Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Х. Салихов, О мере иррациональности числа π , *УМН*, 2008, том 63, выпуск 3, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:29:23

О мере иррациональности числа π

В. Х. Салихов

В 1953 г. К. Малер [1] получил первую оценку снизу порядка приближения числа π рациональными дробями: $|\pi - p/q| \geq q^{-30}$ для всех $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq q_0$.

Позднее этот результат был улучшен: М. Миньотт [2] заменил показатель 30 на 20, а Г. Чудновский [3] – на 19.8899944... В ряде работ М. Хата [4]–[6] снизил этот показатель до 8.016045... Целью данной работы является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Для всех $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq q_0$, выполняется неравенство

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| \geq q^{-\nu}, \quad \text{где } \nu = 7.6063 \dots \quad (1)$$

Улучшение результата М. Хата связано с рассмотрением интеграла:

$$J \equiv \int_{4-2i}^{4+2i} R(x) dx, \quad (2)$$

$$R(x) = \frac{(x-4+2i)^{3n}(x-4-2i)^{3n}(x-5)^{3n}(x-6+2i)^{3n}(x-6-2i)^{3n}}{x^{5n+1}(10-x)^{5n+1}},$$

где n – четно, $n \rightarrow +\infty$, путь интегрирования от $4-2i$ до $4+2i$ проходит через точки перевала x_1 и x_2 (которые мы укажем ниже) и точку $x_3 = 5$.

Перейдем к доказательству сформулированной теоремы. Очевидно, что $R(x) \in \mathbb{Q}(x)$, и ввиду четности n выполняется равенство $R(10-x) = R(x)$. Поэтому разложение $R(x)$ в сумму простейших дробей можно представить в следующем виде:

$$R(x) = P(x) + \sum_{j=0}^{5n} \left(\frac{a_j}{x^{j+1}} + \frac{a_j}{(10-x)^{j+1}} \right), \quad P(x) = \sum_{\nu=1}^{5n-1} b_\nu x^{\nu-1}, \quad (3)$$

где все $a_j \in \mathbb{Q}$, все $b_\nu \in \mathbb{Z}$.

Имеем из (2) и (3)

$$\varepsilon'_n \equiv \frac{1}{i} J = \frac{1}{2} a_0 \pi + r_1 + r_2, \quad a_0, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}. \quad (4)$$

Для вычисления асимптотики ε'_n и a_0 при $n \rightarrow \infty$ используется метод перевала, применяемый к интегралам J и $a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} R(x) dx$. Сначала вычислим знаменатель рациональных чисел a_0 , r_1 и r_2 .

Обозначим

$$d(m) = \frac{(3n)!}{(3n-m)!m!}, \quad m = 0, 1, \dots, 3n; \quad d'(m) = \frac{(5n+m)!}{m!(5n)!}, \quad m \in \mathbb{Z}^+.$$

Пусть для $s = 0, 1, \dots, 5n$

$$M_s = \{\bar{m} = (m_1, \dots, m_6) \mid \text{все } m_r \in \mathbb{Z}^+; m_r \leq 3n, r = 1, \dots, 5; m_1 + \dots + m_6 = 5n - s\}.$$

Пусть, наконец, $K = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ – кольцо гауссовых чисел, и для $N \in \mathbb{Z}^+$ пусть $\theta_N = \{N/2\}$ – дробная доля числа $N/2$. Из (3) несложно получить представление вида

$$a_j = 5^{-n-1+j} 2^{2.5n-2+1.5j-\theta_j} A_j, \quad A_j \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

$$A_j = \sum_{\bar{m} \in M_j} \gamma(\bar{m}) \rho(\bar{m}), \quad \rho(\bar{m}) \in K, \quad \gamma(\bar{m}) = d(m_1) \cdots d(m_5) d'(m_6).$$

Следующая лемма является аналогом леммы 2.2 работы [6].

ЛЕММА 1. Пусть p – простое число, $T_n = \{p > \sqrt{5n} \mid 1/3 \leq \{n/p\} < 2/5\}$,

$$\Lambda_1(n) = \prod_{p \leq \sqrt{5n}} p^{\lfloor \log 5n / \log p \rfloor}, \quad \Lambda_2(n) = \prod_{\sqrt{5n} < p \leq 5n} p, \quad \Lambda_3(n) = \prod_{p \in T_n} p,$$

$\Delta_n = \Lambda_1(n)\Lambda_2(n)/\Lambda_3(n)$. Тогда для всех $j \in \{1, \dots, 5n\}$, $\overline{m} \in M_j \cup M_{j+1}$ справедливо $(\Delta_n \gamma(\overline{m}))/j \in \mathbb{N}$.

Применяя эту лемму и равенства (3), (5), получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $Q_n = 5^{n+1} 2^{-2.5n+3} \Delta_n$. Тогда все $Q_n a_0/2$, $Q_n r_1$, $Q_n r_2 \in \mathbb{Z}$.

Имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln Q_n = 5 - (\psi(2/5) - \psi(1/3)) + \ln 5 - 2.5 \ln 2 \equiv \chi$, $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$.

Завершение доказательства оценки (1) проходит точно по схеме доказательства теоремы 1.2 из [6], поэтому ограничимся лишь некоторыми комментариями.

Обозначим (см. (2))

$$\frac{(x-4+2i)^3(x-4-2i)^3(x-5)^3(x-6+2i)^3(x-6-2i)^3}{x^5(10-x)^5} \equiv g(t) = \frac{(t^2+6t+25)^3 t^{1.5}}{(25-t)^5},$$

где $t = (x-5)^2$. Точки перевала функции $g(t)$ являются корнями уравнения

$$\frac{1.5}{t} + \frac{3(2t+6)}{t^2+6t+25} - \frac{5}{t-25} = 0, \quad \text{или} \quad t^3 - 76.2t^2 - 305t - 375 = 0,$$

и суть $t_{1,2} = -1.933883 \dots \pm i0.971403 \dots$, $t_3 = 80.067767 \dots$.

Участвующие в (2) точки $x_{1,2}$ имеют вид $x_{1,2} = 5 + \sqrt{t_{1,2}}$, где $\operatorname{Re} \sqrt{t_{1,2}} < 0$, т. е.

$$x_1 = 5 - 0.339310 \dots - i1.431438 \dots, \quad x_2 = 5 - 0.339310 \dots + i1.431438 \dots$$

Применяя для линейной формы $\varepsilon_n \equiv Q_n \varepsilon'_n$ (см. (4)) замечание 2.1 из [6], получим, что неравенство (1) выполняется для любого

$$\nu > 1 - \frac{\chi + \ln |g(t_3)|}{\chi + \ln |g(t_1)|} = 7.60630852 \dots,$$

и теорема доказана.

Автор выражает благодарность В.В. Зудилину и Ю.В. Нестеренко за полезные замечания.

Список литературы

- [1] K. Mahler, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, **56** (1953), 30–42. [2] M. Mignotte, *Bull. Soc. Math. France*, **37** (1974), 121–132. [3] G.V. Chudnovsky, *Lecture Notes in Math.*, **925**, Springer, Berlin, 1982, 299–322. [4] M. Hata, *J. Reine Angew. Math.*, **407** (1990), 99–125. [5] M. Hata, *J. Number Theory*, **43:1** (1993), 51–67. [6] M. Hata, *Acta Arith.*, **63:4** (1993), 335–349.

В. Х. Салихов (V. Kh. Salikhov)

Брянский государственный
технический университет
E-mail: svdh@rambler.ru

Представлено А.В. Михалёвым

Принято редколлегией
24.01.2008