Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Немировский, Конечные объединения шаров
в $\mathbb{C}^n$ рационально выпуклы, *УМН*, 2008, том 63, вы-
пуск 2, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9176>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 11:36:31

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Конечные объединения шаров в $\mathbb{C}^n$ рационально выпуклы

С. Ю. Немировский

1. Компакт $K \subset \mathbb{C}^n$ называется *полиномиально выпуклым*, если для всякой точки $z \notin K$ найдется многочлен P , для которого $|P(z)| > \max_{\xi \in K} |P(\xi)|$. Заменяя здесь многочлены рациональными функциями, получаем определение *рационально выпуклого* компакта. Эти понятия представляют интерес, в частности, поскольку любую функцию, голоморфную в окрестности полиномиально (соответственно рационально) выпуклого компакта, можно равномерно на этом компакте приблизить многочленами (соответственно рациональными функциями).

До сих пор открыт вопрос, является ли полиномиально выпуклым конечное объединение непересекающихся замкнутых шаров в $\mathbb{C}^n$. Известно только, что ответ положителен для не более чем трех шаров [1]. В настоящей заметке показывается, что *рациональная* выпуклость любого такого объединения практически сразу следует из результатов Ж. Дюваля и Н. Сибони [2].

ТЕОРЕМА. *Конечное объединение непересекающихся замкнутых шаров в $\mathbb{C}^n$ рационально выпукло.*

Отметим, что из построения примеров в работах [1] и [3] и принципа аргумента следует, что это утверждение не имеет места для полидисков и комплексных эллипсоидов в $\mathbb{C}^3$.

2. Напомним сначала, что, по теореме 1.1 из работы [2], *если ω — это неотрицательная d -замкнутая $(1,1)$ -форма в $\mathbb{C}^n$, причем множество $\mathbb{C}^n \setminus \text{supp } \omega$ относительно компактно в $\mathbb{C}^n$, то для любого $s > 0$ рационально выпукло множество $\{z \in \mathbb{C}^n \mid \text{dist}(z, \text{supp } \omega) \geq s\}$* . Нам понадобится такое следствие из этого утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть φ — строго плюрисубгармоническая функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^n$, причем ее форма Леви $dd^c \varphi$ продолжается до положительной d -замкнутой $(1,1)$ -формы на всем пространстве $\mathbb{C}^n$. Если множество $K_\varphi = \{z \in U \mid \varphi(z) \leq 0\}$ компактно, то оно рационально выпукло.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим гладкую выпуклую неубывающую функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $f'(t) \equiv 0$ при $t \leq \varepsilon$, $f'(t) > 0$ при $\varepsilon < t < 2\varepsilon$ и $f'(t) \equiv 1$ при $t \geq 2\varepsilon$. Заметим, что

$$dd^c f(\varphi) = f'(\varphi) dd^c \varphi + f''(\varphi) d\varphi \wedge d^c \varphi \geq f'(\varphi) dd^c \varphi.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00981), программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-9429.2006.1), программы “Современные проблемы теоретической математики” РАН и проекта SFB/TR 12 Немецкого исследовательского общества.

Значит, если положить

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} dd^c \varphi & \text{на } \mathbb{C}^n \setminus \{\varphi \leq 2\varepsilon\}, \\ dd^c f(\varphi) & \text{на } \{\varphi \leq 2\varepsilon\}, \end{cases}$$

то форма ω_ε удовлетворяет условиям теоремы Дюваля–Сибони, а ее носитель $\text{supp } \omega_\varepsilon$ есть в точности $\mathbb{C}^n \setminus \{\varphi < \varepsilon\}$. Поскольку числа ε и $s = s(\varepsilon)$ могут быть выбраны сколь угодно малыми, компакт K_φ является пересечением рационально выпуклых множеств и, следовательно, сам должен быть рационально выпуклым.

Замечания. 1. Из других содержащихся в работе [2] результатов следует, что всякий рационально выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$ имеет фундаментальную систему окрестностей вида $\{\varphi < 0\}$, где функция φ удовлетворяет условиям предложения.

2. Для сравнения заметим, что компакт $K \subset \mathbb{C}^n$ является полиномиально выпуклым тогда и только тогда, когда у него найдется фундаментальная система окрестностей вида $\{\varphi < 0\}$, где теперь функция φ должна быть исчерпывающей строго плюрисубгармонической функцией на всем $\mathbb{C}^n$.

3. Теперь мы можем доказать теорему. Пусть $\bar{B}(a_j, r_j) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z - a_j\|^2 \leq r_j^2\}$, $j = 1, \dots, N$, — набор попарно непересекающихся замкнутых шаров. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы шары $B(a_j, r_j + \delta)$ также попарно не пересекались, и в объединении этих шаров рассмотрим функцию φ , равную

$$\varphi_j(z) = \|z - a_j\|^2 - r_j^2$$

в шаре $B(a_j, r_j + \delta)$. Тогда $K_\varphi = \bigsqcup \bar{B}(a_j, r_j)$, а форма Леви имеет вид

$$dd^c \varphi = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k,$$

т.е. продолжается до стандартной плоской кэлеровой формы в $\mathbb{C}^n$. Значит, компакт $\bigsqcup \bar{B}(a_j, r_j)$ является рационально выпуклым по доказанному в п. 2 предложению.

Список литературы

- [1] E. Kallin, *Proc. Conf. Complex Analysis* (Minneapolis, 1964), Springer, Berlin, 1965, 301–304. [2] J. Duval, N. Sibony, *Duke Math. J.*, **79**:2 (1995), 487–513. [3] А. М. Кытманов, Г. Худайберганов, *Сиб. матем. журн.*, **25**:5 (1984), 196–198.

С. Ю. Немировский (S. Yu. Nemirovski)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Ruhr-Universität Bochum, Germany
E-mail: stefan@mi.ras.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
Принято редколлегией
24.01.2008