Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Беньш-Кривец, В. П. Платонов, Непрерывные дроби и S -единицы в гиперэллиптических полях, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 2, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9184>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:50:49

Непрерывные дроби и S -единицы в гиперэллиптических полях

В. В. Беньш-Кривец, В. П. Платонов

Настоящая заметка преследует двойную цель: изложить некоторые результаты о непрерывных дробях в функциональных полях и показать, как непрерывные дроби могут быть использованы для нахождения фундаментальных S -единиц в гиперэллиптических полях.

Пусть k – произвольное поле, $k(x)$ – поле рациональных функций от одной переменной над k . Для многочлена $v = x - a$ через $|\cdot| = |\cdot|_v$ будем обозначать нормирование, соответствующее v . Пополнение поля $k(x)$ относительно нормирования $|\cdot|_v$ можно отождествить с полем формальных степенных рядов $k((v))$. Продолжение нормирования $|\cdot|$ на $k((v))$ по-прежнему будем обозначать через $|\cdot|$.

Непрерывные дроби в функциональных полях в случае нормирования $|\cdot|_\infty$ были впервые введены Э. Артином [1]. Мы рассматриваем случай нормирования $|\cdot|_v$. Для элемента $\beta = \sum_{i=-s}^{\infty} d_i v^i \in k((v))$ положим $[\beta] = \sum_{i=-s}^0 d_i v^i \in k[v^{-1}]$. Пусть $a_0 = [\beta]$. Если $\beta - a_0 \neq 0$, то положим $\beta_1 = 1/(\beta - a_0) \in k((v))$, $a_1 = [\beta_1]$. Далее по индукции определяем элементы a_i, β_i : если $\beta_{i-1} - a_{i-1} \neq 0$, то $\beta_i = 1/(\beta_{i-1} - a_{i-1})$, $a_i = [\beta_i]$. Этот процесс оборвется тогда и только тогда, когда $\beta \in k(v)$. Будем использовать стандартную сокращенную запись для непрерывной дроби $\beta = [a_0; a_1, a_2, \dots]$.

Определим по индукции элементы $p_i, q_i \in k[v^{-1}]$. Положим $p_{-2} = 0$, $p_{-1} = 1$, $q_{-2} = 1$, $q_{-1} = 0$ и если $n \geq 0$, то $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$. Тогда $p_n, q_n \in k[v^{-1}]$ и $p_n/q_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ при $n \geq 0$. Для $n \geq -1$ справедливы соотношения

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n, \quad q_n \beta - p_n = \frac{(-1)^n}{q_n \beta_{n+1} + q_{n-1}}, \quad \beta = \frac{p_n \beta_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \beta_{n+1} + q_{n-1}}. \quad (1)$$

Дробь p_n/q_n называют n -й подходящей дробью к β . Нетрудно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \beta.$$

По построению, $|a_n| = |\beta_n| < 0$. Из (1) по индукции легко получить соотношения

$$|q_n| = \sum_{j=1}^n |a_j|, \quad |q_n \beta - p_n| = -|q_{n+1}| > -|q_n|. \quad (2)$$

Введем понятие наилучшего приближения. Дробь p/q , где $p, q \in k[v^{-1}]$, $q \neq 0$, является *наилучшим приближением* к β , если для любой другой дроби a/b , где $a, b \in k[v^{-1}]$, $b \neq 0$, такой, что $a/b \neq p/q$ в $k(v)$ и $|b| \geq |q|$, выполнено неравенство $|\beta - p/q| > |\beta - a/b|$. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Несократимая дробь p/q , где $p, q \in k[v^{-1}]$, $q \neq 0$, является наилучшим приближением к β тогда и только тогда, когда $|\beta - p/q| > -2|q|$ (или, что эквивалентно, $|q\beta - p| > -|q|$).

Предложение 1 и соотношения (2) немедленно влекут, что n -я подходящая дробь p_n/q_n к β является наилучшим приближением к β . Следующая теорема показывает, что справедливо и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Если a/b является наилучшим приближением к β , то найдутся такая подходящая дробь p_n/q_n к β и такая константа $c \in k^*$, что $a = c p_n$, $b = c q_n$.

Стандартным образом можно показать, что если непрерывная дробь $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ для β является периодической, то β – квадратичная иррациональность. В случае бесконечного поля k обратное утверждение верно не всегда [2]. Всюду ниже мы будем

предполагать, что $k = \mathbb{F}_q$ – поле из q элементов и характеристика k не равна 2. Справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\beta \in k((v))$ – квадратичная иррациональность, то непрерывная дробь для β периодична.

Далее мы покажем, как непрерывные дроби могут быть использованы для нахождения фундаментальных S -единиц в гиперэллиптических полях. Пусть $d(x) = b_0x^{2n+1} + b_1x^{2n} + \dots + b_{2n+1} \in k[x]$, где $b_0 \neq 0$, – свободный от квадратов многочлен, $K = k(x)(\sqrt{d})$. Предположим, что наше нормирование $|\cdot| = |\cdot|_v$ имеет два продолжения $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$ на K . Нормирование $|\cdot|_\infty$ имеет единственное продолжение на K . Пусть $S = \{|\cdot|_\infty, |\cdot|_1\}$, $\mathcal{O}_S$ – кольцо S -целых элементов в K , $U_S = \mathcal{O}_S^*$ – группа S -единиц поля K . Известно, что группа U_S является прямым произведением группы k^* и свободной абелевой группы G ранга 1. Образующая группы G называется фундаментальной S -единицей.

В [3] найден эффективный алгоритм для вычисления фундаментальной S -единицы. В классическом случае квадратичного расширения $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ поля $\mathbb{Q}$ фундаментальную единицу поля L можно найти, используя разложение $\sqrt{d}$ либо $(\sqrt{d} - 1)/2$ в непрерывную дробь. Наша цель – показать, что и в случае гиперэллиптического поля K фундаментальную S -единицу можно найти, используя метод непрерывных дробей. В [3] доказано, что для вычисления фундаментальной S -единицы нужно найти минимальное натуральное m такое, что норменное уравнение

$$f^2 - g^2 d = av^m, \quad (3)$$

где $a \in k^*$, имеет решение в многочленах $f, g \in k[v]$, $g \neq 0$. Тогда либо $f + g\sqrt{d}$, либо $f - g\sqrt{d}$ является фундаментальной S -единицей. Следующая теорема дает алгоритм для нахождения фундаментальной S -единицы с помощью непрерывных дробей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть m – такое минимальное натуральное число, что норменное уравнение (3) имеет решение в многочленах $f, g \in k[v]$, $g \neq 0$.

1. Если m нечетно, то $f/g = p_n/q_n$ для некоторой подходящей дроби p_n/q_n к $\sqrt{d}$.
2. Если $m = 2t$ четно, то найдется делитель h многочлена d , обладающий следующими свойствами: i) $1 \leq \deg h \leq (\deg d - 1)/2$; ii) уравнение

$$hf_1^2 - \frac{d}{h}g_1^2 = bv^t, \quad (4)$$

где $b \in k^*$, имеет решение в многочленах $f_1, g_1 \in k[v]$, при этом $f_1/g_1 = p_n/q_n$ для некоторой подходящей дроби p_n/q_n к $\sqrt{d}/h$. Наоборот, если $f_1, g_1 \in k[x]$ – решение уравнения (4), то многочлены f и g , определяемые по формулам $f = hf_1^2 + (d/h)g_1^2$, $g = 2f_1g_1$, являются решением норменного уравнения (3).

Список литературы

- [1] E. Artin, *Math. Z.*, **19**:1 (1924), 153–206. [2] W. W. Adams, M. J. Razar, *Proc. London Math. Soc.* (3), **41**:3 (1980), 481–498. [3] В. В. Беньаш-Кривец, В. П. Платонов, *Докл. РАН*, **417**:4 (2007), 446–450; англ. пер.: V. V. Benyash-Krivets, V. P. Platonov, *Dokl. Math.*, **76**:3 (2007), 886–890.

В. В. Беньаш-Кривец (V. V. Benyash-Krivets)
Белорусский государственный университет
E-mail: benyash@bsu.by

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией
12.02.2008

В. П. Платонов (V. P. Platonov)
Научно-исследовательский институт
системных исследований РАН
E-mail: platonov@niisi.ras.ru