Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Двойственность в специальном классе подмногообразий и фробениусовы многообразия, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 2, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9187>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:22:33

Двойственность в специальном классе подмногообразий и фробениусовы многообразия

О. И. Мохов

Рассмотрим вполне неизотропные N -мерные подмногообразия M^N в $(N+L)$ -мерных псевдоевклидовых пространствах $\mathbb{F}_k^{N+L}$ (т. е. N -мерные подмногообразия, которые не касаются изотропных конусов объемлющего $(N+L)$ -мерного псевдоевклидова пространства ни в одной точке). Пусть $(z^1, \dots, z^{N+L})$ – псевдоевклидовы координаты в $\mathbb{F}_k^{N+L}$; подмногообразие M^N задано вектор-функцией $r = (z^1(u^1, \dots, u^N), \dots, z^{N+L}(u^1, \dots, u^N))$, $\text{rank}(\partial z^i / \partial u^j) = N$; $\partial r / \partial u^i = r_i(u)$, $1 \leq i \leq N$, – базис касательного пространства в произвольной точке $u = (u^1, \dots, u^N)$ подмногообразия M^N ; $n_1(u), \dots, n_L(u)$ – произвольный базис нормального пространства $\mathbb{N}_u$, гладко зависящий от точки u ; $g_{ij}(u) = (r_i, r_j)$, $1 \leq i, j \leq N$, – первая квадратичная форма подмногообразия $((\cdot, \cdot) - \text{псевдоевклидово скалярное произведение в } \mathbb{F}_k^{N+L})$, $h_{\alpha\beta}(u) = (n_\alpha, n_\beta)$, $1 \leq \alpha, \beta \leq L$ (для вполне неизотропных подмногообразий $\det g_{ij}(u) \neq 0$ и $\det h_{\alpha\beta}(u) \neq 0$). Разложения Гаусса и Вайнгартена имеют вид

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} = a_{ij}^k(u) \frac{\partial r}{\partial u^k} + b_{ij}^\beta(u) n_\beta(u), \quad \frac{\partial n_\alpha}{\partial u^j} = c_{\alpha j}^k(u) \frac{\partial r}{\partial u^k} + d_{\alpha j}^\beta(u) n_\beta(u) \quad (1)$$

соответственно. Для любого подмногообразия метрика $g_{ij}(u)$, функции $h_{\alpha\beta}(u)$ и коэффициенты $a_{ij}^k(u)$, $b_{ij}^\beta(u)$, $c_{\alpha j}^k(u)$, $d_{\alpha j}^\beta(u)$ связаны рядом соотношений, включающим уравнения Гаусса, Кодацци и Риччи. Отметим, что в данной работе мы рассматриваем только локальную теорию подмногообразий.

Выделим специальный класс N -мерных подмногообразий в $2N$ -мерных псевдоевклидовых пространствах. Наша цель – выделить случай, когда базисные векторы касательных и нормальных пространств, $r_i(u)$, $1 \leq i \leq N$, и $n_\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq L$, являются равноправными и двойственными друг другу. Очевидно, что условие $L = N$ является необходимым условием такой двойственности. Кроме того, необходимым условием является условие потенциальности базиса $n_\alpha(u)$: $n_\alpha(u) = \partial n / \partial u^\alpha$, $1 \leq \alpha \leq N$, где $n(u)$ – некоторая вектор-функция на подмногообразии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Базис $n_\alpha(u)$, $1 \leq \alpha \leq N$, в нормальном пространстве $\mathbb{N}_u$ некоторого N -мерного подмногообразия в $2N$ -мерном псевдоевклидовом пространстве называется *потенциальным*, если на подмногообразии существует вектор-функция (*потенциал нормалей*) $n(u)$ такая, что $n_\alpha(u) = \partial n / \partial u^\alpha$, $1 \leq \alpha \leq N$.

Если вектор-функция $n(u)$ существует, то она порождает потенциальный базис в нормальном пространстве $\mathbb{N}_u$ в любой системе координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. N -мерное подмногообразие в $2N$ -мерном псевдоевклидовом пространстве называется *подмногообразием с потенциальным нормальным базисом* (или *подмногообразием с потенциалом нормалей*), если на подмногообразии существует вектор-функция (*потенциал нормалей*) $n(u)$ такая, что для любой точки u на подмногообразии векторы $n_i(u) = \partial n / \partial u^i$, $1 \leq i \leq N$, образуют базис в нормальном пространстве $\mathbb{N}_u$.

Определение 2 инвариантно (не зависит от локальной системы координат).

Коэффициенты $a_{ij}^k(u)$ в разложении Гаусса (1) всегда являются коэффициентами связности Леви-Чивиты метрики $g_{ij}(u)$. Для подмногообразий, оснащенных потенциальным нормальным базисом, аналогичное утверждение верно и для коэффициентов $d_{\alpha j}^\beta(u)$ в разложении Вайнгартена (1). Рассмотрим соответствующие разложения

Гаусса и Вайнгартена:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} = a_{ij}^k(u) \frac{\partial r}{\partial u^k} + b_{ij}^k(u) \frac{\partial n}{\partial u^k}, \quad \frac{\partial^2 n}{\partial u^i \partial u^j} = c_{ij}^k(u) \frac{\partial r}{\partial u^k} + d_{ij}^k(u) \frac{\partial n}{\partial u^k}. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. *Функции $h_{ij}(u) = (\partial n / \partial u^i, \partial n / \partial u^j)$ определяют ковариантную метрику на подмногообразии, а коэффициенты $d_{ij}^k(u)$ в разложении Вайнгартена (2) являются коэффициентами симметричной аффинной связности, согласованной с метрикой $h_{ij}(u)$, т. е. коэффициентами связности Леви-Чивиты метрики $h_{ij}(u)$. Коэффициенты $b_{ij}^k(u)$ и $c_{ij}^k(u)$ суть тензоры типа (1, 2) на подмногообразии M^N .*

ТЕОРЕМА 2 (принцип двойственности). *Для любого подмногообразия, оснащенного потенциалом нормалей $n(u)$ и задаваемого вектор-функциями $(r(u), n(u))$, вектор-функции $(n(u), r(u))$ также задают подмногообразие, оснащенное потенциалом нормалей, для которого $n_i(u)$ – касательные векторы, а $r_i(u)$ – базисные нормальные векторы подмногообразия, при этом все объекты локальной теории таких подмногообразий двойственны друг другу, в частности, разложение Гаусса переходит в разложение Вайнгартена, а разложение Вайнгартена переходит в разложение Гаусса, уравнения Гаусса переходят в уравнения Риччи, а уравнения Риччи переходят в уравнения Гаусса, уравнения Кодацци переходят в себя, метрика $g_{ij}(u)$ переходит в метрику $h_{ij}(u)$ и наоборот.*

Подмногообразия с потенциалом нормалей образуют важный и богатый класс подмногообразий. Тривиальным примером таких подмногообразий являются произвольные одномерные подмногообразия псевдоевклидовых плоскостей. Общая теория подмногообразий с потенциалом нормалей, принцип двойственности для них и важные примеры будут представлены в другой статье. Частным случаем подмногообразий с потенциалом нормалей являются подмногообразия с естественными фробениусовыми структурами, построенные автором в [1]–[4] и реализующие произвольные фробениусовы многообразия (теория фробениусовых многообразий построена в [5]). В [1] и [2] автором доказано, что любое фробениусово многообразие реализуется как некоторое плоское подмногообразие с потенциалом нормалей, для которого $g_{ij}(u) = ch_{ij}(u)$, $c = \text{const} \neq 0$, где c – параметр деформации, сохраняющей фробениусову структуру. Пусть $h_{ij}(u) = \eta_{ij}$, $\eta_{ij} = \eta_{ji}$, $\det \eta_{ij} \neq 0$, $\eta_{ij} = \text{const}$, $g_{ij} = c\eta_{ij}$, $c = \text{const} \neq 0$. В этом случае для подмногообразий с потенциалом нормалей выполняются соотношения $a_{ij}^k(u) = d_{ij}^k(u) = 0$, а также существует функция $\Phi(u)$ такая, что $b_{ij}^k(u) = \eta^{ks} \partial^3 \Phi / \partial u^s \partial u^i \partial u^j$, $c_{ij}^k(u) = -(1/c) b_{ij}^k(u)$, $\eta^{is} \eta_{sj} = \delta_j^i$, причем все соотношения локальной теории подмногообразий выполняются тогда и только тогда, когда функция $\Phi(u)$ удовлетворяет уравнениям ассоциативности двумерных топологических квантовых теорий поля (уравнениям Виттена–Дейкграфа–Верлинде–Верлинде, см. [5])

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^j \partial u^s} \eta^{sp} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^p \partial u^k \partial u^l} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^i \partial u^k \partial u^s} \eta^{sp} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^p \partial u^j \partial u^l}. \quad (3)$$

Список литературы

- [1] O. I. Mokhov, [arXiv: abs/0710.5860](https://arxiv.org/abs/0710.5860), 2007. [2] O. I. Mokhov, *ТМФ*, **152:2** (2007), 368–376. [3] О. И. Мохов, *УМН*, **59:1** (2004), 187–188. [4] О. И. Мохов, *Функц. анализ и его прил.*, **40:1** (2006), 14–29. [5] B. Dubrovin, *Lecture Notes in Math.*, **1620**, Springer-Verlag, Berlin, 1996, 120–348.

О. И. Мохов (O. I. Mokhov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: mokhov@mi.ras.ru; mokhov@bk.ru

Представлено С. П. Новиковым
Принято редколлегией
03.02.2008