Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Б. Шапиро, Об универсальных топологических алгебрах типа Валдивиа, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 3, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9177>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:47:53

Об универсальных топологических алгебрах типа Валдивиа

Л. Б. Шапиро

В заметке рассматривается вопрос о том, когда подалгебра прямого произведения универсальных топологических алгебр имеет структуру произведения “более простых” сомножителей. В первой части приводятся необходимые определения и основные результаты для конкретных случаев. Во второй части описывается наиболее общий, с точки зрения автора, подход к поставленному выше вопросу.

1. Согласно теореме Чейза [1], для любой области главных идеалов (о.г.и.) R , наделенной дискретной топологией, замкнутый подмодуль R^ω изоморфен¹ степени R . Ранее Нунке [2] установил аналогичный факт для $\mathbb{Z}$. Нашей целью является обобщение теоремы Нунке–Чейза на несчетный случай. Для этого, по аналогии с компактами Валдивиа [3], мы вводим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\{(X_i, x_i^*) : i \in I\}$ – семейство (несчетное) топологических пространств с отмеченными точками $x_i^* \in X_i$. Подпространство $Y \subset \prod \{X_i : i \in I\}$ имеет тип Валдивиа, если $\{y = \{y_i\} \in Y : |\{i : y_i \neq x_i^*\}| \leq \omega\}$ всюду плотно в Y , т.е. след, который Σ -произведение $\{X_i : i \in I\}$ (см., например, [3]) “оставляет” на Y , плотен в нем. Для алгебраических структур (колец, тел, алгебр) отмеченной точкой считается нейтральный элемент.

Следующие два результата являются основными.

ТЕОРЕМА 1. Пусть R – область главных идеалов, наделенная дискретной топологией. Тогда замкнутый подмодуль (над R) типа Валдивиа несчетной степени R^τ изоморфен степени R .

ТЕОРЕМА 2. Пусть K – полное недискретное нормированное² тело. Тогда замкнутое линейное подпространство (над K) типа Валдивиа несчетной степени K^τ изоморфно степени K .

Доказательства приведенных теорем проходят по общей схеме и основаны на следующих четырех леммах.

ЛЕММА 1. Пусть E, F – конечнопорожденные модули над о.г.и. (п.н.н. телом) и $f : E \rightarrow F$ – алгебраический гомоморфизм. Тогда f – тривиальное расслоение со слоем $\text{Ker } f$.

Доказательство леммы 1 для случая о.г.и. можно найти в [4] (гл. XV, § 2, лемма 1), а для случая п.н.н. тела – в [5] (гл. I, § 2, п. 3, предложение 3). Из леммы 1 с помощью спектральной аппроксимации получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Замкнутый подмодуль счетной степени о.г.и. (п.н.н. тела) E изоморфен степени E .

ЛЕММА 2. Пусть E – о.г.и. (п.н.н. тело). Тогда E^ω удовлетворяет следующим свойствам:

- а) любой подмодуль E^ω топологически счетнопорожден, т.е. существует счетное подмножество, алгебраически порождающее всюду плотную часть;
- б) любая возрастающая по типу ω_1 цепочка замкнутых подмодулей стабилизируется.

¹Под изоморфизмом тополого-алгебраических объектов понимается алгебраический изоморфизм, который одновременно является гомеоморфизмом.

²Далее используется аббревиатура п.н.н.

Как обычно, для отображения $f: X \rightarrow X$ подмножество $Y \subset X$ называется f -инвариантным, если $f(Y) \subset Y$. Для семейства пространств с отмеченными точками $\{(X_i, x_i^*) : i \in I\}$ и подмножества $J \subset I$ естественная проекция-ретракция $\text{pr}_J: \sum\{X_i : i \in I\} \rightarrow \sum\{X_i : i \in J\}$ определяется так: i -я координата точки $\text{pr}_J(x)$ совпадает с x_i , если $i \in J$, и равна x_i^* , если $i \notin J$.

Следующая лемма возникла в результате знакомства с работами [6], [7].

ЛЕММА 3. Пусть E – о.г.и. (п.н.н. тело) и M – замкнутый подмодуль Σ -произведения несчетного числа экземпляров E , заиндексированных множеством I . Тогда для любого счетного подмножества $J \subset I$ существует счетное подмножество $J' \subset J$ такое, что M является $\text{pr}_{J'}$ -инвариантным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Следуя [8], группоид с нейтральным элементом, в котором каждый элемент обратим, будем называть саморефлексивным в слабом смысле.

Важную роль в доказательствах играет простая

ЛЕММА 4. Пусть G_1, G_2, H – группоиды, саморефлексивные в слабом смысле, причем $H \leq G_1 \times G_2$ и H является pr_1 -инвариантным подмножеством, где $\text{pr}_1: G_1 \times G_2 \rightarrow G_1 \times G_2$ определено равенством $\text{pr}_1(g_1, g_2) = (g_1, e_2)$. Тогда $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 \leq G_1$ и $H_2 \leq G_2$.

2. Анализ доказательств теорем 1, 2 приводит к мысли о введении общих понятий в рамках теории универсальных топологических алгебр [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Универсальную алгебру назовем алгеброй Бэра, если она является укрупнением (см. [10; с. 84]) саморефлексивного в слабом смысле группоида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Универсальная топологическая алгебра называется ω_1 -топологически нётеровой, если любая ее подалгебра топологически счетнопорождена или, эквивалентно, любая возрастающая по типу ω_1 цепочка замкнутых подалгебр стабилизируется.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{(A_i, \Omega) : i \in I\}$ – несчетное семейство топологических алгебр Бэра одной сигнатуры, каждое конечное подпроизведение ω_1 -топологически нётерово и B – замкнутая подалгебра типа Валдивиа произведения $(\prod\{A_i : i \in I\}, \Omega)$. Тогда существуют $\{I_t : t \in T\}$ -разбиение I на счетные попарно дизъюнктные множества и замкнутые подалгебры $B_t \leq \prod\{A_i : i \in I_t\}$ такие, что $B = \prod\{B_t : t \in T\}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\{G_i : i \in I\}$ – несчетное семейство топологических групп со второй аксиомой счетности и H – замкнутая подгруппа типа Валдивиа произведения $\prod\{G_i : i \in I\}$. Тогда H изоморфна произведению групп со второй аксиомой счетности.

Автор выражает благодарность В. Марчишевскому за полезную консультацию и А. П. Комбарову за дружескую поддержку, без которой эта работа вряд ли была бы выполнена.

Список литературы

- [1] S. U. Chase, *Illinois J. Math.*, **7** (1963), 593–608. [2] R. J. Nunke, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13**:1 (1962), 66–71. [3] O. Kalenda, *Collect. Math.*, **51**:1 (2000), 59–81. [4] С. Ленг, *Алгебра*, Мир, М., 1968. [5] Н. Бурбаки, *Топологические векторные пространства*, ИЛ, М., 1959. [6] А. П. Комбаров, В. И. Мальхин, *Докл. АН СССР*, **213** (1973), 774–776. [7] С. П. Гулько, *Докл. АН СССР*, **237**:3 (1977), 505–508. [8] R. Baer, *Amer. J. Math.*, **71**:3 (1949), 706–742. [9] А. И. Мальцев, *Матем. сб.*, **35**:1 (1954), 3–20. [10] P. M. Cohn, *Universal algebra*, Harper & Row, New York–London, 1965.

Л. Б. Шапиро (L. B. Shapiro)

Академия труда и социальных отношений

E-mail: lshapiro@mcme.ru

Представлено С. М. Гусейн-Заде

Принято редколлегией

24.01.2008