Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Штогрин, Специальные изометрические преобразования конуса, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 2, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:52:57

Специальные изометрические преобразования конуса

М. И. Штогрин

Исследуются специальные изометрические *вложения* поверхности прямого кругового конуса в пространство $\mathbb{R}^3$. Строение вложенной поверхности обладает двойкой периодичностью. В окружном направлении действует группа pmn порядка $2n$ (порожденная отражениями от двух плоскостей, составляющих угол π/n). Вдоль оси действует дискретная группа гомотетий с центром в вершине конуса. Периодом последней может служить боковая поверхность усеченной правильной пирамиды.

Возьмем вспомогательную усеченную правильную пирамиду Π с горизонтальным $2n$ -угольным основанием и вертикальной осью. На боковой грани α_1 возьмем произвольную гладкую кривую γ_1 , однозначно проектирующуюся на ось. На смежной боковой грани α_2 построим кривую γ_2 , получающуюся из γ_1 при зеркальном отражении от плоскости β , проходящей через боковое ребро $\alpha_2 \cap \alpha_1$ и ось. Аналогично строим кривую γ_3 на грани α_3 , смежной с α_2 , и т. д. Так на каждой грани α_i получим кривую γ_i . Проведем теперь через кривые γ_1 и γ_2 цилиндрическую поверхность Z_{12} с образующими, перпендикулярными плоскости β . Аналогично строим цилиндрические поверхности Z_{23} , Z_{34} и т. д. Все вместе они составляют кусочно гладкую поверхность Z с ребристыми линиями γ_i , $i = 1, \dots, 2n$.

Именно так строил А. В. Погорелов [1] оригинальную трубчатую поверхность Z в том случае, когда в качестве Π была взята призма, а не пирамида.

Если же Π является пирамидой, то поверхность Z , вообще говоря, не развертывающаяся: никакая достаточно малая окрестность точки ребристой линии γ_i не изометрична евклидову кругу. Однако, если Π есть пирамида, а γ_i суть прямолинейные отрезки, обозначим их через ℓ_i , то поверхность Z является кусочно линейной. Обозначим ее через $\bar{Z}$. Любая точка ребра ℓ_i имеет окрестность, состоящую из двух полукругов. Поверхность $\bar{Z}$ развертывающаяся. Она ворончатая.

Кусочно линейная поверхность $\bar{Z}$ с прямолинейными ребрами ℓ_i , взятыми на гранях α_i усеченной правильной пирамиды Π , допускает кусочно гладкие изометрические вложения в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Предъявим их.

Если ℓ_1 есть ось симметрии грани α_1 , то поверхность $\bar{Z}$ представляет собой *усеченную правильную пирамиду*. Мы рассмотрим более общий случай.

К краям кусочно линейной поверхности $\bar{Z}$ приклеим два выпуклых многоугольника. Получим замкнутый выпуклый многогранник. Тут $\ell_j \cap \ell_i = \emptyset$, $j \neq i$. В вершине нижнего основания сходятся три плоских угла φ , ψ и $\pi - \pi/n$. В вершине верхнего основания сходятся три плоских угла $\pi - \varphi$, $\pi - \psi$ и $\pi - \pi/n$. Те и эти три угла удовлетворяют неравенствам треугольника. Сумма плоских углов в вершине многогранника меньше 2π . Поэтому углы φ и ψ удовлетворяют следующим системам неравенств:

$$\varphi < \psi + \pi - \frac{\pi}{n}, \quad \psi < \varphi + \pi - \frac{\pi}{n}; \quad (*)$$

$$\pi - \frac{\pi}{n} < \varphi + \psi < \pi + \frac{\pi}{n}. \quad (**)$$

Все плоские куски $\bar{Z}_{12}, \dots, \bar{Z}_{2n1}$ кусочно линейной ворончатой поверхности $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ суть грани. Разрезав грань $\bar{Z}_{2n1}$ одной из n плоскостей зеркальной симметрии, развернем поверхность $\bar{Z}$ на евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$. Получим развертку поверхности $\bar{Z}$ в виде невыпуклого (из-за пирамиды Π) многоугольника $R \subset \mathbb{R}^2$, обладающего парой эквивалентных сторон, которые имеют один и тот же образ на поверхности $\bar{Z}$ при изометрическом отображении $\bar{f}: R \rightarrow \bar{Z}$. Отображение $\bar{f}$ сохраняет углы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-90102), программы "Ведущие научные школы" (грант НШ-4182.2006.1) и государственной программы фундаментальных исследований ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики".

Развертка наследует условия (*) и (**), где φ и ψ суть углы, составляемые прообразом ребра ℓ_1 в одном из его концов, скажем, A , со сторонами развертки R . Прообразы следов имеющихся n плоскостей зеркальной симметрии на поверхности $\bar{Z}$ суть отрезки на плоскости $\mathbb{R}^2$, которые при $\ell_j \cap \ell_i = \emptyset$, $j \neq i$, разбивают развертку R на $2n$ невыпуклых *фундаментальных шестиугольников* – прообразов фундаментальных областей группы ptt . Прообразы отрезков ℓ_i , которые изначально были взяты на гранях α_i пирамиды Π , расположенные в смежных шестиугольниках развертки R , зеркально симметричны относительно их общей стороны.

Пусть кусочно линейная поверхность $\bar{Z} \subset \mathbb{R}^3$ метрически задана. Тогда ее развертка $R \subset \mathbb{R}^2$ метрически задана. Задан ее угол $\angle A$. Для него имеет место равенство $\angle A = \varphi + \psi = \text{const}$. Для слагаемых φ и ψ выполнена система неравенств (**).

Возьмем произвольную гладкую кривую τ_1 , все внутренние точки которой расположены внутри того же шестиугольника развертки R , что и точки прообраза ребра ℓ_1 , и которая обладает общими концами с прообразом ребра ℓ_1 . Обозначим через φ^* и ψ^* углы, которые составляет касательная в произвольной точке кривой τ_1 со сторонами развертки R , проходящими через ее вершину A . Выполнение неравенств (**) для углов φ^* и ψ^* следует из $\varphi^* + \psi^* = \angle A = \varphi + \psi$. Наше главное требование – в каждой точке кривой τ_1 углы φ^* и ψ^* удовлетворяют неравенствам (*). Далее, во всех фундаментальных шестиугольниках развертки R возьмем гладкие кривые τ_i , конгруэнтные гладкой кривой τ_1 , пользуясь единственным правилом: в смежных шестиугольниках гладкие кривые τ_i зеркально симметричны относительно их общей стороны. Теперь аналогично [2] строим изометрическое вложение развертки $f^*: R \rightarrow Z^*$, где $Z^* \subset \mathbb{R}^3$.

ТЕОРЕМА. *Кусочно линейная ворончатая поверхность $\bar{Z}$, построенная с помощью прямолинейного ребра ℓ_1 , взятого на грани α_1 пирамиды Π , допускает изометрическое вложение в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ в виде кусочно гладкой ворончатой поверхности Z^* , состоящей из $2n$ цилиндрических поверхностей и обладающей $2n$ конгруэнтными криволинейными¹ ребрами γ_i^* , прообразами которых являются построенные выше гладкие кривые τ_i , удовлетворяющие неравенствам (*).*

Рассмотрим специальную вариацию прообраза ребра ℓ_1 на развертке R . Будем предполагать, что варьируемая кривая, обозначим ее τ_1 , зависит от параметра t , $0 \leq t \leq 1$. В процессе вариации выполняются следующие условия: варьируемая кривая τ_1 находится внутри того же шестиугольника, что и прообраз ребра ℓ_1 ; концы варьируемой кривой τ_1 остаются неподвижными – они совпадают с концами прообраза ребра ℓ_1 ; варьируемая кривая τ_1 остается гладкой; углы φ^* и ψ^* , которые составляет касательная к варьируемой кривой τ_1 в любой ее точке со сторонами развертки R , проходящими через вершину A , удовлетворяют неравенствам (*). Далее, во всех шестиугольниках развертки R построим варьируемые гладкие кривые τ_i , $i = 1, \dots, 2n$, конгруэнтные варьируемой гладкой кривой τ_1 , пользуясь единственным правилом: при каждом фиксированном t , $0 \leq t \leq 1$, в смежных шестиугольниках развертки R кривые τ_i зеркально симметричны относительно их общей стороны.

СЛЕДСТВИЕ. *При указанных выше условиях любая вариация прообраза ребра ℓ_1 сопровождается вариацией кривой γ_1^* , задающей изгибание поверхности Z^* .*

Список литературы

- [1] А. В. Погорелов, *Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек*, Наука, М., 1986; 2-е изд., Наукова думка, Киев, 1998. [2] М. И. Штогрин, *УМН*, **62:5** (2007), 173–174.

М. И. Штогрин (M. I. Shtogrin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: stogrin@mi.ras.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
10.02.2008

¹Ребра γ_i^* являются пространственными кривыми, обладающими ненулевым кручением.