Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, Две теоремы о строении относительно свободной алгебры Грассмана, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 4, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9179>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:17:01

Две теоремы о строении относительно свободной алгебры Грассмана

А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля

Пусть $F^{(3)} = k\langle 1, x_1, \dots, x_i, \dots \rangle / T^{(3)}$ – относительно свободная ассоциативная алгебра с единицей над бесконечным полем k характеристики $p > 2$, соответствующая унитарно замкнутому T -идеалу $T^{(3)}$, порожденному тождеством Грассмана $[[x_1, x_2], x_3] = 0$. Образы переменных в $F^{(3)}$ обозначаются теми же буквами. На алгебре $F^{(3)}$ действует (справа) полугрупповая алгебра kT , где T – полугруппа всех эндоморфизмов алгебры $k\langle 1, x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$. По определению (см. [1]) T -пространством в $F^{(3)}$ называется любой kT -подмодуль. Вообще, T -пространство – это унитарный правый kT -модуль, и можно рассматривать факторпространства, прямые суммы, тензорные произведения T -пространств (тензорные произведения над полем k с покомпонентным действием алгебры kT) и т. д.

В алгебре $F^{(3)}$ весьма важную роль играет T -пространство W_{p^l} , порожденное всеми одночленами, содержащими каждую переменную с кратностью p^l (так называемыми p^l -словами). Именно к таким T -пространствам сводятся многие структурные вопросы в алгебре $F^{(3)}$. Известно (см. [2]), что $W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}$ – прямая сумма T -пространств, где D_{p^l} – T -пространство, порожденное одночленом $x_1^{p^l}$, а CD_{p^l} – T -пространство, порожденное всеми многочленами вида $g_{m,l} = c_{m,l} z^{p^l}$, где $c_{m,l} = x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m]$, $m, l \in \mathbb{N}$, y_i, z – переменные из множества $\{x_1, \dots, x_i, \dots\}$, отличные от переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$. Пусть C_{p^l} – T -пространство, порожденное всеми многочленами $c_{m,l}$. Отметим, что все рассматриваемые бесконечные системы порождающих неприводимы, кроме того, $D_{p^l}/D_{p^{l+1}}$ – простой kT -модуль (см. [2]–[4]).

Введенные таким образом T -пространства C_{p^l} и CD_{p^l} раскладываются в сумму T -пространств $C_{p^l}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}$, которые порождены многочленами $c_{m,l}$ и $g_{m,l}$ соответственно (циклические kT -модули). Связь между введенными T -пространствами выражается следующей диаграммой (см. также [2], [3]), в которой, как будет видно из теоремы 1, все включения строгие:

$$\begin{array}{ccccccc}
 CD_p & = & CD_p^{(1)} & + & CD_p^{(2)} & + & \cdots + CD_p^{(m-1)} + CD_p^{(m)} + \cdots \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 CD_{p^2} & = & CD_{p^2}^{(1)} & + & CD_{p^2}^{(2)} & + & \cdots + CD_{p^2}^{(m-1)} + CD_{p^2}^{(m)} + \cdots \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 CD_{p^l} & = & CD_{p^l}^{(1)} & + & CD_{p^l}^{(2)} & + & \cdots + CD_{p^l}^{(m-1)} + CD_{p^l}^{(m)} + \cdots \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 C_{p^l} & = & C_{p^l}^{(1)} & + & C_{p^l}^{(2)} & + & \cdots + C_{p^l}^{(m-1)} + C_{p^l}^{(m)} + \cdots \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 C_p & = & C_p^{(1)} & + & C_p^{(2)} & + & \cdots + C_p^{(m-1)} + C_p^{(m)} + \cdots \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
 C_1 & = & C_1^{(1)} & \supset & C_1^{(2)} & \supset & \cdots \supset C_1^{(m-1)} \supset C_1^{(m)} \supset \cdots
 \end{array}$$

Здесь $C_1^{(m)}$ – T -пространство, порожденное произведением m коммутаторов.

Пусть $\overline{CD_{p^l}} = CD_{p^l}/CD_{p^{l+1}}$. Тогда $\overline{CD_{p^l}} = \sum_{r=1}^{\infty} \overline{CD_{p^l}^{(r)}}$, где $\overline{CD_{p^l}^{(r)}}$ – образ $CD_{p^l}^{(r)}$ в T -пространстве $\overline{CD_{p^l}}$. Положим $\Delta_{p^l}^{(m)} = \sum_{r=m}^{\infty} \overline{CD_{p^l}^{(r)}}$. Имеется бесконечная строго убывающая цепочка $\overline{CD_{p^l}} = \Delta_{p^l}^{(1)} \supset \Delta_{p^l}^{(2)} \supset \dots$, причем $\bigcap_m \Delta_{p^l}^{(m)} = 0$ для любого $l \in \mathbb{N}$. Положим $\Omega(CD_{p^l}^{(m)}) = CD_{p^{l+1}}^{(m)} + \sum_{i \neq m} CD_{p^l}^{(i)}$, $\Omega(C_{p^l}^{(m)}) = C_{p^{l-1}}^{(m)} + \sum_{i \neq m} CD_p^{(i)}$, где $l, m \in \mathbb{N}$. Другими словами, если M равно $C_{p^l}^{(m)}$ или $CD_{p^l}^{(m)}$, то $\Omega(M)$ – T -пространство, порожденное всеми T -пространствами, находящимися в приведенной диаграмме ниже M (достаточно взять ближайшее снизу), а также находящимися левее и правее M (достаточно взять самые верхние).

Некоторую независимость любого элемента $C_{p^l}^{(m)}$ или $CD_{p^l}^{(m)}$ из приведенной выше диаграммы от всех остальных, кроме тех, что находятся выше по столбцу, показывает

ТЕОРЕМА 1. а) Пусть M равно $C_{p^l}^{(m)}$ или $CD_{p^l}^{(m)}$. Тогда $(M + \Omega(M))/\Omega(M)$ – однопорожденное ненулевое T -пространство и, следовательно, однопорожденные T -пространства $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ ненулевые.

б) Фактор- T -пространство $\Delta_{p^l}^{(m)}/\Delta_{p^l}^{(m+1)}$ является ненулевым гомоморфным образом тензорного произведения набора $2m + 1$ копий простого T -пространства $D_{p^l}/D_{p^{l+1}}$ (имеется и более точное описание, которое здесь не приводится).

Можно показать (см. [3], [5]), что T -пространство W_p является подалгеброй k -алгебры $F^{(3)}$, лежащей в ее центре (вопрос о совпадении с центром пока открыт), причем CD_p – радикал алгебры W_p , являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса p , и $W_p/CD_p \cong D_p$ – алгебра коммутативных многочленов $k[x_1^p, \dots, x_i^p, \dots]$. Строение W_p -модулей $F^{(3)}$ и CD_p в некоторой степени проясняет следующая

ТЕОРЕМА 2. а) Пусть $u(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}) = x_{i_1}^{m_{i_1}} \dots x_{i_r}^{m_{i_r}}$, где $i_1 < \dots < i_r$, $1 \leq m_{i_\alpha} \leq p - 1$, S – множество, состоящее из 1 и всех одночленов $u(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$. Тогда

$$F^{(3)} = W_p \cdot S = W_p \cdot 1 + \sum_{(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})} W_p u(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}),$$

причем S – бесконечная неприводимая система порождающих W_p -модуля $F^{(3)}$.

б) Пусть L – множество многочленов, получающихся из многочлена $s_{1,1}$ с помощью линейных подстановок, k -линейных действий и подстановок вместо переменных элементов из системы S . Тогда $CD_p = W_p \cdot L$ – бесконечно порожденный W_p -модуль.

в) $F^{(3)}$ и W_p – свободные D_p -модули бесконечного ранга.

ЗАМЕЧАНИЯ. (i) Соотношения между элементами системы порождающих S можно полностью описать. (ii) В случае $p = 2$ имеются аналоги приведенных результатов; однако есть и существенные особенности.

Список литературы

- [1] А. В. Гришин, *Фундамент. и прикл. матем.*, **5:1** (1999), 101–118. [2] А. В. Гришин, Л. М. Сурмина, *УМН*, **62:4** (2007), 145–146. [3] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, *Вестник СамГУ. Сер. матем.*, **57:7** (2007), 35–55. [4] В. В. ЩигOLEV, *Матем. сб.*, **191:3** (2000), 143–160. [5] А. В. Гришин, Л. М. Сурмина, *Тезисы докладов Междунар. конф. по алгебре и теории чисел, посв. 80-летию В. Е. Воскресенского* (Самара, 2007), 15–16.

А. В. Гришин (A. V. Grishin)

Московский педагогический государственный университет

Л. М. Цыбуля (L. M. Tsybulya)

Московский педагогический государственный университет

E-mail: liliya-kinder@mail.ru

Представлено А. В. Михалёвым

Принято редакцией

25.01.2008