Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Кузнецов, Различение гипотез в непрерывной
схеме с альтернативными направлениями, *УМН*, 2008,
том 63, выпуск 2, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9190>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:38:40

Различение гипотез в непрерывной схеме с альтернативными направлениями

Ю. А. Кузнецов

Пусть в каждый момент времени t имеется возможность наблюдать или процесс $X^1 = (X_t^1)_{t \geq 0}$ с $dX_t^1 = I(\theta = 1)dt + W_t^1$, или процесс $X^2 = (X_t^2)_{t \geq 0}$ с $dX_t^2 = I(\theta = 2)dt + W_t^2$. Здесь $W^1 = (W_t^1)_{t \geq 0}$ и $W^2 = (W_t^2)_{t \geq 0}$ — два независимых броуновских движения. Случайная величина θ принимает одно из трех значений 0, 1 или 2. При этом событие $\theta = 0$ интерпретируется как отсутствие “цели” на первом и втором направлениях. Событие $\theta = i$ означает наличие “цели” на i -м направлении ($i = 1, 2$). Пусть $T_i(t)$ — общее время наблюдения i -го направления ($i = 1, 2$). При этом $T_1(t) + T_2(t) = t$, где t — общее время наблюдения. Задача состоит в нахождении $(T_1(t), T_2(t))$ (управления), момента остановки τ и окончательного решения d относительно θ , при которых достигает минимума *функция риска*

$$R(s) = E(c\tau + \alpha_1 I(\theta = 1, 2; d = 0) + \alpha_2 I(\theta = 0; d = 1)),$$

где $s = (T_1(t), T_2(t), \tau, d)$ — *допустимая стратегия* (*допустимой стратегией* называется такая четверка $(T_1(t), T_2(t), \tau, d)$, что выполнены следующие условия: $T_1(0) = T_2(0) = 0$, $T_1(t) + T_2(t) = t$, $T_1(t)$, $T_2(t)$ — неубывающие функции, $\{T_1(t) \leq t_1, T_2(t) \leq t_2\} \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}$, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{T_1(t), T_2(t)}$ для всех t , t_1 и t_2 , а d является $\mathcal{F}_{T_1(\tau), T_2(\tau)}$ -измеримой, где $\mathcal{F}_{t_1, t_2} = \sigma(W_{u_1}^1, W_{u_2}^2, u_1 \in [0, t_1], u_2 \in [0, t_2])$). Здесь α_i — платы за принятие неправильных решений ($i = 1, 2$) и c — плата за наблюдения.

Задача впервые была поставлена и изучалась в [1].

Далее будем считать, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Положим $\pi_i(t) = P(\theta = i \mid \mathcal{F}_{T_1(t), T_2(t)})$, $i = 0, 1, 2$.

Поскольку при остановке в момент τ окончательное решение d определяется однозначно в зависимости от $\pi_0(\tau)$, то задача эквивалентна минимизации функции риска

$$R(s) = E(c\tau + \min(\pi_0(d), 1 - \pi_0(d))),$$

где $s = (T_1(t), T_2(t), \tau)$. Минимальный риск обозначим через $\rho(\pi_1, \pi_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Управление $(T_1(t), T_2(t))$ называется *стандартным*, если происходит наблюдение процесса X_t^1 (первого направления), когда $\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$, и процесса X_t^2 (второго направления), когда $\varphi_2(t) > \varphi_1(t)$, где $\varphi_i(t) = \pi_i(t)/\pi_0(t)$, $i = 1, 2$.

ТЕОРЕМА 1. В классе марковских стандартных стратегий оптимальное правило остановки определяется как момент первого попадания вектора $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ в некоторую область “остановки наблюдений” ($A \cup D$ на рис. 1). Область продолжения наблюдений разбивается на области возможных переключений между направлениями ($C_1 \cup C_2$) и область, где возможно наблюдение лишь одного направления ($B_1 \cup B_2$).

Найдем границы области продолжения наблюдения в той части плоскости, где наблюдается только одно направление.

ТЕОРЕМА 2. Границы γ_1 и γ_2 вместе с неизвестной функцией риска $\rho(\varphi_1, \varphi_2)$ в области B_1 могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} \rho'_{\varphi_2}(\varphi_1, \varphi_2)\varphi_2^2/(1 + \varphi_1 + \varphi_2) + (1/2)\rho''_{\varphi_2\varphi_2}(\varphi_1, \varphi_2)\varphi_2^2 = -c, \\ \rho(\varphi_1, \gamma_1(\varphi_1)) = \rho_0(\varphi_1, \gamma_1(\varphi_1)), \\ \rho(\varphi_1, \gamma_2(\varphi_1)) = \rho_0(\varphi_1, \gamma_2(\varphi_1)), \\ \rho'_{\varphi_2}(\varphi_1, \gamma_1(\varphi_1)) = (\rho_0)'_{\varphi_2}(\varphi_1, \gamma_1(\varphi_1)), \\ \rho'_{\varphi_2}(\varphi_1, \gamma_2(\varphi_1)) = (\rho_0)'_{\varphi_2}(\varphi_1, \gamma_2(\varphi_1)), \end{cases}$$

где $\rho_0(\varphi_1, \varphi_2) = \min(\pi_0, 1 - \pi_0) = \min((\varphi_1 + \varphi_2)/(1 + \varphi_1 + \varphi_2), 1/(1 + \varphi_1 + \varphi_2))$.

Рис. 1

Решения $\gamma_1(\varphi_1)$ и $\gamma_2(\varphi_1)$ этой системы могут быть получены следующим образом. Для каждого фиксированного $k = 1 + \varphi_1$ относительно A^* и B^* решаем систему

$$\begin{cases} 2 = C(\psi(B^*) - \psi(A^*)), \\ C(\Psi(B^*) - \Psi(A^*)) - C(B^* - A^*)\psi(A^*) = 2 - 2B^* - k, \end{cases}$$

при этом $C = 2kc$, $\Psi(\pi) = (1 - 2\pi) \ln(\pi/(1 - \pi))$, $\psi(\pi) = \Psi'(\pi)$, и по полученным A^* и B^* находятся границы $\gamma_1(\varphi_1) = (A^*/(1 - A^*))(1 + \varphi_1)$, $\gamma_2(\varphi_1) = (B^*/(1 - B^*))(1 + \varphi_1)$.

Заметим, что полученная система с A^* и B^* аналогична системе в одномерной задаче распознавания гипотез [2] и полностью совпадает с ней при $k = 1$ ($\varphi_1 = 0$). Этот факт является следствием того, что в области, где возможно наблюдение одного направления, задача становится одномерной, а значит, для границ получаются уравнения, аналогичные приведенным в [2].

ТЕОРЕМА 3. Граница γ_2 , разделяющая область остановки и область продолжения наблюдений в области C_1 , задается с помощью кривой $\gamma_2 = \gamma_2(\varphi_1)$, которая может быть найдена вместе с функцией риска $\rho(\varphi_1, \varphi_2)$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \rho'_{\varphi_2}(\varphi_1, \varphi_2)\varphi_2^2/(1 + \varphi_1 + \varphi_2) + (1/2)\rho''_{\varphi_2\varphi_2}(\varphi_1, \varphi_2)\varphi_2^2 = -c, \\ \rho'_{\varphi_1}(\varphi_1, \varphi_1) = \rho'_{\varphi_2}(\varphi_1, \varphi_1), \\ \rho(\varphi_1, \gamma_2(\varphi_1)) = \rho_0(\varphi_1, \gamma_2(\varphi_1)), \\ \rho'_{\varphi_2}(\varphi_1, \gamma_2(\varphi_1)) = (\rho_0)'_{\varphi_2}(\varphi_1, \gamma_2(\varphi_1)), \end{cases}$$

где $\rho_0(\varphi_1, \varphi_2) = \min(\pi_0, 1 - \pi_0) = \min((\varphi_1 + \varphi_2)/(1 + \varphi_1 + \varphi_2), 1/(1 + \varphi_1 + \varphi_2))$.

Решая эту систему, получаем для границы $\tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}_2(\varphi_1)$ (области C_1) дифференциальное уравнение

$$\frac{\tilde{\gamma}_2'}{\tilde{\gamma}_2^2} = \frac{(1/\varphi_1 - 2 \ln \varphi_1) - (1/\tilde{\gamma}_2 - 2 \ln \tilde{\gamma}_2)}{(\varphi_1 - \tilde{\gamma}_2)(1 + \varphi_1 + \tilde{\gamma}_2)}$$

с начальным условием $\tilde{\gamma}_2(\varphi^*) = \gamma_2(\varphi^*)$, где φ^* таково, что $\gamma_1(\varphi^*) = \varphi^*$.

Автор благодарит А. Н. Ширяева за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] А. Н. Ширяев, *Trans. 3rd Prague Conf. Information Theory, Statist. Decision Functions, Random Processes* (Liblice, 1962), Czechoslovak Acad. Sci., Prague, 1964, 657–681. [2] А. Н. Ширяев, *Статистический последовательный анализ*, Наука, М., 1976.

Ю. А. Кузнецов (Yu. A. Kuznetsov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: yu_ku77@mail.ru

Представлено А. В. Булинским

Принято редколлегией

17.02.2008