Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Сударкин, Классификация градуировок простых супералгебр Ли серии A системами корней их классических простых подалгебр, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 3, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9180>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:19:03

Классификация градуировок простых супералгебр Ли серии A системами корней их классических простых подалгебр

А. В. Сударкин

Понятие алгебры Ли, градуированной некоторой неразложимой системой корней, было введено в [1]. В работе [2] была дана классификация всех градуировок простых комплексных алгебр Ли системами корней их простых подалгебр. В дальнейшем понятие алгебры Ли, градуированной системой корней, было обобщено на случай супералгебр Ли и было дано общее описание произвольных, не обязательно конечномерных, комплексных супералгебр Ли, градуированных системами корней их классических простых подалгебр (см., например, [3]). В настоящей заметке рассматривается задача классификации таких градуировок для классических простых комплексных супералгебр Ли $\mathfrak{g}$, т. е. естественное обобщение задачи, решенной в [2]. Полный ответ дается в случае, когда $\mathfrak{g}$ принадлежит серии A , т. е. когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m, n)$ – супералгебра Ли комплексных матриц порядка $m|n$ с суперследом 0 при $m \neq n$ или же $\mathfrak{g} = \mathfrak{psl}(n, n) = \mathfrak{sl}(n, n)/(E_{2n})$ (см. [4]).

Далее все алгебры Ли и супералгебры Ли считаются комплексными и конечномерными; *подалгеброй* супералгебры Ли называется любая ее $\mathbb{Z}_2$ -градуированная подалгебра. Мы начнем с определения супералгебры Ли, градуированной системой корней ее подалгебры, которая не предполагается простой. В этом определении удобно использовать следующий класс супералгебр Ли, введенный в [5].

Супералгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ называется *редуктивной*, если алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ редуктивна, а ее присоединенное представление в $\mathfrak{g}$ является алгебраическим (т. е. дифференциалом некоторого алгебраического представления соответствующей редуктивной комплексной алгебраической группы). Простая супералгебра Ли является *классической* (в смысле [4]) тогда и только тогда, когда она редуктивна. Пусть $\mathfrak{g}$ – редуктивная супералгебра Ли, и пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана в $\mathfrak{g}_0$. Тогда $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму весовых подпространств

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}\} \neq \{0\}, \quad \alpha \in \mathfrak{h}^*.$$

Веса $\alpha \neq 0$ называются *корнями* супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$.

Предположим, что супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит редуктивную подалгебру $\mathring{\mathfrak{g}}$, и пусть $\mathring{\mathfrak{h}}$ – подалгебра Картана в $\mathring{\mathfrak{g}}_0$ и $\mathring{\Delta}$ – система корней супералгебры Ли $\mathring{\mathfrak{g}}$ относительно $\mathring{\mathfrak{h}}$. Для любого $\lambda \in \mathring{\Delta} \cup \{0\}$ определено ненулевое весовое подпространство

$$V_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \lambda(h)x \text{ для всех } h \in \mathring{\mathfrak{h}}\}$$

супералгебры Ли $\mathfrak{g}$. Мы говорим, что супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ *градуирована системой корней* $\mathring{\Delta}$ ее редуктивной подалгебры $\mathring{\mathfrak{g}}$, если

$$(i) \quad \mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathring{\Delta} \cup \{0\}} V_\lambda; \quad (ii) \quad V_0 = \sum_{\pm \lambda \in \mathring{\Delta}} [V_\lambda, V_{-\lambda}].$$

В этом случае пара $(\mathfrak{g}, \mathring{\mathfrak{g}})$ называется *градуированной парой*.

Предположим теперь, что супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ также редуктивна и что $\mathring{\mathfrak{h}}$ содержится в некоторой подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ (это условие всегда выполняется, если пара градуирована). Тогда определено линейное отображение ограничения $\pi: \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathring{\mathfrak{h}}^*$. Обозначим через Δ систему корней супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$.

Сформулируем два предложения, на которых основана наша классификация градуированных пар классических простых супералгебр Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В описанной выше ситуации пара $(\mathfrak{g}, \overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ удовлетворяет условию (i) тогда и только тогда, когда $\pi(\Delta \cup \{0\}) = \overset{\circ}{\Delta} \cup \{0\}$. Если супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, то из (i) вытекает (ii).

Рассмотрим разложение $\Delta = \Delta_{\bar{0}} \cup \Delta_{\bar{1}}$, где $\Delta_{\bar{0}}$ и $\Delta_{\bar{1}}$ – множества таких корней α , что $\mathfrak{g}_{\alpha} \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}} \neq \{0\}$ и $\mathfrak{g}_{\alpha} \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}} \neq \{0\}$ соответственно, а также аналогичное разложение $\overset{\circ}{\Delta} = \overset{\circ}{\Delta}_{\bar{0}} \cup \overset{\circ}{\Delta}_{\bar{1}}$. Положим

$$\Delta_{\bar{0}\bar{0}} = \{\alpha \in \Delta_{\bar{0}} \mid \pi(\alpha) \in \overset{\circ}{\Delta}_{\bar{0}}\}, \quad \Delta_{\bar{0}0} = \{\alpha \in \Delta_{\bar{0}} \mid \pi(\alpha) = 0\},$$

$$\Delta_{\bar{0}\bar{1}} = \{\alpha \in \Delta_{\bar{0}} \mid \pi(\alpha) \in \overset{\circ}{\Delta}_{\bar{1}} \setminus \overset{\circ}{\Delta}_{\bar{0}}\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $(\mathfrak{g}, \overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ – градуированная пара редуктивных супералгебр Ли, причем $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ проста, и пусть $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ определяются формулами

$$\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\bar{0}\bar{0}} \cup \Delta_{\bar{0}0} \cup \{0\}} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad \mathfrak{v} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\bar{0}\bar{1}}} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Тогда имеем разложение $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{v}$, являющееся $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, т. е. удовлетворяющее условиям $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] \subset \mathfrak{u}$, $[\mathfrak{u}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{v}$ и $[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{u}$. При этом $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\bar{0}} \subset \mathfrak{u}$ и пара $(\mathfrak{u}, \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\bar{0}})$ удовлетворяет условию (i).

Эти предложения позволяют связать с каждой градуированной парой классических простых супералгебр Ли некоторую градуированную пару полупростых алгебр Ли, что в конечном счете дает возможность использовать результаты работы [2]. При этом изучаемые градуированные пары разбиваются на следующие два типа: 1) $\Delta_{\bar{0}\bar{1}} = \emptyset$; 2) $\Delta_{\bar{0}\bar{1}} \neq \emptyset$. Тип 1) характеризуется равенством $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, так что в этом случае пара алгебр Ли $(\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\bar{0}})$ также удовлетворяет условию (i).

В случае, когда $\mathfrak{g}$ принадлежит серии A, полное решение нашей задачи содержится в следующей теореме, доказательство которой для пар типа 1) было опубликовано в [6]. Числа k, l, p здесь являются натуральными, а простые супералгебры Ли обозначены как в [5].

ТЕОРЕМА. С точностью до изоморфизма существуют только следующие градуированные пары $(\mathfrak{g}, \overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ простых классических супералгебр Ли такие, что $\mathfrak{g}$ принадлежит серии A.

Тип 1): $(\mathfrak{sl}(kp, lp), \mathfrak{sl}(k, l))$, $k < l$; $(\mathfrak{psl}(kp, kp), \mathfrak{psl}(k, k))$; $(\mathfrak{psl}(kp, kp), \mathfrak{psq}(k))$; $(\mathfrak{sl}(k, 2lp), \mathfrak{osp}(1, 2l))$, $k \geq p$; $(\mathfrak{psl}(2kp, 2kp), \mathfrak{osp}(1, 2k))$.

Тип 2): $(\mathfrak{psl}((k+l)p, (k+l)p), \mathfrak{sl}(k, l))$, $k < l$; $(\mathfrak{psl}(2kp, 2kp), \mathfrak{psl}(k, k))$; $(\mathfrak{sl}(1, n), \mathfrak{osp}(1, 2p))$, $n > 2p$; $(\mathfrak{psl}(k+2lp, k+2lp), \mathfrak{osp}(1, 2l))$.

Список литературы

- [1] S. Berman, R. V. Moody, *Invent. Math.*, **108**:2 (1992), 323–347. [2] J. Nervi, *J. Algebra*, **223**:1 (2000), 307–343. [3] G. Benkart, A. Elduque, *Canad. Math. Bull.*, **45**:4 (2002), 509–524. [4] V. G. Кас, *Adv. Math.*, **26**:1 (1977), 8–96. [5] Н. И. Иванова, А. Л. Онищик, *ВИНИТИ: Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундамент. напр.*, **20** (2006), 5–68. [6] А. В. Сударкин, *Математика в Ярославском университете*, ЯрГУ, Ярославль, 2006, 429–445.

А. В. Сударкин (A. V. Sudarkin)
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: soud@univ.yuniar.ac.ru

Представлено Э. Б. Винбергом
Принято редколлегией
25.01.2008