Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Алексенко, А. Ю. Плахов, Об аэродинамической задаче Ньютона для невыпуклых тел, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 5, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 10:11:54

Об аэродинамической задаче Ньютона для невыпуклых тел

А. И. Алексенко, А. Ю. Плахов

Задача о теле наименьшего сопротивления заключается в следующем. Рассматривается евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z . На тело – связное компактное множество с кусочно гладкой границей – падает однородный поток точечных частиц со скоростью $(0, 0, -1)$. Частицы, налетающие на тело, совершают одно или несколько упругих отражений от его поверхности и затем движутся свободно. Между собой частицы не взаимодействуют. Каждая частица передает телу некоторый импульс; тем самым создается сила давления на тело, которую принято называть (аэродинамическим) сопротивлением. Задача заключается в том, чтобы из некоторого класса допустимых тел выбрать тело с наименьшим сопротивлением.

Впервые эта задача была рассмотрена Ньютоном в 1686 г. в классе *выпуклых* и *осесимметричных* тел, вписанных в фиксированный прямой круговой цилиндр. Ось симметрии тела и ось цилиндра совпадают с координатной осью Oz . Решение представляет собой тело вращения, ограниченное сверху и снизу плоскими дисками. В начале 1990-х годов вновь возник интерес к этой задаче. В работах Буттаццо, Каволя, Лашан-Робера и других рассмотрен более широкий класс тел, не обладающих свойством симметрии (т. е. вписанных в заданный цилиндр и выпуклых). Оказалось, что решение в этом классе не совпадает с решением Ньютона (см. работы [1]–[5]).

Если опустить оба свойства симметрии и выпуклости, то получится класс произвольных тел, вписанных в цилиндр. Предполагается, что тело из данного класса содержится в цилиндре и содержит одно из перпендикулярных круговых сечений цилиндра. Доказано, что нижняя грань сопротивления в этом классе равна нулю [6].

Цель настоящей работы – рассмотреть четвертый логически возможный случай: класс тел, обладающих осевой симметрией, но (вообще говоря) невыпуклых. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, z рассмотрим прямоугольник $[0, 1] \times [0, h]$ и множество F , вписанное в этот прямоугольник. Другими словами, F принадлежит прямоугольнику и содержит точки каждой из его четырех сторон. Кроме того, F замкнуто, связно, симметрично относительно оси Oz , имеет кусочно гладкую границу и обладает свойством регулярности бильярдного рассеяния в $\mathbb{R}^2 \setminus F$. Это свойство заключается в том, что для почти всех $x \in [0, 1]$ движение бильярдной частицы, имеющей координаты $x(t) = x$, $z(t) = -t$ при $t \leq -h$, определено при всех $t \in \mathbb{R}$. Частица совершает конечное число отражений от границы ∂F , а затем движется свободно с некоторой скоростью $v_F(x) \in S^1$. В свойство регулярности мы включаем также условие о том, что $v_F(x) = (v_F^x(x), v_F^z(x))$ есть измеримая функция от x . Обозначим $\mathcal{F}_h$ класс всех таких множеств F . Сопротивление тела Ω_F , полученного вращением множества $F \in \mathcal{F}_h$ вокруг оси Oz , равно $-2\pi\rho(0, 0, R(F))$, где ρ – плотность потока, а $R(F) = \int_0^1 (1 + v_F^z(x))x dx$. Наша задача – минимизировать сопротивление в классе тел вращения Ω_F , $F \in \mathcal{F}_h$; другими словами, найти $\inf_{F \in \mathcal{F}_h} R(F)$.

Обозначим $\mathcal{F}_h^{\text{conv}}$ класс выпуклых множеств $F \in \mathcal{F}_h$. Верхняя часть границы каждого множества $F \in \mathcal{F}_h^{\text{conv}}$ есть график некоторой функции $z = h - f_F(|x|)$, где $f_F(0) = 0$, $f_F(1) \leq h$, функция f_F выпукла на $[0, 1]$ и монотонно не убывает. Определим *модифицированный закон отражения* от границы множества $F \in \mathcal{F}_h^{\text{conv}}$ следующим образом. Частица первоначально движется согласно $x(t) = x \in [-1, 1]$, $z(t) = -t$, а после отражения приобретает скорость $\hat{v}_F(x)$, параллельную касательной к ∂F в точке отражения: $\hat{v}_F(x) = (\hat{v}_F^x(x), \hat{v}_F^z(x)) = (\text{sgn } x, -f_F'(|x|))/\sqrt{1 + f_F'^2(|x|)}$.

Соответствующий функционал сопротивления имеет вид $\widehat{R}(F) = \int_0^1 (1 + \widehat{v}_F^z(x))x \, dx$.

Таким образом, $\widehat{R}(F)$ есть сопротивление выпуклого осесимметричного тела Ω_F для процесса рассеяния, при котором отраженная частица движется по касательной.

Следующая теорема позволяет свести задачу о минимизации сопротивления R в классе тел вращения к задаче о минимизации $\widehat{R}$ в классе *выпуклых* тел вращения.

ТЕОРЕМА 1. $\inf_{F \in \mathcal{F}_h} R(F) = \inf_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{conv}}} \widehat{R}(F)$.

Эта теорема вытекает из двух лемм, доказательство которых мы опускаем.

ЛЕММА 1. Пусть $F \in \mathcal{F}_h$. (Заметим, что выпуклая оболочка $\text{conv } F$ принадлежит $\mathcal{F}_h^{\text{conv}}$). Справедливо неравенство $\widehat{R}(\text{conv } F) \leq R(F)$.

ЛЕММА 2. Пусть $F \in \mathcal{F}_h^{\text{conv}}$. Тогда существует последовательность невыпуклых множеств $F_n \in \mathcal{F}_h$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R(F_n) = \widehat{R}(F)$.

Поиск минимума $\widehat{R}$ сводится к минимизации функционала $\int_0^1 \left(1 - \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}\right)x \, dx$

в классе выпуклых и неубывающих на $[0, 1]$ функций f , удовлетворяющих соотношениям $f(0) = 0$, $f(1) \leq h$. Эта минимизация проводится с помощью принципа максимума Понтрягина; в результате получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Выполнено равенство

$$\inf_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{conv}}} \widehat{R}(F) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} (8 - 2c^{2/3} - 3c^{4/3}) \sqrt{1 - c^{2/3}} + \frac{3c^2}{16} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - c^{2/3}}}{c^{1/3}} \right),$$

где величина c однозначно определяется по параметру h :

$$h = \int_c^1 \sqrt{\left(\frac{x}{c}\right)^{2/3} - 1} \, dx = -\frac{3}{8} \left((c^{1/3} - 2c^{-1/3}) \sqrt{1 - c^{2/3}} - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - c^{2/3}}}{c^{1/3}} \right) \right).$$

Множество $\widehat{F}_h \in \mathcal{F}_h^{\text{conv}}$, минимизирующее функционал $\widehat{R}$, задается соотношениями $0 \leq z \leq h$, если $|x| \leq c$, и $0 \leq z \leq h - \int_c^x \sqrt{(t/c)^{2/3} - 1} \, dt$, если $c < |x| \leq 1$. Не существует множества, на котором достигается минимум функционала R ; однако для всякой минимизирующей последовательности множеств $F_h^n \in \mathcal{F}_h$ граница выпуклой оболочки $\partial(\text{conv } F_h^n)$ при $n \rightarrow \infty$ аппроксимирует границу $\partial \widehat{F}_h$ в классе C^1 .

Обозначим $\mathcal{R}(h) := \inf_{F \in \mathcal{F}_h} R(F)$ и $\mathcal{R}_N(h) := \inf_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{conv}}} R(F)$ наименьшее значение сопротивления для нашей задачи и задачи Ньютона соответственно. Справедливы следующие асимптотические соотношения: $\mathcal{R}(0^+) = (1/2)\mathcal{R}_N(0^+) = 1/2$; $\mathcal{R}(h) = (1/4)\mathcal{R}_N(h)(1 + o(1)) = (27/128)(1 + o(1))/h^2$ при $h \rightarrow +\infty$.

Список литературы

- [1] G. Buttazzo, B. Kawohl, *Math. Intelligencer*, **15**:4 (1993), 7–12. [2] F. Brock, V. Ferone, B. Kawohl, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **4**:6 (1996), 593–599. [3] T. Lachand-Robert, M. A. Peletier, *Math. Nachr.*, **226**:1 (2001), 153–176. [4] T. Lachand-Robert, E. Oudet, *SIAM J. Optim.*, **16**:2 (2005), 368–379. [5] D. Bucur, G. Buttazzo, *Variational methods in shape optimization problems*, Birkhäuser, Boston, MA, 2005. [6] А. Ю. Плахов, *УМН*, **58**:1 (2003), 195–196.

А. И. Алексенко (A. I. Aleksenko)

Университет Авейро, Португалия

E-mail: alena-aleksenko@rambler.ru

Представлено В. М. Тихомировым

Принято редколлегией

17.03.2008

А. Ю. Плахов (A. Yu. Plakhov)

Университет Аберстунт, Великобритания

E-mail: axp@aber.ac.uk