Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Балаба, Индуцируемость антиизоморфизмов колец эндоморфизмов градуированных модулей антиполупростыми преобразованиями, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 3, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 10:40:16

Индуктируемость антиизоморфизмов колец эндоморфизмов градуированных модулей антиполулинейными преобразованиями

И. Н. Балаба

Р. Бэрм [1] было установлено, что кольца линейных преобразований векторных пространств V_D и W_E над телами антиизоморфны в том и только том случае, если пространства конечномерны и существует антиполулинейное преобразование сопряженного пространства ${}_D V^*$ на пространство W_E , которое индуцирует антиизоморфизм. К. Уолфсон [2] привел критерий индуцируемости антиизоморфизма колец эндоморфизмов строгих образующих антиполулинейным преобразованием.

В последние десятилетия отмечается значительный интерес к алгебраическим объектам, снабженным градуировкой. При этом специальным классам колец и модулей сопоставляются соответствующие классы градуированных колец и модулей. В частности, вместо кольца эндоморфизмов для градуированного модуля естественно рассматривать градуированное кольцо эндоморфизмов. В работе приведен критерий индуцируемости антиизоморфизма колец эндоморфизмов градуированных модулей, имеющих gr -свободное циклическое прямое слагаемое, антиполулинейным преобразованием.

Основные определения и понятия, касающиеся теории градуированных колец и модулей, можно найти в монографии [3]. Всюду далее: G – мультипликативная группа, кольцо – ассоциативное градуированное с единицей, модуль – градуированный модуль, $gr.mod-A$ ($A-gr.mod$) – категория правых (левых) градуированных A -модулей.

Если $M, N \in gr.mod-A$, то $HOM(M_A, N_A)_g$ – множество гомоморфизмов степени g , т. е. A -линейных отображений, для которых $f(M_h) \subseteq N_{gh}$ при всех $h \in G$. Ясно, что $HOM(M_A, N_A) = \bigoplus_{g \in G} HOM(M_A, N_A)_g$ – градуированная группа, а $END(M_A) = HOM(M_A, M_A)$ – градуированное кольцо, которое и будем называть *кольцом эндоморфизмов* градуированного A -модуля M . При рассмотрении левых модулей запись $f \in HOM({}_A M, {}_A N)_g$ означает, что $(M_h)f \subseteq N_{hg}$. Если $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ и $\sigma \in G$, то $M(\sigma)$ – модуль M , рассматриваемый с градуировкой $M(\sigma)_g = M_{\sigma g}$ для правого модуля и $M(\sigma)_g = M_{g\sigma}$ – для левого.

Модуль M_A будем называть *строгим gr -образующим*, если $M_A = P_A \oplus H_A$ и $P_A \cong A(\sigma)$ – gr -свободный циклический модуль. Ясно, что в этом случае существует односторонний идемпотент $u = u^2 \in END(M_A)$ такой, что $uM_A \cong P_A$; будем называть его *идемпотентным эндоморфизмом ранга 1* и обозначать $gr.r(u) = 1$ (см. [4]).

Отображение $\varphi: A \rightarrow B$ градуированных колец называется *изоморфизмом* (антиизоморфизмом) *градуированных колец*, если φ является кольцевым изоморфизмом (антиизоморфизмом) и $\varphi(A_g) \subseteq B_g$ ($\varphi(A_g) \subseteq B_{g^{-1}}$) для всех $g \in G$.

Если $M \in gr.mod-A$, то $M^* = HOM(M_A, A_A) \in A-gr.mod$ и существует канонический гомоморфизм $\omega_M: M \rightarrow M^{**}$ такой, что $(f)\omega_M(m) = f(m)$ для всех $m \in M$, $f \in M^*$. Модуль M_A называется *полурефлексивным*, если ω_M – мономорфизм, и *рефлексивным*, если ω_M – изоморфизм.

ЛЕММА 1. Если M_A – полурефлексивный модуль, то существует единственный мономорфизм $\phi: END(M_A) \rightarrow END({}_A M^*)$, обладающий свойством $f(\eta t) = (f\eta^*)t$ для любых $t \in M$, $f \in M^*$ (здесь $\eta^* = \phi(\eta)$). Если M_A рефлексивен, то ϕ – изоморфизм градуированных колец. Если ϕ – изоморфизм градуированных колец и M_A – полурефлексивный строгий gr -образующий, то M_A рефлексивен.

Используя лемму 1.9 из [4], получим следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть M_A – строгий gr -образующий, $R = END(M_A)$, $u = u^2 \in R$ таков, что $uM_A \cong A(\sigma)$. Тогда: 1) существует полулинейный изоморфизм (id_R, β, γ)

бимодулей ${}_R R u {}_u R {}_u$ и ${}_R M_A$, при котором $\beta(Ru)_g \subseteq M_{g\sigma}$ и $\gamma(uRu)_g \subseteq A_{\sigma^{-1}g\sigma}$ для всех $g \in G$; 2) если, кроме того, M_A – полурефлексивен, а $\bar{R}$ – образ кольца R при отображении ϕ из леммы 1, то существует полулинейный изоморфизм (γ, δ, ϕ) бимодулей ${}_u R {}_u {}_A M_R^*$ и ${}_A M_R^*$, при котором $\delta(uR)_g \subseteq M_{\sigma^{-1}g}^*$ для всех $g \in G$.

Пара отображений (γ, β) называется антиполулинейным σ -изоморфизмом модулей M_A и ${}_B N$ ($\sigma \in G$), если $\gamma: A \rightarrow B$ – антиизоморфизм колец и $\beta: M \rightarrow N$ – изоморфизм абелевых групп, обладающие свойствами $\beta(M_g) \subseteq N_{g^{-1}\sigma}$ и $\gamma(A_g) \subseteq B_{\sigma^{-1}g^{-1}\sigma}$ для всех $g \in G$ и $(ta)^\beta = a^\alpha t^\beta$ для всех $a \in A$, $t \in M$.

Говорят, что антиизоморфизм $\alpha: \text{END}(M_A) \rightarrow \text{END}(N_B)$ колец эндоморфизмов индуцируется антиполулинейным изоморфизмом (γ, β) модулей ${}_A M^*$ и N_B , если $(f\eta^*)^\beta = \eta^\alpha f^\beta$ для всех $f \in M^*$, $\eta \in \text{END}(M_A)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M_A – рефлексивный модуль. Тогда для каждого антиполулинейного σ -изоморфизма (γ, β) модулей ${}_A M^*$ и N_B существует единственный антиизоморфизм $\alpha: \text{END}(M_A) \rightarrow \text{END}(N_B)$, который индуцируется (γ, β) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив $\eta^\alpha(n) = (n^{\beta^{-1}}\eta^*)^\beta$ для любого $n \in N$, получим, что $\eta^\alpha \in \text{END}(N_B)$ для любого $\eta \in \text{END}(M_A)$. Легко проверить, что α – единственный антиизоморфизм градуированных колец, индуцируемый (γ, β) .

ЛЕММА 3. Пусть M_A – полурефлексивный модуль и $\alpha: \text{END}(M_A) \rightarrow \text{END}(N_B)$ антиизоморфизм колец, индуцируемый σ -антиполулинейным изоморфизмом (γ, β) модулей ${}_A M^*$ и N_B . Тогда $\phi: \text{END}(M_A) \rightarrow \text{END}({}_A M^*)$ является изоморфизмом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M_A и N_B – строгие гт-образующие, причем M_A – полурефлексивен, $R = \text{END}(M_A)$, $S = \text{END}(N_B)$ и $\alpha: R \rightarrow S$ – антиизоморфизм градуированных колец. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) если $u = u^2 \in R$, $\text{gr.r}(u) = 1$, то $\text{gr.r}(u^\alpha) = 1$;
- 2) существует $u \in R$ такой, что $\text{gr.r}(u) = \text{gr.r}(u^\alpha) = 1$;
- 3) существуют элемент $\sigma \in G$ и антиполулинейный σ -изоморфизм (γ, β) модулей ${}_A M^*$ и N_B , индуцирующий антиизоморфизм α .

В этом случае оба градуированных модуля M_A и N_B являются рефлексивными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.

2) $\Rightarrow$ 3) Пусть $u \in R$ и $\text{gr.r}(u) = \text{gr.r}(u^\alpha) = 1$, положим $w = u^\alpha$. В силу леммы 2 существуют полулинейные изоморфизмы бимодулей $(\gamma_1, \delta_1, \phi): {}_u R {}_u {}_A M_R^* \rightarrow {}_A M_R^*$ и $(\text{id}_S, \delta_2, \gamma_2): {}_S S w {}_w S \rightarrow {}_S M_B$ такие, что $\gamma_1(uRu)_g \subseteq A_{\tau^{-1}g\tau}$, $\delta_1(uR)_g \subseteq M_{\tau^{-1}g}^*$, $\gamma_2(wSw)_g \subseteq B_{\varsigma^{-1}g\varsigma}$, $\delta_2(Sw)_g \subseteq N_{g\varsigma}$. Тогда $(\gamma = \gamma_2\alpha\gamma_1^{-1}, \delta = \delta_2\alpha\delta_1^{-1})$ является антиполулинейным $(\tau^{-1}\varsigma)$ -изоморфизмом модулей ${}_A M^*$ и N_B , индуцирующим α .

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть (γ, β) – антиполулинейный σ -изоморфизм модулей ${}_A M^*$ и N_B , индуцирующий α и $u \in R$, $\text{gr.r}(u) = 1$, тогда существует полулинейный изоморфизм бимодулей ${}_u R {}_u {}_A M_R^*$ и ${}_A M_R^*$, причем $\delta(uR)_g \subseteq M_{\tau^{-1}g}^*$, где $uM \approx A(\tau)$ (лемма 2). Следовательно, $M^*\eta^* \approx (uR)\eta = uR\eta$, откуда при $\eta = u$ получим $M^*u^* \approx uRu$. Простая проверка показывает, что $u^\alpha N \approx B((\tau\sigma)^{-1})$, т.е. $\text{gr.r}(u^\alpha) = 1$.

Рефлексивность модулей M_A и N_B следует из лемм 1 и 3.

Список литературы

- [1] Р. Бэр, *Линейная алгебра и проективная геометрия*, ИЛ, М., 1955. [2] K. G. Wolfson, *Math. Z.*, **202:2** (1989), 151–159. [3] C. Năstăsescu, F. van Oystaeyen, *Graded Ring Theory*, North-Holland Mathematical Library, **28**, North-Holland, Amsterdam, 1982. [4] А. В. Михалёв, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1989, № 2, 20–27.

И. Н. Балаба (I. N. Balaba)

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

E-mail: ibalaba@mail.ru; ibalaba@tula.net

Представлено А. В. Михалёвым

Принято редколлегией

25.01.2008