. Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \mathcal{K}$, где Γ_1 и Γ_2 – кривые класса C^∞ , открытые и связные в топологии ∂G , $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ и $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} = \mathcal{K}$; множество $\mathcal{K}$ состоит из двух точек g_1 и g_2 . Считаем, что область G совпадает с плоским углом раствора π в некоторой ε -окрестности $\mathcal{O}_\varepsilon(g_i)$ точки g_i , $i = 1, 2$.

Рассмотрим нелокальные условия

$$u(y) - b_1(y)u(\Omega_1(y)) = 0, \quad y \in \Gamma_1; \quad u(y) = 0, \quad y \in \overline{\Gamma_2}, \quad (1)$$

где $b_1 \in C^\infty(\overline{\Gamma_1})$, $0 \leq b_1(y) \leq 1$, $b_1(y) = b_1^* > 0$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(g_1)$, $b_1(y) = 0$ при $y \notin \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$, Ω_1 – гладкое невырожденное преобразование, заданное в окрестности кривой $\overline{\Gamma_1}$, $\Omega_1(\Gamma_1) \subset G$, $\Omega_1(g_1) \in G$ и $\Omega_1(y)$ есть композиция поворота вокруг g_1 и сдвига на некоторый вектор при $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$. С вероятностной точки зрения условие Дирихле означает, что марковская частица поглощается (процесс завершается), как только она попадает в точку $y \in \Gamma_2$; нелокальное условие означает, что через некоторое случайное время частица “перепрыгивает” из точки $y \in \Gamma_1$ в точку $\Omega_1(y) \in G$ с вероятностью $b_1(y)$.

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P}_1: D(\mathbf{P}_1) \subset C_1(\overline{G}) \rightarrow C_1(\overline{G})$, заданный формулой

$$\mathbf{P}_1 u = \Delta u, \quad u \in D(\mathbf{P}_1) = \{u \in C_1(\overline{G}) : \Delta u \in C_1(\overline{G})\},$$

где $C_1(\overline{G})$ – множество функций из $C(\overline{G})$, удовлетворяющих условиям (1), Δ – оператор Лапласа, действующий в смысле теории обобщенных функций.

2. “Скачки” из точек сопряжения, не являющихся точками завершения процесса. Рассмотрим нелокальные условия

$$u(y) - b_1(y)u(\Omega_1(y)) = 0, \quad y \in \overline{\Gamma_1}; \quad u(y) - b_2(y)u(\Omega_2(y)) = 0, \quad y \in \Gamma_2, \quad (2)$$

где $b_j \in C^\infty(\overline{\Gamma_j})$, $0 \leq b_j(y) \leq 1$, $b_j(y) = \text{const} > 0$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(g_1)$, $b_j(y) = 0$ при $y \notin \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$, Ω_j – гладкое невырожденное преобразование, заданное в окрестности кривой $\overline{\Gamma_j}$, $\Omega_j(\Gamma_j) \subset G$, $\Omega_j(g_1) \in G$, $\Omega_1(g_1) \neq \Omega_2(g_1)$ и $\Omega_j(y)$ есть композиция поворота вокруг точки g_1 и сдвига на некоторый вектор при $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$.

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P}_2: D(\mathbf{P}_2) \subset C_2(\overline{G}) \rightarrow C_2(\overline{G})$, заданный формулой

$$\mathbf{P}_2 u = \Delta u, \quad u \in D(\mathbf{P}_2) = \{u \in C_2(\overline{G}) : \Delta u \in C_2(\overline{G})\},$$

где $C_2(\overline{G})$ – множество функций из $C(\overline{G})$, удовлетворяющих нелокальным условиям (2).

3. “Скачки” с вероятностью единица внутри окрестности точек завершения процесса. Рассмотрим нелокальные условия

$$u(y) - b_j(y)u(\Omega_j(y)) = 0, \quad y \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2; \quad u(y) = 0, \quad y \in \mathcal{K}, \quad (3)$$

где $b_j \in C^\infty(\overline{\Gamma_j})$, $0 \leq b_j(y) \leq 1$, $b_j(y) = 1$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(g_1)$, $b_j(y) = 0$ при $y \notin \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$, Ω_j – гладкое невырожденное преобразование, заданное в окрестности кривой $\overline{\Gamma_j}$, $\Omega_j(\Gamma_j) \subset G$, $\Omega_j(g_1) = g_1$ и $\Omega_j(y)$ есть поворот на угол $\pi/2$ внутрь области G при $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$.

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P}_3: D(\mathbf{P}_3) \subset C_3(\overline{G}) \rightarrow C_3(\overline{G})$, заданный формулой

$$\mathbf{P}_3 u = \Delta u, \quad u \in D(\mathbf{P}_3) = \{u \in C_3(\overline{G}) : \Delta u \in C_3(\overline{G})\},$$

где $C_3(\overline{G})$ – множество функций из $C(\overline{G})$, удовлетворяющих нелокальным условиям (3).

ТЕОРЕМА 1. Операторы $\mathbf{P}_j$ допускают замыкание $\overline{\mathbf{P}}_j: D(\overline{\mathbf{P}}_j) \subset C_j(\overline{G}) \rightarrow C_j(\overline{G})$ ($j = 1, 2, 3$). Операторы $\overline{\mathbf{P}}_j$ ($j = 1, 2, 3$) не являются генераторами полугруппы Феллера.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно доказать, что $C_j(\overline{G}) \setminus \overline{\mathcal{R}(\mathbf{P}_j - q\mathbf{I})} \neq \emptyset$ при достаточно малых $q > 0$. Следовательно, $C_j(\overline{G}) \setminus \mathcal{R}(\overline{\mathbf{P}}_j - q\mathbf{I}) \neq \emptyset$. Отсюда и из теоремы Хилле–Йосиды получаем теорему 1.

Автор выражает благодарность А. Л. Скубачевскому за внимание к работе.

Список литературы

- [1] W. Feller, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **77**:1 (1954), 1–31. [2] А. Д. Вентцель, *Теория вероятн. и ее примен.*, **4**:2 (1959), 172–185; англ. пер.: A. D. Ventcel', *Theory Probab. Appl.*, **4** (1960), 164–177. [3] K. Sato, T. Ueno, *J. Math. Kyoto Univ.*, **4** (1965), 529–605. [4] J.-M. Bony, P. Courrège, P. Priouret, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **18**:2 (1968), 369–521. [5] K. Taira, *Interaction between functional analysis, harmonic analysis, and probability* (Columbia, MO, 1994), *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, **175**, Dekker, New York, 1996, 421–439. [6] Y. Ishikawa, *J. Math. Soc. Japan*, **42**:1 (1990), 171–184. [7] E. I. Galakhov, A. L. Skubachevskii, *J. Differential Equations*, **176**:2 (2001), 315–355. [8] A. L. Skubachevskii, *Russian J. Math. Phys.*, **3**:3 (1995), 327–360.

П. Л. Гуревич (P. L. Gurevich)
Российский университет дружбы народов
E-mail: gurevichp@gmail.com

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
24.01.2008