Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Шелкович, Сингулярные решения систем законов сохранения типа δ - и δ' -ударных волн и процессы переноса и концентрации, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 3, 73–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:24:42

УДК 517.9

Сингулярные решения систем законов сохранения типа δ - и δ' -ударных волн и процессы переноса и концентрации

В. М. Шелкович

Дается обзор некоторых результатов и проблем, связанных с теорией обобщенных решений квазилинейных систем законов сохранения, в которых могут возникать дельта-образные сингулярности. Это так называемые решения типа δ -ударных волн и введенные недавно решения типа $\delta^{(n)}$ -ударных волн, $n = 1, 2, \dots$, которые не вписываются в классическую теорию Лакса и Глимма. Подробно изучается случай δ - и δ' -ударных волн. Чтобы работать с такими решениями, развита специальная аналитическая техника. Для их определения вводятся специальные интегральные тождества (расширяющие понятие слабого решения) и находятся условия Ренкина–Гюгонио. Для некоторых типичных систем законов сохранения строятся решения задач Коши. Исследованы многомерные системы законов сохранения (среди них система газовой динамики без давления), допускающие решения типа δ -ударных волн. Рассмотрен геометрический аспект таких решений: они связаны с процессами переноса и концентрации и для них выведены балансовые законы переноса “объема”, “площади” на фронты δ - и δ' -ударных волн. Для системы “газовой динамики без давления” эти законы являются законами переноса массы и импульса. Рассмотрен также алгебраический аспект таких решений: для них построены функции потока, которые, будучи нелинейными, являются, однако, однозначно определенными шварцевскими распределениями. Таким образом, сингулярное решение задачи Коши порождает алгебраические соотношения между его компонентами (распределениями).

Библиография: 99 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	74
2. Решения типа δ -ударных волн и условия Ренкина–Гюгонио.....	87
2.1. Случай системы (1.7).....	87
2.2. Случай системы (1.8).....	91
3. Решения типа δ' -ударных волн и условия Ренкина–Гюгонио.....	93

Работа выполнена при поддержке DFG (проекты 436 RUS 113/823 и 436 RUS 113/895) и РФФИ (грант № 05-01-00912).

© В. М. Шелкович, 2008

4. Геометрический и физический аспекты сингулярных решений	96
4.1. δ -ударные волны. Случай системы (1.7)	96
4.2. δ -ударные волны. Случай системы (1.8)	98
4.3. Система уравнений газовой динамики без давления (1.9)	98
4.4. δ' -ударные волны. Случай системы (1.21)	100
5. Задачи Коши, допускающие решения типа δ - и δ' -ударных волн	101
5.1. Слабое асимптотическое решение	101
5.2. Слабое асимптотическое решение задачи Коши, связанной с распространением сингулярного фронта	102
5.3. Распространение δ -ударной волны в системе (1.10)	104
5.4. Распространение δ -ударной волны в системе типа Кейфитц–Кранцера (1.28)	108
5.5. Распространение δ -ударной волны в системе газовой динамики без давления (1.9)	113
5.6. Распространение δ' -ударной волны в системе (1.22)	113
5.7. Независимость сингулярного решения от аппроксимаций	114
6. Задача Римана, допускающая решения в виде ударных волн, δ -, δ' -ударных волн и вакуумных состояний	115
6.1. Метод исчезающей вязкости	115
6.2. Слабый предел решения задачи (6.2), (6.1)	116
6.3. Решения типа δ - и δ' -ударных волн задачи Римана (1.22), (6.1) ..	117
6.4. Вакуумные состояния в решении задачи Римана (1.22), (6.1) ...	120
7. Алгебраические аспекты сингулярных решений	121
7.1. Функции потоков от сингулярных решений	121
7.2. Специфические свойства сингулярных суперпозиций	126
8. Мотивированность определений решений типа δ - и δ' -ударных волн ...	128
9. δ -ударные волны в многомерном случае	131
9.1. Некоторые факты, связанные с движущимися поверхностями и распределениями, сосредоточенными на них	131
9.2. Решения типа δ -ударных волн и условия Ренкина–Гюгоньо	134
9.3. Геометрический и физический аспекты многомерных решений типа δ -ударных волн	137
10. Заключение	139
Список литературы	141

1. Введение

Традиционно считается, что решение типа δ -ударной волны было впервые описано Д. Корчинским в его неопубликованной диссертации [1] в 1977 г. Однако еще в 1973 г. решение такого типа, а также условие Ренкина–Гюгоньо для уравнения неразрывности (первое уравнение в (2.15)) были получены из физических соображений в книге Я. Б. Зельдовича и А. Д. Мышкиса [2; §§ 7, 12]. А в 1979 г. А. Н. Крайко [3] рассмотрел “новый тип поверхностей разрыва, которые необходимо вводить в рамках некоторых моделей сред, лишенных собственного давления”, и нашел условия Ренкина–Гюгоньо на них. Выведенные им условия являются условиями Ренкина–Гюгоньо для решения типа δ -ударной волны, системы уравнений “газовой динамики без давления” (1.9).

Задачи, связанные с решениями типа δ -ударной волны, интенсивно изучаются в последние 10 лет (см. ниже многочисленные ссылки).

Для систем законов сохранения в работах [4]–[6] была впервые введена концепция нового класса сингулярных решений типа $\delta^{(n)}$ -ударных волн, где $\delta^{(n)}$ – n -я производная дельта-функции Дирака, $n = 1, 2, \dots$. Грубо говоря, решение типа $\delta^{(n)}$ -ударных волн – это решение *квазилинейной системы законов сохранения*, компоненты которого содержат производные дельта-функции до n -го порядка. В этих же работах был систематически исследован случай δ' -ударных волн ($n = 1$). В [7] было построено решение задачи Римана для типичной системы законов сохранения, которая допускает *решения типа δ -, δ' -ударных волн, а также вакуумные состояния*.

В настоящей работе мы даем обзор некоторых результатов и проблем, связанных с теорией “неклассических” обобщенных решений квазилинейных систем законов сохранения типа δ - и δ' -ударных волн.

Вначале напомним несколько известных фактов, относящихся к классическим слабым решениям.

L^∞ -решения. Рассмотрим задачу Коши для системы законов сохранения в одномерном случае:

$$\begin{cases} U_t + (F(U))_x = 0 & \text{в } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ U = U^0 & \text{в } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $U^0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ – заданные гладкие вектор-функции и $U = U(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Здесь F – *функция потока*, связанная с системой уравнений (1.1).

Как известно, даже в случае гладких (а тем более, разрывных) начальных данных $U^0(x)$, вообще говоря, не существует гладкого глобального по времени решения системы (1.1). Как сказано в книге Л.К. Эванса [8; п. 11.1.1], “самая большая трудность при изучении таких систем – это найти подходящее понятие слабого решения для начальной задачи (1.1)”; “... резонно постараться разработать подход, при котором функция меньшей гладкости “решала” бы эту начальную задачу в каком-либо смысле” [8; п. 3.4.1.а]. Известно, что уравнение в частных производных может не иметь смысла, даже если U – дифференцируемая функция. “Тем не менее, временно допустив, что U – гладкая, можно переписать задачу так, чтобы полученное выражение не содержало производных от U ” [8; п. 3.4.1.а]. Идея заключается в следующем: скалярно умножить уравнения в частных производных из (1.1) на гладкую функцию φ , а затем перекинуть производные на φ , интегрируя по частям” [8; пп. 3.4.1.а, 11.1.1]. Таким образом выводится интегральное тождество, которое дает следующее определение L^∞ -обобщенного решения задачи Коши (1.1): $U \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty); \mathbb{R}^m)$ называется *обобщенным решением* задачи Коши (1.1), если для всех основных вектор-функций с компактным носителем $\tilde{\varphi}: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ справедливо интегральное тождество

$$\int_0^\infty \int (U \cdot \tilde{\varphi}_t + F(U) \cdot \tilde{\varphi}_x) dx dt + \int U^0(x) \cdot \tilde{\varphi}(x, 0) dx = 0, \quad (1.2)$$

где $\cdot$ – скалярное произведение векторов, а $\int f(x) dx$ обозначает несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. “Это тождество, которое мы вывели в предположении, что U – гладкое решение, имеет смысл даже тогда, когда U всего лишь ограничена” [8; п. 11.1.1].

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [8; п. 11.1.1]). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ – область, разделенная гладкой кривой Γ на левую и правую части $\Omega_{\mp}$. Предположим, что обобщенное решение $U(x, t)$ системы (1.1) является гладким по обе стороны от кривой Γ , на которой U имеет простые разрывы. Тогда условия Ренкина–Гюгонио

$$[F(U)]_{\Gamma} \nu_1 + [U]_{\Gamma} \nu_2 = 0 \quad (1.3)$$

выполняются вдоль кривой Γ , где $\mathbf{n} = (\nu_1, \nu_2)$ – единичная нормаль к этой кривой, направленная от Ω_- в Ω_+ , $[F(U)] = F(U_-) - F(U_+)$ и $[U] = U_- - U_+$ – скачки $F(U)$ и U на линии разрыва Γ , $U_{\mp}$ – соответственно левое и правое значения U на Γ . Если $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t)\}$, где $\phi(t) \in C^1(0, +\infty)$, то

$$\mathbf{n} = (\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\dot{\phi}_i(t))^2}} (1, -\dot{\phi}_i(t)) \quad (1.4)$$

и (1.3) имеет вид

$$[F(U)]_{\Gamma} = \dot{\phi}(t)[U]_{\Gamma}, \quad (1.5)$$

где $(\dot{\cdot}) = \frac{d}{dt}(\cdot)$.

Геометрический аспект обобщенного решения выражается следующим образом: если $U \in L^{\infty}(\mathbb{R} \times (0, \infty); \mathbb{R}^m)$ – обобщенное решение задачи Коши (1.1), имеющее компактный носитель по x , то интеграл этого решения по всему пространству, т. е.

$$\int U(x, t) dx = \int U^0(x) dx, \quad t \geq 0, \quad (1.6)$$

не зависит от времени. Для систем законов сохранения, которые имеют физический смысл, такие интегралы можно интерпретировать как полный объем, площадь, массу, импульс, энергию и т. д.

Решения типа δ -ударных волн. Рассмотрим два частных случая систем законов сохранения:

$$L_1[u, v] = u_t + (F(u, v))_x = 0, \quad L_2[u, v] = v_t + (G(u, v))_x = 0 \quad (1.7)$$

и

$$L_1[u, v] = v_t + (G(u, v))_x = 0, \quad L_2[u, v] = (uv)_t + (H(u, v))_x = 0, \quad (1.8)$$

где функции потока $F(u, v)$, $G(u, v)$, $H(u, v)$ являются гладкими и линейными по v ; $u = u(x, t)$, $v = v(x, t) \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}$. Большинство известных автору одномерных систем законов сохранения, допускающие решения типа δ -ударных волн, являются частными случаями систем (1.7) или (1.8).

В [9]–[34] показано, что для некоторых частных случаев систем (1.7), (1.8) могут возникать “неклассические” ситуации, когда, в отличие от результатов Дж. Глимма и П. Лакса (см. [35], [36]), решение задачи Римана не имеет слабых L^∞ -решений или имеет их для некоторых частных начальных данных. В этих “неклассических” ситуациях линейная компонента v решения *может содержать дельта-функции Дирака*, а первая компонента u имеет ограниченную вариацию. В этих случаях, чтобы решить задачу Коши, нужно ввести новые сингулярные решения типа δ -ударных волн, *линейная* компонента которых имеет вид $v(x, t) = \hat{v}(x, t) + e(x, t) \delta(\Gamma)$, где Γ – граф в верхней полуплоскости $\{(x, t): x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$, $\hat{v} \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty); \mathbb{R})$, $e \in C(\Gamma)$, а *нелинейная* компонента решения u принадлежит $L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty); \mathbb{R})$ (структуру решения типа δ -ударной волны см. ниже в (1.19) и в определении 2.1).

В частности, во многих статьях (см. [9]–[13], [16], [18], [21], [32], [34]) рассматриваются решения типа δ -ударных волн для одномерной *системы газовой динамики без давления*

$$v_t + (vu)_x = 0, \quad (vu)_t + (vu^2)_x = 0, \quad (1.9)$$

которая является частным случаем (1.8) при $G(u, v) = uv$, $H(u, v) = u^2v$ (здесь $v(x, t) \geq 0$ – плотность, а $u(x, t)$ – скорость). Многомерный случай этой системы исследован, например, в [9], [32], [37]–[43].

Поскольку “неклассическое” решение типа δ -ударной волны *не удовлетворяет стандартным интегральным тождествам* (1.2), нужно понять, в каком смысле оно может удовлетворять *нелинейной* системе уравнений в частных производных, т. е. найти *подходящее определение такого слабого решения*. Кроме того, необходимо развить специальную аналитическую технику для работы с такими сингулярными решениями. В этом же контексте возникает проблема определения и интерпретации произведения распределений (или, более общо, определения суперпозиции распределений).

Существует много подходов к решению подобных задач. Перечислим некоторые из них.

В [20] для построения решения типа δ -ударной волны для системы

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad v_t + (g(u)v)_x = 0 \quad (1.10)$$

(здесь $F(u, v) = f(u)$, $G(u, v) = vg(u)$) эта система сводится к системе уравнений Гамильтона–Якоби, после чего используется формула Лакса–Олейник [8; 3.4.2]. В [19] решение типа δ -ударной волны задачи Римана для системы (1.10) строится как предел по вязкости самоподобного решения.

В [27] для построения решения типа δ -ударной волны для частного случая $g(u) = f'(u)$ (где $F(u, v) = f(u)$, $G(u, v) = f'(u)v$) используется *умножение распределений* в смысле “средней суперпозиции” Вольперта [44]. Обобщая понятие “средней суперпозиции” Вольперта [44], в [45] исследуется общий подход к определению *неконсервативного произведения* вида

$$g(u) \frac{du}{dx}, \quad (1.11)$$

где $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – локально ограниченная борелевская функция, $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – разрывная функция с ограниченной вариацией. В рамках подхода работы [45]

можно также рассматривать задачу Коши для нелинейных гиперболических систем в *неконсервативной* форме [27], [46]. Однако при этом определение обобщенного решения *зависит* от вида семейства непрерывных липшицевых путей, которое *не может быть получено* из самой гиперболической системы.

Длинную историю имеет проблема построения решения типа δ -ударной волны для известной системы Кейфитц–Кранцера

$$u_t + (u^2 - v)_x = 0, \quad v_t + \left(\frac{1}{3} u^3 - u \right)_x = 0 \quad (1.12)$$

(здесь $F(u, v) = u^2 - v$, $G(u, v) = (1/3)u^3 - u$). Эта специфическая система была детально изучена в [23], [26]. В [23] для построения *приближенных решений* были использованы теория умножения обобщенных функций Коломбо [47], [48], регуляризация Дафермоса–Ди Перны (в предположении, что существуют профили Дафермоса), а также метод ящичной аппроксимации (“box approximation”). Однако в этой работе *не определяется понятие точного решения* типа δ -ударной волны и поэтому остается неясным, в каком смысле слабый предел построенных *приближенных решений* удовлетворяет системе (1.12). Отметим, что только через 9 лет в [49] было доказано существование профилей Дафермоса для δ -ударных волн. Обобщение системы Кейфитц–Кранцера, в котором $1/3$ заменяется на $\gamma/3$, $0 < \gamma \leq 1$, обсуждается в [50]. В [51] выделяется класс задач, для которых можно построить асимптотические аппроксимации профилей Дафермоса. В частности, в этот класс попадает задача Римана для системы Кейфитц–Кранцера. И только в работе автора [29] было показано, что система Кейфитц–Кранцера (1.12) имеет *точное* решение типа δ -ударной волны (в смысле определения 2.1).

Здесь уместно упомянуть, что авторы работ [22]–[26], [51] различают понятия решения *типа δ -ударной волны* и решения *типа сингулярной ударной волны*, связывая последний тип решения с системами законов сохранения, типичным представителем которых является система Кейфитц–Кранцера (1.12). Однако в работе автора [52] было показано, что это один и тот же тип решений. Дело в том, что решения типа δ -ударной волны имеют *специфические* свойства, система Кейфитц–Кранцера (1.12) – прекрасный модельный пример, иллюстрирующий этот факт (см. подробнее п. 7.2).

В некоторых работах решение типа δ -ударной волны определяется как *обобщенное решение в смысле меры*¹. В рамках такого подхода в [33] решена задача Римана для частного случая системы (1.10) ($F(u, v) = u^2$, $G(u, v) = uv$); в [10] – для системы газовой динамики без давления (1.9), в [34] – для системы

$$v_t + (vf(u))_x = 0, \quad (vu)_t + (vuf(u))_x = 0 \quad (1.13)$$

(здесь $G(u, v) = vf(u)$, $H(u, v) = vuf(u)$). Приведем определение такого решения. Пусть $BM(\mathbb{R})$ – пространство ограниченных мер Бореля. Пара (u, v) , где $u \in L^\infty(L^\infty(\mathbb{R}, [0, \infty)))$, $v \in C(BM(\mathbb{R}), [0, \infty))$ и u измерима по мере v для почти всех $t \geq 0$, называется *обобщенным решением в смысле меры* задачи Римана для системы (1.13), если для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$

$$\int_0^\infty \int (\varphi_t + f(u)\varphi_x) v(dx, t) = 0, \quad \int_0^\infty \int u(\varphi_t + f(u)\varphi_x) v(dx, t) = 0.$$

¹Не смешивать с *мерозначными решениями* в смысле Ди Перны [53].

В рамках этого подхода решение типа δ -ударной волны ищется в виде

$$(u(x, t), v(x, t)) = \begin{cases} (u^-, v^-), & x < x(t), \\ (u_\sigma, w(t) \delta(x - x(t))), & x = x(t), \\ (u^+, v^+), & x > x(t), \end{cases} \quad (1.14)$$

где u^- , u^+ и u_σ – скорости перед линией разрыва, после нее и в точке разрыва соответственно, а $x(t) = \mu t$ – уравнение линии разрыва. При этом условия Ренкина–Гюгоньо имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = \mu, \quad \frac{dw}{dt} = [vf(u)] - \mu[v], \quad \frac{d(wu_\sigma)}{dt} = [vuf(u)] - \mu[uv], \quad (1.15)$$

где $\mu = f(u_\sigma)$. Отметим, что условия Ренкина–Гюгоньо не выводятся из интегральных тождеств, как это делается в классическом случае (см. теорему 1.1), а постулируются.

Такой же подход используется в [32], [37]–[39], [43] при построении решения типа δ -ударной волны в задаче Римана для многомерной системы газовой динамики без давления

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho U) = 0, \quad (\rho U)_t + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) = 0, \quad (1.16)$$

где $\rho \geq 0$ – плотность, U – скорость, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$, $\cdot$ – скалярное произведение векторов, $\otimes$ – тензорное произведение векторов. В этих работах построено решение с плоским фронтом.

В [18] для системы газовой динамики без давления (1.9) и для ее аналога (который имеет члены, отвечающие за гравитационное взаимодействие) строится глобальное решение типа δ -ударной волны с использованием аналога вариационного принципа Лакса–Олейник для скалярного закона сохранения. В этой статье также рассматривается задача Коши со случайными начальными данными. В [21] доказывается теорема единственности для энтропийного слабого решения системы газовой динамики без давления (1.9) в случае, когда начальные данные являются мерами Радона. В [40], [41] для 2-D системы газовой динамики без давления вводится понятие обобщенного решения в терминах мер Радона и решается задача распространения δ -ударной волны.

В [42] доказывается существование слабого глобального решения для многомерной системы уравнений газовой динамики без давления посредством введения лагранжевых координат и использования энтропийного условия Да-фермоса.

Отдельно упомянем теорию умножения распределений Коломбо [47], [48], которая применяется для определения сингулярных обобщенных решений нелинейных уравнений, в частности, сингулярных обобщенных решений законов сохранения [54]–[58] (см. также ссылки в упомянутых работах). Как известно [59], невозможно ввести ассоциативное и коммутативное произведение распределений, согласующееся с умножением на мультипликаторы. Поэтому в общем случае в теории Коломбо произведение распределений является не распределением, а так называемой *обобщенной функцией*. Однако в рамках этого подхода возникают следующие проблемы. Например, рассмотрим задачу Коши для

скалярного закона сохранения $u_t + (u^2/2)_x = 0$, $u(x, 0) = u^0(x)$. Если под обобщенным решением этой задачи понимать обобщенную функцию из алгебры Коломбо $\mathcal{G}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, где $u^0 \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$, то легко проверить, что *не существует* решения этой задачи типа ударной волны [55; § 19]. Тем не менее, в смысле стандартного интегрального тождества (1.2) такое классическое решение существует. Если же под решением указанной задачи понимать решение в *ассоциированном смысле* $u_t + (u^2/2)_x \approx 0$ (см. [47], [55]), то решение типа ударной волны существует, но оно *не единственно* [55; § 19]. Более того, в рамках этого подхода возникает еще одна проблема. Проиллюстрируем ее на простом примере. Известно, что решение u_ε уравнения Бюргерса $u_t + (u^2/2)_x = \varepsilon u_{xx}$ и решение u_μ уравнения Кортевега–де Фриза $u_t + (u^2/2)_x = \mu^2 u_{xxx}$ принадлежат к *разным типам*. Однако, поскольку в $\mathcal{D}'$ имеем $\varepsilon(u_\varepsilon)_{xx} \approx 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, и $\mu^2(u_\mu)_{xxx} \approx 0$, $\mu \rightarrow 0$, то обе обобщенные функции из алгебры Коломбо, порожденные u_ε и u_μ , в *ассоциированном смысле* являются решениями уравнения $u_t + (u^2/2)_x = 0$.

Тем не менее, в рамках подхода Коломбо можно решать задачи, которые допускают сингулярные решения [54]–[58]. В работах автора [60]–[62] были введены версии алгебр Коломбо, которые легко использовать для решения задач, возникающих в теории сингулярных решений нелинейных уравнений и систем законов сохранения.

В серии работ [14]–[17], [29]–[31], [63]–[65] был развит *метод слабых асимптотик* – новый асимптотический метод для описания *динамики распространения, взаимодействия и формирования* различных сингулярностей в решениях квазилинейных дифференциальных уравнений и систем законов сохранения. В рамках этого метода в одномерном случае были исследованы распространение и взаимодействие бесконечно узких солитонов [63], [65], ударных волн [63]–[67], δ -ударных волн [9], [14]–[17], [29]–[31], а также процесс распространения δ' -ударных волн [4], [5]. Были изучены процессы формирования ударной волны [68] и δ -ударной волны [69]. В [9] была решена задача Коши, связанная с распространением криволинейного фронта δ -ударной волны для неконсервативной формы многомерной системы уравнений газовой динамики без давления

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho U) = 0, \quad U_t + (U \cdot \nabla)U = 0.$$

В [70] для многомерного уравнения неразрывности рассматривалась возможность существования решения типа δ -ударной волны.

В [15]–[17], [30] в рамках *метода слабых асимптотик* были введены системы интегральных тождеств, которые дают *определения решений типа δ -ударных волн* для систем законов сохранения (1.7) (см. определение 2.1) и (1.8) (см. определение 2.2). В [9], [14]–[17], [29]–[31] были решены задачи Коши для некоторых случаев систем (1.7), (1.8) с начальными данными вида

$$\begin{aligned} u^0(x) &= u_+^0(x) + [u^0(x)]H(-x), \\ v^0(x) &= v_+^0(x) + [v^0(x)]H(-x) + e^0\delta(-x), \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $u_\pm^0(x)$, $v_\pm^0(x)$ – заданные гладкие функции, $[u] = u_- - u_+$, e^0 – заданная константа, $H(x)$ – функция Хевисайда, $\delta(x)$ – дельта-функция. В [16] отмечено, что в случае системы (1.8) с начальными данными (1.17) нужно ввести *начальную скорость* распространения сингулярного фронта

$$\dot{\phi}(0) = \phi^0, \quad (1.18)$$

где ϕ^0 – заданная константа (см. ниже определение 2.2). Дополнительные данные $\phi(0)$ играют такую же роль, как скорость в точке разрыва u_σ при подходе “*обобщенное решение в смысле меры*” (см. формулу (1.14) и замечание 2.1).

Такая задача Коши является классической задачей *описания распространения и взаимодействия фронтов нелинейной волны*, в данном случае δ -ударной волны. Для многомерного случая необходимо использовать дополнительно технику решения задач со свободной границей (“free boundary”). Эта техника описана в известных работах Э. Майды [71]–[73] для случая распространения многомерной ударной волны. Эти задачи имеют многочисленные приложения, поскольку физически интересные процессы обычно происходят на фронте волны.

Согласно [14]–[17], [29]–[31], решение типа δ -ударной волны для задач Коши (1.7), (1.17) и (1.8), (1.17), (1.18) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_+(x, t) + [u(x, t)]H(-x + \phi(t)), \\ v(x, t) &= v_+(x, t) + [v(x, t)]H(-x + \phi(t)) + e(t)\delta(-x + \phi(t)), \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $u_\pm(x, t)$, $v_\pm(x, t)$, $e(t)$, $\phi(t)$ – искомые функции, $x = \phi(t)$ – уравнение линии разрыва.

В частности, в [29] с помощью *метода слабых асимптотик* было доказано, что задача Коши для упомянутой выше системы Кейфитц–Кранцера (1.12) с начальными данными (1.17) имеет точное решение типа δ -ударной волны (1.19), которое удовлетворяет интегральным тождествам из определения 2.1. В [29], [31] (см. также [9]) было построено точное решение типа δ -ударной волны (1.19) задачи Коши для системы типа Кейфитц–Кранцера

$$u_t + (f(u) - v)_x = 0, \quad v_t + (g(u))_x = 0 \quad (1.20)$$

с начальными данными (1.17), где $f(u)$ и $g(u)$ – полиномы степени n и $n + 1$ соответственно, n – четное число (здесь $F(u, v) = f(u) - v$, $G(u, v) = g(u)$).

Решения типа δ' -ударных волн. В [4], [5] в рамках *метода слабых асимптотик* было введено *определение решения типа δ' -ударной волны* (определение 3.1) для системы законов сохранения

$$\begin{aligned} L_1[u] &= u_t + (f(u))_x = 0, \\ L_2[u, v] &= v_t + (f'(u)v)_x = 0, \\ L_3[u, v, w] &= w_t + (f''(u)v^2 + f'(u)w)_x = 0, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где $f(u)$ – гладкая функция, $f''(u) > 0$ и $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $w = w(x, t) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. В этих же работах с помощью *метода слабых асимптотик* было построено решение типа δ' -ударной волны задачи Коши для системы законов сохранения

$$u_t + (u^2)_x = 0, \quad v_t + 2(uv)_x = 0, \quad w_t + 2(v^2 + uw)_x = 0 \quad (1.22)$$

с сингулярными начальными данными

$$\begin{aligned} u^0(x) &= u_+^0(x) + [u^0(x)]H(-x), \\ v^0(x) &= v_+^0(x) + [v^0(x)]H(-x) + e^0\delta(-x), \\ w^0(x) &= w_+^0(x) + [w^0(x)]H(-x) + g^0\delta(-x) + h^0\delta'(-x), \end{aligned} \quad (1.23)$$

где $u_{\pm}^0(x)$, $v_{\pm}^0(x)$, $w_{\pm}^0(x)$ – заданные гладкие функции, e^0 , g^0 , h^0 – заданные константы, $\delta'(x)$ – производная дельта-функции. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_+(x, t) + [u(x, t)]H(-x + \phi(t)), \\ v(x, t) &= v_+(x, t) + [v(x, t)]H(-x + \phi(t)) + e(t)\delta(-x + \phi(t)), \\ w(x, t) &= w_+(x, t) + [w(x, t)]H(-x + \phi(t)) + g(t)\delta(-x + \phi(t)) \\ &\quad + h(t)\delta'(-x + \phi(t)), \end{aligned} \quad (1.24)$$

где $u_{\pm}(x, t)$, $v_{\pm}(x, t)$, $w_{\pm}(x, t)$, $\phi(t)$, $e(t)$, $g(t)$, $h(t)$ – искомые функции.

В [7] с помощью классического метода исчезающей вязкости была решена задача Римана для системы (1.22), которая допускает решения типа δ -, δ' -ударных волн, а также вакуумные состояния.

Условия допустимости для решений типа δ - и δ' -ударных волн. Как и в [19], [23], [33], в качестве условия допустимости для δ -ударных волн мы используем условие “сверхсжатия” (“overcompression” condition)

$$\begin{aligned} \lambda_1(u_+, v_+) &\leq \dot{\phi}(t) \leq \lambda_1(u_-, v_-), \\ \lambda_2(u_+, v_+) &\leq \dot{\phi}(t) \leq \lambda_2(u_-, v_-), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где $\lambda_1(u, v)$, $\lambda_2(u, v)$ – собственные числа характеристической матрицы системы законов сохранения (1.7) или (1.8), $\dot{\phi}(t)$ – скорость распространения фронта δ -ударной волны, u_- , v_- и u_+ , v_+ – соответственные значения u , v слева и справа от линии разрыва $x = \phi(t)$.

Так как система (1.21) имеет совпадающие собственные числа характеристической матрицы $\lambda = f'(u)$, то условие “сверхсжатия” (1.25) имеет вид

$$f'(u_+) \leq \dot{\phi}(t) \leq f'(u_-), \quad (1.26)$$

где $\dot{\phi}(t)$ – скорость δ' -ударной волны, u_- , u_+ – значения u соответственно слева и справа от линии разрыва.

Выполнение условий “сверхсжатия” (1.25) означает, что все 4 характеристики, исходящие слева и справа от разрыва, сходятся на линию разрыва. В силу этого разрывы имеют место в обоих компонентах решения u и v .

Если при выполнении условий “сверхсжатия” (1.25) ограничиться только рассмотрением разрывных решения типа ударных волн (см. также [74]), мы сразу же увидим, что соответствующая задача Римана может или не иметь решения, или иметь его при специальных начальных данных. Приведем два примера.

Рассмотрим задачу Римана о распаде разрыва для частного случая системы (1.10): $u_t + (u^2)_x = 0$, $v_t + (uv)_x = 0$. В этом случае, полагая $e(t) \equiv 0$ в формуле (5.24) из теоремы 5.2, мы найдем скорость “сверхсжатой” ударной волны:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{[u^2]}{[u]} \Big|_{x=\phi(t)} = \frac{[uv]}{[v]} \Big|_{x=\phi(t)}.$$

Это условие накладывает дополнительные ограничения на u и v . Имеем

$$(u_+ + u_-)(v_- - v_+) = u_-v_- - u_+v_+,$$

и, следовательно, задача разрешима, только если

$$\frac{u_+}{u_-} = \frac{v_+}{v_-}.$$

Таким образом, мы не можем решить задачу Римана для произвольных начальных данных.

Теперь рассмотрим задачу Римана для системы газовой динамики без давления (1.9). Аналогичным образом, полагая $e(t) \equiv 0$ в формуле (5.46) из теоремы 5.5, мы найдем скорость “сверхсжатой” ударной волны:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{[uv]}{[v]} \Big|_{x=\phi(t)} = \frac{[u^2v]}{[uv]} \Big|_{x=\phi(t)}.$$

Из несложных вычислений следует, что задача разрешима, только если

$$v_+v_-(u_- - u_+)^2 = 0.$$

Итак, мы видим, что в общем случае, при $u_- \neq u_+$, в классе разрывных функций задача не разрешима. Чтобы решить эту задачу Римана в общем случае, необходимо ввести *разрывы нового типа*, т. е. δ -ударные волны. Как писал А. Н. Крайко в своей замечательной работе [3; с. 502], для построения решения в этом случае необходимы разрывы, отличные от классических и несущие массу, импульс, энергию. Как следует из теоремы 5.5, в классе решений типа δ -ударных волн такая задача разрешима.

Эти два примера отражают общее положение дел: бывают “неклассические” ситуации, когда для разрешимости задачи Коши для произвольных начальных данных требуется рассмотреть ее в классе решений типа δ -ударных волн. Сказанное относится и к решениям типа δ' -ударных волн. Условия “сверхсжатия” (1.25), (1.26) служат *условиями допустимости* для этого типа решений.

Физический контекст сингулярных решений. Как будет показано ниже (см. раздел 4 и п. 9.3), решения систем законов сохранения типа δ -, δ' -ударных волн связаны с *процессами переноса объема, площади, массы, импульса и т. п. из области вне фронта на фронт* δ - или δ' -ударной волны (иногда процесс переноса является *процессом концентрации на фронте*). Поэтому такие системы законов сохранения являются адекватными моделями некоторых физических процессов.

Наиболее интенсивно изучалась *система газовой динамики без давления* (1.9), (1.16). Повышенный интерес к этой системе связан с тем, что система газовой динамики без давления использовалась для моделирования формирования крупномасштабных структур вселенной [75], [76] (см. также [77]).

Система газовой динамики без давления также использовалась для моделирования “запыленных” сред, которые можно считать лишенными давления [3], для моделирования двухжидкостных течений смеси газа и твердых частиц [78], [79]. Такие двухфазные потоки, содержащие твердые частицы или вкрапления, часто встречаются в природе и описываются в различных научных дисциплинах. Присутствие частиц (запыленность) может существенно менять параметры течения. “Рассеянная фаза вещества” часто описывается математически как среда, лишенная давления. Типичной чертой течения разреженного

газа с частицами является формирование “полос” и “пелен” из частиц. На практике такие явления могут быть желательны (например, при процессе резки материала) или представлять значительную опасность (например, в авиационных двигателях или турбинах). А. Н. Осипцовым в известных работах (см., например, [80]–[82]) были исследованы процессы концентрации частиц вблизи особенностей в таких средах и предложен эффективный численный метод изучения сингулярностей в фазе частиц.

Система газовой динамики без давления также используется для моделирования транспортных пробок [83].

Система законов сохранения

$$\left(u + \frac{a_1 u}{1 - u + v}\right)_t + u_x = 0, \quad \left(v + \frac{a_2 v}{1 - u + v}\right)_t + v_x = 0,$$

допускающая решения типа δ -ударной волны, была использована в нелинейной хроматографии [84], [85].

В интересной статье [86] была исследована система уравнений гидродинамики, описывающая гранулированный газ:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad \rho(u_t + u u_x) = -(\rho T)_x, \quad T_t + u T_x = -(\gamma - 1) T u_x - \Lambda \rho T^{3/2},$$

где ρ – плотность, u – скорость, T – температура, γ – адиабатический индекс, $p = \rho T$ – давление. Было показано, что при *ненулевом давлении* среды эта система может допускать решение, содержащее в плотности дельта-функцию.

Поскольку исследование систем, допускающих решения типа δ' -ударной волны, началось два года назад, для таких систем физический контекст пока неизвестен.

Комментарии. (а) Чтобы рассматривать такие сильно сингулярные распределения (1.19) и (1.24) как обобщенные решения *нелинейных* систем законов сохранения, нужно определить, в каком смысле они могут удовлетворять нелинейной системе.

К сожалению, пользуясь рецептом из книги Эванса [8; п. 3.4.1.a], приведенным в начале статьи, *нельзя вывести интегральные тождества*, дающие определения решений типа δ - и δ' -ударных волн. Действительно, как видно из (1.7)–(1.10), (1.12), (1.13), (1.20) и (1.21), (1.22), если при интегрировании по частям мы перенесем производные на основную функцию φ , то под знаком интеграла все равно останутся *нелинейные* члены $F(u, v)$, $G(u, v)$, $H(u, v)$ и $f'(u)v$, $f''(u)v^2 + f'(u)w$, *которые невозможно определить в смысле распределений*, поскольку компонента v может содержать дельта-функции, а компонента w – дельта-функции и их производные.

(б) Нужно уметь определять *сингулярные суперпозиции* распределений, например, произведения типа (1.11) или, хуже того, выражения типа $f''(u)v^2 + f'(u)w$, где v содержит дельта-функции, а w – дельта-функции и их производные.

Как оказалось, упомянутый *метод слабых асимптотик* является адекватной техникой для работы с решениями типа $\delta^{(n)}$ -ударных волн, $n = 0, 1, 2, \dots$. Этот метод дает единую технику решения многих из перечисленных задач. Метод основан на построении *слабого асимптотического решения* задачи Коши, используя которое, строится *точное* сильно сингулярное решение задачи. В рамках *метода слабых асимптотик* выводятся интегральные тождества,

которые в дальнейшем используются как определения. При этом (в отличие, например, от теории Коломбо) сильно сингулярное решение задачи Коши является *распределением из пространства Шварца*. Еще раз напоминая ремарку из книги Эванса [8; п. 11.1.1], нужно сказать, что при изучении систем, допускающих сильно сингулярные решения, *найти подходящее понятие слабого решения для соответствующей начальной задачи – самая большая трудность*. Как оказалось, в рамках *метода слабых асимптотик* также определяются *сингулярные суперпозиции* распределений (*нелинейные функции потока*), которые генерируются нелинейной системой законов сохранения уравнений, являясь при этом *однозначно определенными распределениями Шварца*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Приведем один показательный пример. В [58] была исследована система законов сохранения

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad v_t + (uv)_x = 0, \quad w_t + \left(\frac{v^2}{2} + uw\right)_x = 0. \quad (1.27)$$

Как было сказано в [58], система (1.27) *не может быть решена в смысле классической теории распределений*, и, следовательно, необходимо определить обобщенное решение этой системы в смысле теории Коломбо. В [58] это мотивируется следующим образом: если $v_- + v_+ \neq 0$, то компонента v содержит δ -меру вдоль $x = 0$. Хотя произведение uv не имеет смысла в классической теории распределений, оно может быть определено в смысле подхода [45] (см. выше формулу (1.11)), использующего *неконсервативное произведение*, но v^2 содержит квадрат δ -меры и не может быть определено в этом смысле.

Легко увидеть, что заменой переменных $u \rightarrow 2u$, $v \rightarrow 2v$, $w \rightarrow w$ система (1.27) сводится к системе (1.22). Таким образом, вопреки утверждению из статьи [58], согласно результатам [4], [5], [7] (см. ниже теоремы 5.6, 6.3) система (1.27) *допускает решение типа δ' -ударной волны* в смысле нашего определения 3.1. И это решение является *шварцевским распределением*.

Таким образом, используя *метод слабых асимптотик* и “*подходящее*” *понятие слабого решения*, можно решить задачу нахождения сильно сингулярного решения системы (1.27), не выходя за рамки классической теории распределений Шварца и не используя теорию Коломбо.

Более того, *сингулярные суперпозиции uv , $v^2/2 + uw$* – корректно и однозначно определенные распределения Шварца.

Ниже в разделах 2–9 дается подробное изложение некоторых из упомянутых выше результатов, связанных с решениями типа δ - и δ' -ударных волн, которые были получены в рамках *метода слабых асимптотик*, а также приводятся новые результаты.

В разделе 2 вводятся определения 2.1 и 2.2 решений типа δ -ударных волн для систем (1.7) и (1.8) и с помощью этих определений выводятся соответствующие условия Ренкина–Гюгонио (2.6) и (2.12) (см. теоремы 2.1, 2.2). Условия Ренкина–Гюгонио (2.15) для системы уравнений газовой динамики без давления являются частным случаем условий (2.12). В разделе 3 вводится определение 3.1 решения типа δ' -ударной волны для системы (1.21) и с помощью этого определения выводятся соответствующие условия Ренкина–Гюгонио (3.3)–(3.6) (см. теорему 3.1). Отметим, что в [87] было показано, что, почти дословно повторяя доказательства теорем 7.1–7.4 (см. раздел 7), можно получить условия

Ренкина–Гюгонно для δ - и δ' -ударных волн, не используя интегральные тождества определений 2.1, 2.2, 3.1.

В разделе 4 рассматриваются геометрические и физические аспекты решений типа δ - и δ' -ударных волн. Показано, что такие решения связаны с *процессами переноса и концентрации*. Как известно, непосредственные аналоги классических законов сохранения (1.6) для таких решений *не имеют места*. Однако с помощью теорем 4.1–4.3 для решений типа δ - и δ' -ударных волн выводятся “обобщенные” аналоги этих законов. Эти “обобщенные законы сохранения” являются *балансовыми соотношениями*, связанными с *переносом площади* из области вне фронта на фронт δ - или δ' -ударной волны. В случае системы уравнений газовой динамики без давления (1.9) эти соотношения являются законами *переноса массы и импульса*. Более того, в этом случае на фронте идет *процесс концентрации массы*.

Раздел 5 посвящен задачам Коши, связанным с распространением фронтов δ - и δ' -ударных волн. В пп. 5.1, 5.2 вводится одно из самых существенных понятий *метода слабых асимптотик* – понятие *слабого асимптотического решения*. В рамках *метода слабых асимптотик*, чтобы найти решение задачи Коши, вначале необходимо построить *слабое асимптотическое решение* этой задачи. Решение типа δ - или δ' -ударной волны задачи Коши находится как слабый предел (5.3) соответствующего *слабого асимптотического решения*. Затем доказывается, что предельные распределения (5.3) удовлетворяют интегральным тождествам (2.2), (2.11) или (3.2).

В пп. 5.3, 5.5 строятся решения типа δ -ударной волны для задач Коши (1.10), (1.17) и (1.9), (1.17), (1.18). В п. 5.4 строится решение типа δ -ударной волны для системы типа Кейфитц–Кранцера

$$u_t + (f(u) - \alpha v)_x = 0, \quad v_t + (g(u) - \beta v)_x = 0 \quad (1.28)$$

с начальными данными (1.17), где $f(u) = \sum_{k=0}^n A_k u^k$, $g(u) = \sum_{k=0}^{n+1} B_k u^k$ – полиномы, $A_n \neq 0$, $B_{n+1} \neq 0$, n – четное число; α, β – константы; $u = u(x, t)$, $v = v(x, t) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Система Кейфитц–Кранцера (1.12) и ее обобщение (1.20) являются частными случаями системы (1.28). В п. 5.6 строится решение типа δ' -ударной волны для задачи Коши (1.22), (1.23).

В п. 5.7 обсуждается вопрос о независимости сингулярного решения задачи Коши от аппроксимаций, с помощью которых строится слабое асимптотическое решение задачи.

В разделе 6 приводятся результаты из [7], связанные с решением задачи Римана (1.22), (6.1), которая допускает решение в виде ударных волн, δ -, δ' -ударных волн и вакуумных состояний. Эта задача решается методом исчезающей вязкости.

В разделе 7 рассматриваются алгебраические аспекты решений типа δ - и δ' -ударных волн в системах (1.7), (1.8), (1.21). Незирая на то, что в общем случае произведение распределений в рамках теории Шварца не определено, оказывается, что между компонентами сингулярных решений задач Коши *возникают нелинейные алгебраические соотношения*. Если система допускает решения типа δ - или δ' -ударных волн, то, используя *слабое асимптотическое решение*, мы можем вычислить *функции потока* для сингулярных решений (теоремы 7.1–7.4). Хотя функции потока *нелинейны*, они являются *однозначно определенными распределениями Шварца*. Их можно рассматривать как

“правильные” сингулярные суперпозиции распределений, которые можно определить только в контексте решения задачи Коши. Функции потока могут быть сильно сингулярными и содержать как дельта-функции, так и их производные, причем их структура определяется структурой линейных членов уравнений. Ранее в нашей статье [88] был доказан частный случай теоремы 7.1. В п. 7.2 показывается, что невзирая на то, что “правильные” сингулярные суперпозиции распределений являются *однозначно определенными распределениями*, они имеют “странные” специфические свойства.

В разделе 8 обсуждается мотивированность, естественность и некоторые особенности определений 2.1, 2.2, 3.1, которые вводят решения типа δ - и δ' -ударных волн.

В разделе 9 рассматриваются δ -ударные волны в многомерной системе законов сохранения

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho F(U)) = 0, \quad (\rho U)_t + \nabla \cdot (\rho M(U)) = 0, \quad (1.29)$$

где $F = (F_1, \dots, F_n)$ – заданное векторное поле, $M = (M_1, \dots, M_n)$ – заданное тензорное поле, $M_k = (M_{k1}, \dots, M_{kn})$, $F_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $M_{kj}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j, k = 1, \dots, n$; $\rho = \rho(x, t)$, $U = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)) \in \mathbb{R}^n$; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$. Система (1.29) в координатной форме переписывается как

$$\rho_t + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho F_j(U)) = 0, \quad (\rho u_k)_t + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho M_{kj}(U)) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Частными случаями системы (1.29) является система уравнений газовой динамики без давления в обычной форме (1.16) (где $F(U) = U$, $M(U) = U \otimes U$) и в релятивистской форме

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho C(U)) = 0, \quad (\rho U)_t + \nabla \cdot (\rho U \otimes C(U)) = 0 \quad (1.30)$$

(здесь $F(U) = C(U)$, $M(U) = U \otimes C(U)$), где $C(U) = c_0 U / \sqrt{c_0^2 + |U|^2}$, c_0 – скорость света. Релятивистская форма газовой динамики без давления (1.30) была рассмотрена в статье [89]. В этой статье для систем газовой динамики без давления (1.16) и (1.30) был дан критерий существования глобального гладкого решения для случая произвольно больших начальных данных.

В п. 9.2 для системы (1.29) вводится определение 9.1 решения типа δ -ударной волны и выводятся условия Ренкина–Гюгоньо (теорема 9.1). В п. 9.3 выводятся многомерные аналоги балансовых законов переноса, полученных в разделе 4. В случае системы уравнений газовой динамики без давления (1.16) процесс переноса является процессом концентрации массы на движущемся фронте Γ_t .

В разделе 10 говорится о некоторых перспективах развития данного направления и о возможных физических приложениях.

2. Решения типа δ -ударных волн и условия Ренкина–Гюгоньо

2.1. Случай системы (1.7). Пусть $\Gamma = \{\gamma_i : i \in I\}$ – множество кривых в верхней полуплоскости $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty)\} \subset \mathbb{R}^2$, состоящее из дуг $\gamma_i = \{(x, t) : S_i(x, t) = 0\}$ класса C^1 , где $(S_i)_x \neq 0$, $i \in I$, I – конечное множество. Дуги этого множества ориентированы в соответствии с возрастанием времени t .

Обозначим через I_0 такое подмножество I , что дуги γ_k для $k \in I_0$ начинаются в точках оси x . Пусть $\Gamma_0 = \{x_k^0 : k \in I_0\}$ – множество начальных точек дуг γ_k , $k \in I_0$.

Для системы (1.7) начальные данные типа δ -ударных волн имеют вид

$$(u^0(x), v^0(x)), \quad \text{где } v^0(x) = \hat{v}^0(x) + e^0 \delta(\Gamma_0) \quad (2.1)$$

и $u^0, \hat{v}^0 \in L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $e^0 \delta(\Gamma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in I_0} e_k^0 \delta(x - x_k^0)$, e_k^0 – постоянные, $k \in I_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [15]–[17]. Пара распределений $(u(x, t), v(x, t))$ и множество кривых Γ , где $v(x, t)$ представляется в виде суммы

$$v(x, t) = \hat{v}(x, t) + e(x, t) \delta(\Gamma),$$

$u, \hat{v} \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty); \mathbb{R})$, $e(x, t) \delta(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in I} e_i(x, t) \delta(\gamma_i)$, $e_i(x, t) \in C(\Gamma)$, $i \in I$, называется обобщенным решением типа δ -ударной волны задачи Коши (1.7), (2.1), если для всех основных функций $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int (u \varphi_t + F(u, \hat{v}) \varphi_x) dx dt + \int u^0(x) \varphi(x, 0) dx = 0, \\ & \int_0^\infty \int (\hat{v} \varphi_t + G(u, \hat{v}) \varphi_x) dx dt + \sum_{i \in I} \int_{\gamma_i} e_i(x, t) \frac{\delta \varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} \\ & + \int \hat{v}^0(x) \varphi(x, 0) dx + \sum_{k \in I_0} e_k^0 \varphi(x_k^0, 0) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь

$$\frac{\delta \varphi}{\delta t} \Big|_{\gamma_i} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{(S_i)_t}{(S_i)_x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \Big|_{S_i(x, t)=0} \quad (2.3)$$

– δ -производная по времени [90; 5.2, (15)], которая является производной вдоль касательного направления к дуге множества кривых γ_i ;

$$u_\delta(x, t)|_{\gamma_i} = - \frac{(S_i)_t}{(S_i)_x} \Big|_{\gamma_i}, \quad i \in I, \quad (2.4)$$

– скорость δ -ударной волны на γ_i ; $\int_{\gamma_i} \cdot dl$ обозначает криволинейный интеграл по дуге γ_i ; дельта-функция $\delta(\gamma_i)$ на кривой γ_i определена в [91; гл. III, § 1.3], [90; 5.3].

Пусть дуги множества кривых $\Gamma = \{\gamma_i : i \in I\}$ представляются в форме $\gamma_i = \{(x, t) : x = \phi_i(t)\}$, $\phi_i(t) \in C^1(0, +\infty)$, $i \in I$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi}{\delta t} \Big|_{\gamma_i} &= \sqrt{1 + (\dot{\phi}_i(t))^2} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial \mathbf{l}} \Big|_{\gamma_i} = \frac{d\varphi(\phi_i(t), t)}{dt} \\ &= \varphi_t(\phi_i(t), t) + \dot{\phi}_i(t) \varphi_x(\phi_i(t), t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial \mathbf{l}}$ – производная вдоль единичного касательного вектора

$$\mathbf{l} = (-\nu_2, \nu_1) = \frac{(\dot{\phi}_i(t), 1)}{\sqrt{1 + (\dot{\phi}_i(t))^2}}$$

к кривой γ_i , а $\mathbf{n} = (\nu_1, \nu_2)$ – единичная нормаль к кривой γ_i , заданная (1.4).

Интегральные тождества (2.2) отличаются от “классических” интегральных тождеств (1.2) (для $m = 2$) дополнительными членами $\sum_{i \in I} \int_{\gamma_i} \cdot dl$ во втором тождестве. Невзирая на то, что функции потоков $F(u, v)$, $G(u, v)$ в обоих уравнениях в (1.7) однотипны, в первом тождестве (2.2) дополнительные члены $\sum_{i \in I} \int_{\gamma_i} \cdot dl$ отсутствуют. Это связано с тем, что именно в компоненте v решения (согласно определению) имеются члены, содержащие *дельта-функции*. Мотивировка введения определения 2.1 дана в разделе 8.

Мы выведем условия Ренкина–Гюгонни для δ -ударных волн в случае системы (1.7), используя определение 2.1.

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [30], [31]). Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ делится гладкой кривой $\Gamma = \{(x, t) : S(x, t) = 0\}$ на левую и правую части $\Omega_{\pm}$. Пусть пара распределений (u, v) и кривая Γ есть решение типа δ -ударной волны для системы (1.7), где u, v являются гладкими в $\Omega_{\pm}$ и имеют односторонние пределы $u_{\pm}, v_{\pm}$ на Γ . Тогда это решение на Γ удовлетворяет условиям Ренкина–Гюгонни для δ -ударных волн:

$$u_{\delta} = \frac{[F(u, v)]}{[u]} \Big|_{\Gamma}, \quad \frac{\delta e(x, t)}{\delta t} \Big|_{\Gamma} = ([G(u, v)]_{\Gamma} - [v]_{\Gamma} u_{\delta}) \frac{S_x}{|S_x|}, \quad (2.6)$$

где $u_{\delta}(x, t)$ – скорость δ -ударной волны (2.4), $[a(u, v)] = a(u_-, v_-) - a(u_+, v_+)$ – скачок функции $a(u(x, t), v(x, t))$ через линию разрыва Γ .

Если $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t)\}$, $\phi(t) \in C^1(0, +\infty)$, $\Omega_{\pm} = \{(x, t) : \pm(x - \phi(t)) > 0\}$, то условия (2.6) записываются как

$$\dot{\phi}(t) = \frac{[F(u, v)]}{[u]} \Big|_{x=\phi(t)}, \quad \dot{e}(t) = \left([G(u, v)] - [v] \frac{[F(u, v)]}{[u]} \right) \Big|_{x=\phi(t)}, \quad (2.7)$$

где e понимается как функция одного переменного t , т.е.

$$e(t) \stackrel{\text{def}}{=} e(\phi(t), t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{n} = (\nu_1, \nu_2) = (S_x, S_t)/|\nabla_{(x,t)} S|$ – единичная нормаль к кривой Γ , направленная из Ω_- в Ω_+ , $\mathbf{l} = (-\nu_2, \nu_1) = (-S_t, S_x)/|\nabla_{(x,t)} S|$ – единичный касательный вектор к Γ , $\nabla_{(x,t)} S_i = (S_{ix}, S_{it})$.

Для каждой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ выполнено равенство $\varphi(x, t) = 0$, если $(x, t) \notin E$, $\bar{E} \subset \Omega$, E – область. Выбирая $\varphi(x, t)$ с компактным носителем в $\Omega_{\pm}$, мы получим из (2.2), что (1.7) имеет место соответственно в $\Omega_{\pm}$. Выбирая $\varphi(x, t)$ с компактным носителем в Ω , мы получим из первого тождества в (2.2), что

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \int (u \varphi_t + F(u, \hat{v}) \varphi_x) dx dt \\ &= \iint_{\Omega_- \cap E} (u \varphi_t + F(u, \hat{v}) \varphi_x) dx dt + \iint_{\Omega_+ \cap E} (u \varphi_t + F(u, \hat{v}) \varphi_x) dx dt. \end{aligned}$$

Так как $u_t + (F(u, v))_x = 0$ при $(x, t) \in \Omega_\pm$, то, интегрируя по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_\pm \cap E} (u\varphi_t + F(u, \hat{v})\varphi_x) dx dt &= - \iint_{\Omega_\pm \cap E} (u_t + (F(u, \hat{v}))_x) \varphi dx dt \\ &\mp \int_\Gamma (\nu_2 u_\pm + \nu_1 F(u_\pm, v_\pm)) \varphi dl - \int_{\Omega_\pm \cap E \cap \mathbb{R}} u^0(x) \varphi(x, 0) dx \\ &= \mp \int_\Gamma (\nu_2 u_\pm + \nu_1 F(u_\pm, v_\pm)) \varphi dl - \int_{\Omega_\pm \cap E \cap \mathbb{R}} u^0(x) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Складывая два последних соотношения, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int (u\varphi_t + F(u, \hat{v})\varphi_x) dx dt + \int u^0(x) \varphi(x, 0) dx \\ = \int_\Gamma ([F(u, v)]\nu_1 + [u]\nu_2) \varphi(x, t) dl = 0 \end{aligned}$$

для всех $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\Omega)$. Таким образом, первое соотношение в (2.6) доказано.

Повторяя вышеприведенные выкладки, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int (\hat{v}\varphi_t + G(u, \hat{v})\varphi_x) dx dt + \int \hat{v}^0(x) \varphi(x, 0) dx \\ = \int_\Gamma ([G(u, v)]\nu_1 + [v]\nu_2) \varphi(x, t) dl. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Далее, интегрируя по частям, легко получить

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \int_{\gamma_i} e_i(x, t) \frac{\delta \varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} \\ = - \sum_{i \in I} \int_{\gamma_i} \frac{\delta e_i(x, t)}{\delta t} \varphi(x, t) \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} - \sum_{k \in I_0} e^0 \varphi(x, 0)|_{S_k(x, 0)=0}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где δ -производная $\frac{\delta \varphi}{\delta t}$ определена в (2.3). Складывая (2.8) и (2.9), найдем, что для всех $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Gamma \left([G(u, v)]\nu_1 + [v]\nu_2 - \frac{\delta e(x, t)}{\delta t} \frac{1}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} \right) \varphi(x, t) dl = 0.$$

Отсюда следует второе соотношение в (2.6).

Если $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t)\}$, $\phi(t) \in C^1(0, +\infty)$, то в силу (1.4) и (2.5) условия (2.6) можно переписать в виде (2.7). Теорема 2.1 доказана.

Система уравнений (2.6) (или (2.7)) определяет траекторию δ -ударной волны $x = \phi(t)$ и амплитуду $e(x, t)|_\Gamma$ дельта-функции. Первое уравнение в системе (2.6) (или (2.7)) является “стандартным” условием Ренкина–Гюгонно для ударных волн (см. (1.3) или (1.5)). Правая часть во втором уравнении в (2.6) (или в (2.7)) называется *дефицитом Ренкина–Гюгонно* в компоненте v .

2.2. Случай системы (1.8). Теперь введем определение обобщенного решения типа δ -ударных волн для системы (1.8), которое обобщает соответствующее определение, введенное в [16] для случая системы уравнений газовой динамики без давления (1.9). Пусть $\Gamma = \{\gamma_i : i \in I\}$ и $\Gamma_0 = \{x_k^0 : k \in I_0\}$ – множества, определенные в п. 2.1.

Для системы (1.8) начальные данные типа δ -ударных волн имеют вид

$$(u^0(x), v^0(x); u_\delta^0(x_k^0), k \in I_0), \quad \text{где } v^0(x) = \hat{v}^0(x) + e^0 \delta(\Gamma_0), \quad (2.10)$$

$u^0, \hat{v}^0 \in L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $u_\delta^0(x_k^0)$ – начальные скорости δ -ударных волн в точках x_k^0 и $e^0 \delta(\Gamma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in I_0} e_k^0 \delta(x - x_k^0)$, e_k^0 – константы, $k \in I_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пара распределений $(u(x, t), v(x, t))$ и множество кривых Γ из определения 2.1 называется обобщенным решением типа δ -ударной волны задачи Коши (1.8), (2.10), если для всех основных функций $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int (\hat{v} \varphi_t + G(u, \hat{v}) \varphi_x) dx dt + \sum_{i \in I} \int_{\gamma_i} e_i(x, t) \frac{\delta \varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} \\ & + \int \hat{v}^0(x) \varphi(x, 0) dx + \sum_{k \in I_0} e_k^0 \varphi(x_k^0, 0) = 0, \\ & \int_0^\infty \int (u \hat{v} \varphi_t + H(u, \hat{v}) \varphi_x) dx dt \\ & + \sum_{i \in I} \int_{\gamma_i} e_i(x, t) u_\delta(x, t) \frac{\delta \varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} \\ & + \int u^0(x) \hat{v}^0(x) \varphi(x, 0) dx + \sum_{k \in I_0} e_k^0 u_\delta^0(x_k^0) \varphi(x_k^0, 0) = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $u_\delta(x, t)$ – скорость δ -ударной волны (2.4),

$$u_\delta^0(x_k^0) = u_\delta(x_k^0, 0) = - \left. \frac{(S_k)_t}{(S_k)_x} \right|_{x=x_k^0, t=0}, \quad k \in I_0.$$

Интегральные тождества (2.11) отличаются от “классических” интегральных тождеств (1.2) (для $m = 2$) дополнительными членами в виде криволинейных интегралов, наличие которых связано с тем, что в v и uv имеются члены, содержащие *дельта-функции*. Первое интегральное тождество в (2.11) совпадает со вторым тождеством в (2.2). Мотивировка введения определения 2.2 дана в разделе 8.

Используя определение 2.2 и повторяя практически дословно доказательство теоремы 2.1, можно вывести условия Ренкина–Гюгоннио для решений типа δ -ударных волн для случая системы (1.8).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ делится гладкой кривой $\Gamma = \{(x, t) : S(x, t) = 0\}$ на левую и правую части $\Omega_\mp$. Пусть пара распределений (u, v) и кривая Γ есть решение типа δ -ударной волны для системы (1.8), где u, v являются гладкими в $\Omega_\pm$ и имеют односторонние пределы $u_\pm, \hat{v}_\pm$

на Γ . Тогда это решение на Γ удовлетворяет условиям Ренкина–Гюгонио для δ -ударных волн:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta e(x, t)}{\delta t} \right|_{\Gamma} &= ([G(u, v)]_{\Gamma} - [v]_{\Gamma} u_{\delta}) \frac{S_x}{|S_x|}, \\ \left. \frac{\delta(e(x, t) u_{\delta}(x, t))}{\delta t} \right|_{\Gamma} &= ([H(u, v)]_{\Gamma} - [uv]_{\Gamma} u_{\delta}) \frac{S_x}{|S_x|}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Если $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t)\}$, $\phi(t) \in C^1(0, +\infty)$, $\Omega_{\pm} = \{(x, t) : \pm(x - \phi(t)) > 0\}$, то условия (2.12) записываются как

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= ([G(u, v)] - [v] \dot{\phi}(t))|_{x=\phi(t)}, \\ \frac{d(e(t) \dot{\phi}(t))}{dt} &= ([H(u, v)] - [uv] \dot{\phi}(t))|_{x=\phi(t)}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где функция e понимается как функция одного переменного t , т.е. $e(t) \stackrel{\text{def}}{=} e(\phi(t), t)$.

Согласно (2.13), для системы (1.13) (здесь $G(u, v) = f(u)v$, $H(u, v) = f(u)uv$) условия Ренкина–Гюгонио имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= ([f(u)v] - [v] \dot{\phi}(t))|_{x=\phi(t)}, \\ \frac{d(e(t) \dot{\phi}(t))}{dt} &= ([f(u)uv] - [uv] \dot{\phi}(t))|_{x=\phi(t)}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

а для системы уравнений газовой динамики без давления (1.9) (здесь $G(u, v) = uv$, $H(u, v) = u^2v$) эти условия имеют вид

$$\dot{e}(t) = ([uv] - [v] \dot{\phi}(t))|_{x=\phi(t)}, \quad \frac{d(e(t) \dot{\phi}(t))}{dt} = ([u^2v] - [uv] \dot{\phi}(t))|_{x=\phi(t)}. \quad (2.15)$$

Правые части первого и второго уравнений в (2.12) (или в (2.13)) называются дефицитами Ренкина–Гюгонио в v и в uv соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Условия Ренкина–Гюгонио (2.12) для систем законов сохранения (1.8) существенно отличаются от условий Ренкина–Гюгонио (2.6) для системы законов сохранения (1.7), поскольку первые являются системой дифференциальных уравнений второго порядка. Отсюда следует, что в случае системы (1.8) для решения задачи Коши, которая допускает решение типа δ -ударных волн, необходимо ввести в начальные данные $(u^0(x), v^0(x))$ начальные значения $u_{\delta}(x_k^0, 0) = -\frac{(S_k)_t}{(S_k)_x} \Big|_{x=x_k^0, t=0}$ скоростей (2.4) вдоль траекторий δ -ударных волн (подробнее см. [16]).

Условия Ренкина–Гюгонио (2.14) являются прямым аналогом условий Ренкина–Гюгонио (1.15), которые используются в подходе “обобщенное решение в смысле меры” [10], [33], [34]. Более того, система условий Ренкина–Гюгонио (1.15) в этом подходе формально совпадает с нашей системой Ренкина–Гюгонио (2.14), если отождествить величины $u_{\sigma} = \mu = f(u_{\sigma})$ и $\dot{\phi}(t)$, где u_{σ} – скорости в точке разрыва.

3. Решения типа δ' -ударных волн и условия Ренкина–Гюгонио

Пусть $\tilde{\mathcal{C}}(\mathbb{R} \times (0, \infty); \mathbb{R})$ – класс кусочно гладких функций, $\Gamma = \{\gamma_i : i \in I\}$ и $\Gamma_0 = \{x_k^0 : k \in I_0\}$ – множества, определенные в п. 2.1.

Начальные данные типа δ' -ударных волн имеют вид

$$\begin{aligned} (u^0(x), v^0(x), w^0(x)), \quad \text{где } v^0(x) = \hat{v}^0(x) + e^0 \delta(\Gamma_0), \\ w^0(x) = \hat{w}^0(x) + g^0 \delta(\Gamma_0) + h^0 \delta'(\Gamma_0), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$u^0, \hat{v}^0, \hat{w}^0 \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Здесь

$$\begin{aligned} e^0 \delta(\Gamma_0) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in I_0} e_k^0 \delta(x - x_k^0), \quad g^0 \delta(\Gamma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in I_0} g_k^0 \delta(x - x_k^0), \\ h^0 \delta(\Gamma_0) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in I_0} h_k^0 \delta'(x - x_k^0), \end{aligned}$$

e_k^0, g_k^0, h_k^0 – константы, $k \in I_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [4]. Тройка распределений $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$ и множество кривых Γ , где $v(x, t)$ и $w(x, t)$ представляются в виде сумм

$$v(x, t) = \hat{v}(x, t) + e(x, t) \delta(\Gamma), \quad w(x, t) = \hat{w}(x, t) + g(x, t) \delta(\Gamma) + h(x, t) \delta'(\Gamma),$$

$u, \hat{v}, \hat{w} \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathbb{R} \times (0, \infty); \mathbb{R})$ и

$$\begin{aligned} e(x, t) \delta(\Gamma) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in I} e_i(x, t) \delta(\gamma_i), \quad g(x, t) \delta(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in I} g_i(x, t) \delta(\gamma_i), \\ h(x, t) \delta'(\Gamma) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in I} h_i(x, t) \delta'(\gamma_i), \end{aligned}$$

$e_i(x, t), g_i(x, t), h_i(x, t) \in C^1(\Gamma)$, $i \in I$, называется обобщенным решением типа δ' -ударной волны задачи Коши (1.21), (3.1), если для всех основных функций $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ имеют место интегральные тождества

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dx dt + \int u^0(x) \varphi(x, 0) dx = 0, \\ &\int_0^\infty \int \hat{v}(\varphi_t + f'(u) \varphi_x) dx dt + \sum_{i \in I} \int_{\gamma_i} e_i(x, t) \frac{\delta \varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} \\ &\quad + \int \hat{v}^0(x) \varphi(x, 0) dx + \sum_{k \in I_0} e_k^0 \varphi(x_k^0, 0) = 0, \\ &\int_0^\infty \int (\hat{w} \varphi_t + (f''(u) \hat{v}^2 + f'(u) \hat{w}) \varphi_x) dx dt \\ &\quad + \sum_{i \in I} \left(\int_{\gamma_i} g_i(x, t) \frac{\delta \varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} + \int_{\gamma_i} h_i(x, t) \frac{\delta \varphi_x(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma_i} \frac{\frac{\delta e_i^2(x, t)}{\delta t} - h_i(x, t) \frac{\delta[u(x, t)]}{\delta t}}{[u(x, t)]} \varphi_x(x, t) \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} \right) \\ &\quad + \int \hat{w}^0(x) \varphi(x, 0) dx + \sum_{k \in I_0} g_k^0 \varphi(x_k^0, 0) + \sum_{k \in I_0} h_k^0 \varphi_x(x_k^0, 0) = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Производная дельта-функции $\delta'(\gamma_i)$ на кривой γ_i определена в [91; гл. III, § 1.5], [90; 5.3, 5.5].

Интегральные тождества (3.2) отличаются от классических интегральных тождеств (1.2) (для $m = 3$) дополнительными членами во втором и третьем тождествах. Дополнительные члены

$$\sum_{i \in I} \int_{\gamma_i} e_i(x, t) \frac{\delta \varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}}, \quad \sum_{i \in I} \int_{\gamma_i} g_i(x, t) \frac{\delta \varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}}$$

связаны с присутствием в v и w дельта-функции, а член

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \left(\int_{\gamma_i} h_i(x, t) \frac{\delta \varphi_x(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} \right. \\ & \left. + \int_{\gamma_i} \frac{\delta e_i^2(x, t)}{\delta t} - h_i(x, t) \frac{\delta[u(x, t)]}{\delta t} \varphi_x(x, t) \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} \right) \end{aligned}$$

– с присутствием в w производной от дельта-функции. Первое интегральное тождество в (3.2) – “классическое” интегральное тождество (см. (1.2)); первые два тождества в (3.2) образуют систему тождеств, используемых для определения решений типа δ -ударных волн (см. определение 2.1). Третье тождество в (3.2) специфично для определения решений типа δ' -ударных волн. Мотивировка введения определения 3.1 дана в разделе 8.

ТЕОРЕМА 3.1 [4]. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ делится гладкой кривой $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t)\}$, $\phi(t) \in C^1(0, +\infty)$, на левую и правую части $\Omega_\mp$. Пусть тройка распределений (u, v, w) и кривая Γ есть решение типа δ' -ударной волны для системы (1.21), где u, v, w являются гладкими в $\Omega_\pm$ и имеют односторонние пределы $u_\pm, \hat{v}_\pm, \hat{w}_\pm$ на Γ . Тогда это решение на Γ удовлетворяет условиям Ренкина–Гюгоньо для δ' -ударных волн:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{[f(u)]}{[u]} \Big|_{x=\phi(t)}, \quad (3.3)$$

$$\dot{e}(t) = \left([f'(u)v] - [v] \frac{[f(u)]}{[u]} \right) \Big|_{x=\phi(t)}, \quad (3.4)$$

$$\dot{g}(t) = \left([f''(u)v^2 + f'(u)w] - [w] \frac{[f(u)]}{[u]} \right) \Big|_{x=\phi(t)}, \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt}(h(t)[u(\phi(t), t)]) = \frac{de^2(t)}{dt}, \quad (3.6)$$

$$ade \, e(t) \stackrel{\text{def}}{=} e(\phi(t), t), \, g(t) \stackrel{\text{def}}{=} g(\phi(t), t), \, h(t) \stackrel{\text{def}}{=} h(\phi(t), t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $F(u, v) = f(u)$, $G(u, v) = f'(u)v$ и повторяя доказательство теоремы 2.1, мы докажем соотношения (3.3) и (3.4).

Аналогично доказываются соотношения (3.5), (3.6). Пусть $\mathbf{n} = (\nu_1, \nu_2)$ – единичная нормаль к кривой Γ , направленная из Ω_- в Ω_+ , и $\mathbf{l} = (-\nu_2, \nu_1)$. Так как $(u, \hat{v}, \hat{w})$ – гладкое решение системы (1.21) в $\Omega_\pm$, то, учитывая (1.4), (2.5)

и интегрируя по частям третье интегральное тождество в (3.2), получим

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega} (\widehat{w} \varphi_t + (f''(u) \widehat{v}^2 + f'(u) \widehat{w}) \varphi_x) dx dt + \int_{\Gamma} g(x, t) \frac{\delta \varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_{\delta}^2}} \\
 &\quad + \int_{\Gamma} h(x, t) \frac{\delta \varphi_x(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_{\delta}^2}} \\
 &\quad + \int_{\Gamma} \frac{\delta e^2(x, t)}{\delta t} - h(x, t) \frac{\partial [u(x, t)]}{\partial \mathbf{l}} \varphi_x(x, t) \frac{dl}{\sqrt{1 + u_{\delta}^2}} \\
 &= \int_{\Gamma} ([w] \nu_2 + [f''(u) v^2 + f'(u) w] \nu_1) \varphi(x, t) dl + \int_{\Gamma} g(x, t) \frac{\delta \varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + (\dot{\phi}(t))^2}} \\
 &\quad + \int_{\Gamma} h(x, t) \frac{\delta \varphi_x(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + (\dot{\phi}(t))^2}} \\
 &\quad + \int_{\Gamma} \frac{\delta e^2(x, t)}{\delta t} - h(x, t) \frac{\partial [u(x, t)]}{\partial \mathbf{l}} \varphi_x(x, t) \frac{dl}{\sqrt{1 + (\dot{\phi}(t))^2}} \\
 &= \int_0^{\infty} (-[w] \dot{\phi}(t) + [f''(u) v^2 + f'(u) w]) \varphi(\phi(t), t) dt \\
 &\quad + \int_0^{\infty} g(t) \frac{d\varphi(\phi(t), t)}{dt} dt + \int_0^{\infty} h(t) \frac{d\varphi_x(\phi(t), t)}{dt} dt \\
 &\quad + \int_0^{\infty} \frac{de^2(t)}{dt} - h(t) \frac{d[u(\phi(t), t)]}{dt} \varphi_x(\phi(t), t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} (-[w] \dot{\phi}(t) + [f''(u) v^2 + f'(u) w] - \dot{g}(t)) \varphi(\phi(t), t) dt \\
 &\quad + \int_0^{\infty} \left(\frac{de^2(t)}{dt} - h(t) \frac{d[u(\phi(t), t)]}{dt} - \dot{h}(t) \right) \varphi_x(\phi(t), t) dt. \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что, интегрируя по частям, легко получить:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \psi(x, t) \frac{\delta \varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_{\delta}^2}} &= - \int_{\Gamma} \frac{\delta \psi(x, t)}{\delta t} \varphi(x, t) \frac{dl}{\sqrt{1 + u_{\delta}^2}} \\
 &= - \int_{\Gamma} \frac{d\psi(\phi(t), t)}{dt} \varphi(\phi(t), t) dt,
 \end{aligned}$$

где $\psi(x, t)$ – гладкая функция.

Поскольку $\varphi(\phi(t), t)$ и $\varphi_x(\phi(t), t)$ – произвольные гладкие функции и

$$\frac{\frac{de^2(t)}{dt} - h(t) \frac{d[u(\phi(t), t)]}{dt}}{[u(\phi(t), t)]} - \dot{h}(t) = \frac{\frac{de^2(t)}{dt} - \frac{dh(t)u(\phi(t), t)}{dt}}{[u(\phi(t), t)]},$$

то, как легко видеть, из (3.7) следует, что (3.5), (3.6) имеют место на Γ . Теорема 3.1 доказана.

Система уравнений (3.3)–(3.6) определяет траекторию δ' -ударной волны $x = \phi(t)$, амплитуды дельта-функций e , g и амплитуду производной дельта-функции h . Первое уравнение в системе (3.3)–(3.6) является “стандартным” условием Ренкина–Гюгоньо для ударных волн (см. (1.3) или (1.5)); первые два уравнения в системе (3.3)–(3.6) являются “стандартными” условиями Ренкина–Гюгоньо для δ -ударных волн (см. (2.7)). Правые части уравнений (3.4), (3.5) назовем *первым дефицитом Ренкина–Гюгоньо*, правую часть уравнения (3.6) назовем *вторым дефицитом Ренкина–Гюгоньо*.

4. Геометрический и физический аспекты сингулярных решений

4.1. δ -ударные волны. Случай системы (1.7). Пусть $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t)\}$ – линия разрыва в верхней полуплоскости $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty)\}$, выходящая из точки $\phi(0) = 0$. Обозначим через

$$\begin{aligned} S_u(t) &= \int_{-\infty}^{\phi(t)} u(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} u(x, t) dx, \\ S_v(t) &= \int_{-\infty}^{\phi(t)} v(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} v(x, t) dx, \\ S_u(0) &= \int_{-\infty}^0 u^0(x) dx + \int_0^{+\infty} u^0(x) dx, \\ S_v(0) &= \int_{-\infty}^0 v^0(x) dx + \int_0^{+\infty} v^0(x) dx \end{aligned} \quad (4.1)$$

площади под графиками функций $y = u(x, t)$, $y = \hat{v}(x, t)$, $y = u^0(x)$, $y = \hat{v}^0(x)$ соответственно. Ясно, что здесь

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\phi(t)} v(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} v(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{\phi(t)} \hat{v}(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} \hat{v}(x, t) dx, \\ \int_{-\infty}^0 v^0(x) dx + \int_0^{+\infty} v^0(x) dx &= \int_{-\infty}^0 \hat{v}^0(x) dx + \int_0^{+\infty} \hat{v}^0(x) dx. \end{aligned}$$

Для решений типа δ -ударных волн классические законы сохранения (1.6) не верны. Именно, если u – компонента решения системы (1.7), то

$$\int u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\phi(t)} u(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} u(x, t) dx = \text{const}, \quad t \geq 0.$$

Для компоненты решения v , которая содержит дельта-функцию, аналогичное соотношение не имеет места. Однако имеют место *балансовые законы сохранения*, обобщающие (1.6).

ТЕОРЕМА 4.1 [30], [92]. Пусть пара распределений (u, v) и линия разрыва $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t)\}$ – решение (в смысле определения 2.1) типа δ -ударной волны задачи Коши (1.7), (2.1), где $v(x, t) = \hat{v}(x, t) + e(t) \delta(\Gamma)$ и $u(x, t)$, $\hat{v}(x, t)$ –

функции с компактным носителем по x . Тогда имеют место следующие балансовые законы:

$$\begin{aligned}\dot{S}_u(t) &= 0, \\ \dot{S}_v(t) &= -\dot{e}(t) = -\left([G(u, v)] - [v] \frac{[F(u, v)]}{[u]} \right) \Big|_{x=\phi(t)},\end{aligned}\quad (4.2)$$

где $S_u(t)$, $S_v(t)$ заданы в (4.1), а $\dot{e}(t)$ – дефицит Ренкина–Гюгоннио (2.7). Таким образом,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\phi(t)} u(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} u(x, t) dx &= \int_{-\infty}^0 u^0(x) dx + \int_0^{+\infty} u^0(x) dx, \\ \int_{-\infty}^{\phi(t)} v(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} v(x, t) dx + e(t) &= \int_{-\infty}^0 v^0(x) dx + \int_0^{+\infty} v^0(x) dx + e^0,\end{aligned}\quad (4.3)$$

где e^0 – начальная амплитуда дельта-функции в компоненте v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем второе балансовое соотношение в (4.2). Пусть $v_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \phi(t) \pm 0} v(x, t)$ – предельные значения функции $v(x, t)$ справа и слева от кривой Γ . Ясно, что $v_{\pm} = \hat{v}_{\pm}$. Дифференцируя второе соотношение (4.1) и используя второе уравнение системы (1.7), получим

$$\begin{aligned}\dot{S}_v(t) &= v_- \dot{\phi}(t) - v_+ \dot{\phi}(t) + \int_{-\infty}^{\phi(t)} v_t(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} v_t(x, t) dx \\ &= [v] \Big|_{x=\phi(t)} \dot{\phi}(t) - \int_{-\infty}^{\phi(t)} (G(u, v))_x dx - \int_{\phi(t)}^{+\infty} (G(u, v))_x dx \\ &= [v] \Big|_{x=\phi(t)} \dot{\phi}(t) - [G(u, v)] \Big|_{x=\phi(t)} \\ &\quad + G(u(-\infty, t), v(-\infty, t)) - G(u(+\infty, t), v(+\infty, t)).\end{aligned}$$

Так как функции $u(x, t)$ и $\hat{v}(x, t)$ имеют компактный носитель по x , то

$$G(u(-\infty, t), v(-\infty, t)) = G(u(+\infty, t), v(+\infty, t)) = G(0, 0).$$

Теперь, используя (2.7), будем иметь

$$\dot{S}_v(t) = \left([v] \frac{[F(u, v)]}{[u]} \Big|_{x=\phi(t)} - [G(u, v)] \right) \Big|_{x=\phi(t)}.$$

Первое соотношение в (4.2) представляет собой известное балансовое соотношение для L^∞ -обобщенных решений (1.6) и доказывается аналогично предыдущему. Интегрируя (4.2), получим (4.3). Теорема 4.1 доказана.

Из второго балансового соотношения (4.3) видно, что смысл амплитуды $e(t)$ дельта-функции в компоненте v – “площадь” линии разрыва. Согласно теореме 4.1, идет процесс переноса “площади” из-под графика функции $y = \hat{v}(x, t)$ на кривую разрыва $x = \phi(t)$. При этом скорость изменения “площади” под графиком функции $y = \hat{v}(x, t)$ равна дефициту Ренкина–Гюгоннио, взятому с обратным знаком, а “полная площадь” $S_v(t) + e(t)$ не зависит от времени.

4.2. δ -ударные волны. Случай системы (1.8). Пусть

$$\begin{aligned} S_{uv}(t) &= \int_{-\infty}^{\phi(t)} u(x, t)v(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} u(x, t)v(x, t) dx, \\ S_{uv}(0) &= \int_{-\infty}^0 u^0(x)v^0(x) dx + \int_0^{+\infty} u^0(x)v^0(x) dx \end{aligned} \quad (4.4)$$

– площади под графиками функций $y = u(x, t)\hat{v}(x, t)$ и $y = u^0(x)\hat{v}^0(x)$ соответственно, где $x = \phi(t)$ – кривая в верхней полуплоскости $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty)\}$, выходящая из точки $\phi(0) = 0$.

Повторяя почти дословно доказательство теоремы 4.1, легко доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2 [30], [92]. Пусть пара распределений (u, v) и кривая разрыва $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t)\}$ – решение (в смысле определения 2.2) типа δ -ударной волны задачи Коши (1.8), (2.10), где $v(x, t) = \hat{v}(x, t) + e(t)\delta(\Gamma)$ и $u(x, t), \hat{v}(x, t)$ – функции с компактным носителем по x . Тогда имеют место следующие балансовые законы:

$$\begin{aligned} \dot{S}_v(t) &= -\dot{e}(t) = -\left([G(u, v)] - [v] \frac{[F(u, v)]}{[u]} \right) \Big|_{x=\phi(t)}, \\ \dot{S}_{uv}(t) &= -\frac{d(e(t)\dot{\phi}(t))}{dt} = -([H(u, v)] - [uv]\dot{\phi}(t)) \Big|_{x=\phi(t)}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $S_v(t), S_{uv}(t)$ заданы в (4.1), (4.4), а $\dot{e}(t), \frac{d(e(t)\dot{\phi}(t))}{dt}$ – дефициты Ренкина–Гюгоннио (2.13). Таким образом,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\phi(t)} v(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} v(x, t) dx + e(t) \\ &= \int_{-\infty}^0 v^0(x) dx + \int_0^{+\infty} v^0(x) dx + e^0, \\ &\int_{-\infty}^{\phi(t)} u(x, t)v(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} u(x, t)v(x, t) dx + e(t)\dot{\phi}(t) \\ &= \int_{-\infty}^0 u^0(x)v^0(x) dx + \int_0^{+\infty} u^0(x)v^0(x) dx + e^0\dot{\phi}(0), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где e^0 – начальная амплитуда дельта-функции, $\dot{\phi}(0)$ – начальная скорость δ -ударной волны.

Согласно теореме 4.2, идет процесс переноса “площади” из-под графиков функций $y = \hat{v}(x, t)$ и $y = u(x, t)\hat{v}(x, t)$ на кривую разрыва $x = \phi(t)$. При этом скорости изменения “площадей” под графиками функций равны соответствующим дефицитам Ренкина–Гюгоннио, взятым с обратным знаком, а полные “площади” $S_v(t) + e(t)$ и $S_{uv}(t) + e(t)\dot{\phi}(t)$ не зависят от времени.

4.3. Система уравнений газовой динамики без давления (1.9). Эта система – частный случай системы (1.8), где $G(u, v) = uv$, $H(u, v) = uv^2$. Здесь

$v(x, t) \geq 0$ имеет смысл плотности, а $u(x, t)$ – скорости и, следовательно, площади $S_v(t) = M(t)$ и $S_{uv}(t) = P(t)$ интерпретируются как масса и импульс вне линии разрыва $x = \phi(t)$. В этом случае из теоремы 4.2 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.1 [9], [92]. Пусть пара распределений (u, v) и кривая разрыва $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t)\}$ – решение типа δ -ударной волны задачи Коши (1.9), (2.10), где $v(x, t) = \hat{v}(x, t) + e(t) \delta(\Gamma)$ и $u(x, t), \hat{v}(x, t)$ – функции с компактным носителем по x . Тогда имеют место следующие балансовые соотношения для массы и импульса:

$$\dot{e}(t) = -\dot{M}(t) > 0, \quad \frac{d(e(t)\dot{\phi}(t))}{dt} = -\dot{P}(t) \quad (4.7)$$

и

$$M(t) + e(t) = M(0) + e^0, \quad P(t) + e(t)\dot{\phi}(t) = P(0) + e^0\dot{\phi}(0), \quad (4.8)$$

где $M(0) = S_v(0)$, $P(0) = S_{uv}(0)$ – начальные масса и импульс.

Так как система уравнений газовой динамики без давления имеет совпадающие собственные значения $\lambda_1(u) = \lambda_2(u) = u$, то условия “сверхсжатия” (1.25) имеют вид

$$u_+ \leq \dot{\phi}(t) \leq u_-. \quad (4.9)$$

Условия Ренкина–Гюгоньо для системы (1.9) имеют вид (2.15). Согласно (4.9), для первого условия в (2.15) имеем неравенство

$$\dot{e}(t) = v_-(u_- - \dot{\phi}(t)) + v_+(\dot{\phi}(t) - u_+) > 0.$$

Систему (4.8) можно переписать в виде

$$\dot{\phi}(t) = \frac{P(0) + e^0\dot{\phi}(0) - P(t)}{M(0) + e^0 - M(t)}, \quad e(t) = M(0) + e^0 - M(t).$$

Согласно (4.8), в случае специальных начальных данных $M(0) = -e^0$, $P(0) = -e^0\dot{\phi}(0)$ точка разрыва $x = \phi(t)$ движется со скоростью

$$\dot{\phi}(t) = \frac{P(t)}{M(t)} = \frac{\int_{x \neq \phi(t)} u(x, t) v(x, t) dx}{\int_{x \neq \phi(t)} v(x, t) dx}, \quad (4.10)$$

т. е. таким образом, как если бы вся масса была сосредоточена в точке $x = \phi(t)$. Согласно формуле (4.10), точка $x = \phi(t)$ является центром масс системы.

Из (4.8) видно, что смысл амплитуды $e(t)$, дельта-функции – “масса” точки $x = \phi(t)$ на линии разрыва, а смысл $e(t)\dot{\phi}(t)$ – “импульс” точки $x = \phi(t)$ на линии разрыва. В силу неравенств в (4.7) имеет место процесс переноса и концентрации массы из-под графика функции $y = \hat{v}(x, t)$ на кривую разрыва $x = \phi(t)$. При этом полная масса $M(t) + e(t)$ и полный импульс $P(t) + e(t)\dot{\phi}(t)$ сохраняются во времени.

Модель газовой динамики без давления может быть описана на дискретном уровне как множество движущихся частиц. При соударениях частицы слипаются, образуя одну новую массивную частицу.

Если за *конечное время* t^* вся начальная масса $M(0) + e^0$ сконцентрируется в точке $x = \phi(t^*)$ линии разрыва $x = \phi(t)$, то после этого момента возникнет состояние вакуума $v_- = v_+ = 0$ (везде, исключая линии разрыва) и, в соответствии с (2.15), упомянутая точка массы $e(t^*) = M(0) + e^0$ будет двигаться со скоростью $\dot{\phi}(t^*)$ по прямой линии $x = \phi(t) = \dot{\phi}(t^*)(t - t^*) + \phi(t^*)$.

4.4. δ' -ударные волны. Случай системы (1.21). Для δ' -ударных волн имеют место балансовые соотношения, аналогичные приведенным выше соотношениям (4.2), (4.3) для δ -ударных волн.

Пусть

$$\begin{aligned} S_w(t) &= \int_{-\infty}^{\phi(t)} w(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} w(x, t) dx, \\ S_w(0) &= \int_{-\infty}^0 w^0(x) dx + \int_0^{+\infty} w^0(x) dx \end{aligned} \quad (4.11)$$

– площади под графиками функций $y = \hat{w}(x, t)$ и $y = \hat{w}^0(x)$ соответственно, где $x = \phi(t)$ – линия в верхней полуплоскости $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty)\}$, выходящая из точки $\phi(0) = 0$.

Повторяя почти дословно доказательство теоремы 4.1, получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.3 [4; 3.3]. Пусть тройка распределений (u, v, w) и кривая разрыва $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t)\}$ – решение (в смысле определения 3.1) типа δ' -ударной волны задачи Коши (1.21), (3.1), где $v(x, t) = \hat{v}(x, t) + e(t)\delta(\Gamma)$, $w(x, t) = \hat{w}(x, t) + g(x, t)\delta(\Gamma) + h(x, t)\delta'(\Gamma)$ и $u(x, t)$, $\hat{v}(x, t)$, $\hat{w}(x, t)$ – функции с компактным носителем по x . Тогда имеют место следующие балансовые законы:

$$\begin{aligned} \dot{S}_u(t) &= 0, \\ \dot{S}_v(t) &= -\dot{e}(t) = -\left([f'(u)v] - [v] \frac{[f(u)]}{[u]}\right) \Big|_{x=\phi(t)}, \\ \dot{S}_w(t) &= -\dot{g}(t) = -\left([f''(u)v^2 + f'(u)w] - [w] \frac{[f(u)]}{[u]}\right) \Big|_{x=\phi(t)}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где площади $S_u(t)$, $S_v(t)$, $S_w(t)$ даются формулами (4.1), (4.11), а первые дефициты Ренкина–Гюгоньо $\dot{e}(t)$, $\dot{g}(t)$ – формулами (3.4), (3.5). Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\phi(t)} u(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} u(x, t) dx &= \int_{-\infty}^0 u^0(x) dx + \int_0^{+\infty} u^0(x) dx, \\ \int_{-\infty}^{\phi(t)} v(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} v(x, t) dx + e(t) &= \int_{-\infty}^0 v^0(x) dx + \int_0^{+\infty} v^0(x) dx + e^0, \\ \int_{-\infty}^{\phi(t)} w(x, t) dx + \int_{\phi(t)}^{+\infty} w(x, t) dx + g(t) &= \int_{-\infty}^0 w^0(x) dx + \int_0^{+\infty} w^0(x) dx + g^0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где e^0 и g^0 – начальные амплитуды дельта-функций в компонентах v и w соответственно.

Согласно теореме 4.3, идет процесс переноса “площади” из-под графиков функций $y = \hat{v}(x, t)$ и $y = \hat{w}(x, t)$ на кривую разрыва $x = \phi(t)$. При этом скорости изменения “площадей” под графиками функций равны соответствующим первым дефицитам Ренкина–Гюгонио, взятым с обратным знаком, а полные “площади” $S_v(t) + e(t)$, $S_w(t) + g(t)$ не зависят от времени.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Неожиданным следствием теоремы 4.3 является факт, что балансовое соотношение “площади” для компоненты w не зависит от второго дефицита Ренкина–Гюгонио (3.6).

5. Задачи Коши, допускающие решения типа δ - и δ' -ударных волн

5.1. Слабое асимптотическое решение. Введем понятие слабого асимптотического решения, играющее важную роль в методе слабых асимптотик.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Обозначим через $O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^\alpha)$, $\varepsilon \rightarrow +0$, совокупность распределений $f_\varepsilon(\cdot, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $t \in [0, T]$, $\varepsilon > 0$, таких, что

$$\langle f_\varepsilon(\cdot, t), \psi(\cdot) \rangle = O(\varepsilon^\alpha), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

для каждой $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, где функция $\langle f_\varepsilon(\cdot, t), \psi(\cdot) \rangle$ непрерывна по t и оценка $O(\varepsilon^\alpha)$ равномерна по t в $[0, T]$, $T > 0$. Ясно, что оценка $O(\varepsilon^\alpha)$ не является равномерной по основным функциям ψ . Соответственным образом понимается обозначение $o_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^\alpha)$, $\varepsilon \rightarrow +0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1 [15]–[17]. Пара функций $(u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t))$, гладких при $\varepsilon > 0$, $t \in [0, T]$, называется слабым асимптотическим решением задачи Коши (1.7), (2.1) (или задачи Коши (1.8), (2.10), если при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} L_1[u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t)] &= o_{\mathcal{D}'}(1), \\ L_2[u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t)] &= o_{\mathcal{D}'}(1), \\ u_\varepsilon(x, 0) &= u^0(x) + o_{\mathcal{D}'}(1), \\ v_\varepsilon(x, 0) &= v^0(x) + o_{\mathcal{D}'}(1), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где первые две оценки являются равномерными по $t \in [0, T]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2 [4]. Тройка функций $(u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t), w_\varepsilon(x, t))$, гладких при $\varepsilon > 0$, $t \in [0, T]$, называется слабым асимптотическим решением задачи Коши (1.21), (3.1), если при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} L_1[u_\varepsilon(x, t)] &= o_{\mathcal{D}'}(1), \\ L_2[u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t)] &= o_{\mathcal{D}'}(1), \\ L_3[u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t), w_\varepsilon(x, t)] &= o_{\mathcal{D}'}(1), \\ u_\varepsilon(x, 0) &= u^0(x) + o_{\mathcal{D}'}(1), \\ v_\varepsilon(x, 0) &= v^0(x) + o_{\mathcal{D}'}(1), \\ w_\varepsilon(x, 0) &= w^0(x) + o_{\mathcal{D}'}(1), \end{aligned} \tag{5.2}$$

где первые три оценки являются равномерными по $t \in [0, T]$.

Одним из методов изучения сингулярных решений систем законов сохранения является *метод исчезающей вязкости*, который состоит в введении *вязкостных членов* в правые части исследуемой системы законов сохранения. Поскольку *вязкостные члены* допускают оценки $o_{\mathcal{D}'}(1)$, *вязкостное решение* может быть рассмотрено как частный случай *слабого асимптотического решения* задачи Коши, а члены $o_{\mathcal{D}'}(1)$ в правых частях (5.1) и (5.2) могут быть интерпретированы как малая вязкость.

В *методе слабых асимптотик* решение типа δ - или δ' -ударной волны находится как слабый предел

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon(x, t), \\ v(x, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_\varepsilon(x, t), \\ w(x, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} w_\varepsilon(x, t), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $(u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t))$ или $(u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t), w_\varepsilon(x, t))$ – *слабое асимптотическое решение* соответствующей задачи Коши.

Если $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ – *слабое асимптотическое решение* задачи Коши (1.7), (2.1) или (1.8), (2.10), а $(u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon)$ – *слабое асимптотическое решение* задачи Коши (1.21), (3.1), то, как следует из (5.1) и (5.2), для всех $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty \int L_1[u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t)]\varphi(x, t) dx dt &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty \int L_2[u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t)]\varphi(x, t) dx dt &= 0 \end{aligned}$$

или соответственно

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty \int L_1[u_\varepsilon(x, t)]\varphi(x, t) dx dt &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty \int L_2[u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t)]\varphi(x, t) dx dt &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty \int L_3[u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t), w_\varepsilon(x, t)]\varphi(x, t) dx dt &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы доказать, что предельные распределения (5.3) являются решением соответствующей задачи Коши, мы должны проинтегрировать по частям приведенные выше соотношения, перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ и доказать, что пара распределений (u, v) из определения 2.1 или 2.2 (или тройка распределений (u, v, w) из определения 3.1) удовлетворяет интегральным тождествам (2.2) или (2.11) (или (3.2)) соответственно.

5.2. Слабое асимптотическое решение задачи Коши, связанной с распространением сингулярного фронта. Чтобы изучить распространение фронта одной δ -ударной волны в системах законов сохранения (1.7) или (1.8), мы должны решить задачу Коши (1.7), (1.17) или (1.8), (1.17), (1.18).

В соответствии с [14]–[17], *слабое асимптотическое решение* задачи Коши (1.7), (1.17) (или (1.8), (1.17), (1.18)), которая допускает решение типа δ -ударной волны, ищется в виде гладкого анзаца

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, t) &= \tilde{u}_\varepsilon(x, t) + R_u(x, t, \varepsilon), \\ v_\varepsilon(x, t) &= \tilde{v}_\varepsilon(x, t) + R_v(x, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad \varepsilon > 0. \quad (5.4)$$

Для изучения распространения фронта одной δ' -ударной волны в системе (1.21) решается задача Коши (1.21), (1.23). Согласно [4]–[6], мы будем искать *слабое асимптотическое решение* этой задачи в виде гладкого анзаца

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, t) &= \tilde{u}_\varepsilon(x, t) + R_u(x, t, \varepsilon), \\ v_\varepsilon(x, t) &= \tilde{v}_\varepsilon(x, t) + R_v(x, t, \varepsilon), \quad \varepsilon > 0. \\ w_\varepsilon(x, t) &= \tilde{w}_\varepsilon(x, t) + R_w(x, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь пара функций $(\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon)$ (или тройка функций $(\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon, \tilde{w}_\varepsilon)$) является регуляризацией сингулярного анзаца (1.19) (или (1.24)) по отношению к сингулярностям $H(-x + \phi(t))$, $\delta(-x + \phi(t))$, $\delta'(-x + \phi(t))$; *поправки* $R_u(x, t, \varepsilon)$, $R_v(x, t, \varepsilon)$, $R_w(x, t, \varepsilon)$ – требующие определения функции, которые допускают оценки

$$R_j(x, t, \varepsilon) = o_{\mathcal{D}'}(1), \quad \frac{\partial R_j(x, t, \varepsilon)}{\partial t} = o_{\mathcal{D}'}(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad j = u, v, w. \quad (5.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Как было сказано, сингулярное решение задачи Коши строится как слабый предел (5.3) *слабого асимптотического решения* этой задачи (5.4) или (5.5). В силу условий (5.6) вне зависимости от выбора поправок $R_u(x, t, \varepsilon)$, $R_v(x, t, \varepsilon)$, $R_w(x, t, \varepsilon)$ они *не дают вклада* (!) в слабый предел (5.3), т. е. в (u, v) (или в (u, v, w)). Тем не менее, выбор *поправок* в таких задачах является существенной и непростой частью построения *слабого асимптотического решения* (см. ниже и [14]–[17], [29]–[31], [4]).

Для распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ определим регуляризацию, например, как свертку

$$f(x, \varepsilon) = f(x) * \frac{1}{\varepsilon} \omega\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad (5.7)$$

где сглаживающая функция ω обладает следующими свойствами: (а) $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$, (б) $\omega(\eta)$ имеет компактный носитель или достаточно быстро убывает при $|\eta| \rightarrow \infty$, (с) $\int \omega(\eta) d\eta = 1$, (d) $\omega(\eta) \geq 0$, (е) $\omega(-\eta) = \omega(\eta)$. Очевидно, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle f(\cdot, \varepsilon), \psi(\cdot) \rangle = \langle f(\cdot), \psi(\cdot) \rangle$ для всех $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Таким образом, мы будем искать слабое асимптотическое решение задачи Коши (1.7), (1.17) или (1.8), (1.17), (1.18) в форме

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, t) &= u_+(x, t) + [u(x, t)]H_u(-x + \phi(t), \varepsilon) + R_u(x, t, \varepsilon), \\ v_\varepsilon(x, t) &= v_+(x, t) + [v(x, t)]H_v(-x + \phi(t), \varepsilon) \\ &\quad + e(t)\delta_v(-x + \phi(t), \varepsilon) + R_v(x, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5.8)$$

а слабое асимптотическое решение задачи Коши (1.21), (1.23) в форме

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, t) &= u_+(x, t) + [u(x, t)]H_u(-x + \phi(t), \varepsilon) + R_u(x, t, \varepsilon), \\ v_\varepsilon(x, t) &= v_+(x, t) + [v(x, t)]H_v(-x + \phi(t), \varepsilon) \\ &\quad + e(t)\delta_v(-x + \phi(t), \varepsilon) + R_v(x, t, \varepsilon), \\ w_\varepsilon(x, t) &= w_+(x, t) + [w(x, t)]H_w(-x + \phi(t), \varepsilon) \\ &\quad + g(t)\delta_w(-x + \phi(t), \varepsilon) + h(t)\delta'_w(-x + \phi(t), \varepsilon) + R_w(x, t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь, согласно сказанному выше,

$$\delta_v(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \omega_e \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad \delta_w(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \omega_g \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \quad (5.10)$$

– регуляризации дельта-функции,

$$\delta'_w(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \omega'_h \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \quad (5.11)$$

– регуляризация распределения δ' и

$$H_j(x, \varepsilon) = \omega_{0j} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) = \int_{-\infty}^{x/\varepsilon} \omega_j(\eta) d\eta \quad (5.12)$$

– регуляризации функции Хевисайда $H(x)$, где $\omega_{0j} \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \omega_{0j}(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \omega_{0j}(x) = 0$, а сглаживающие функции ω_e , ω_g , ω_h и ω_j , $j = u, v, w$, имеют свойства (а)–(е).

Если мы хотим исследовать *взаимодействие нелинейных волн*, мы ищем решение соответствующей задачи Коши в виде сингулярного анзаца

$$U(x, t) = U_0(x, t) + \sum_{k=1}^m U_k(x, t) s_k(x - \phi_k(t)), \quad (5.13)$$

где $U_0(x, t)$, $U_k(x, t)$, $\phi_k(t)$ – функции, подлежащие определению, $s_k(x)$ – заданные сингулярности решения, сосредоточенные на фронтах нелинейных волн $x = \phi_k(t)$, $k = 1, \dots, m$. Чтобы найти решение задачи в форме (5.13), мы ищем *слабое асимптотическое решение* задачи вида

$$U_\varepsilon(x, t) = U_0(x, t) + \sum_{k=1}^m U_k(x, t) s_k(x - \phi_k(t, \varepsilon), \varepsilon), \quad (5.14)$$

где $s_k(x, \varepsilon)$ и $\phi_k(t, \varepsilon)$ – гладкие аппроксимации распределения $s_k(x)$ и фазы $\phi_k(t)$ соответственно, ε – малый параметр. Для нахождения *слабого асимптотического решения* нужно построить слабые асимптотики от выражений типа $f(U_\varepsilon(x, t))$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, где f – гладкая функция. Такие формулы (впервые полученные в [64], [17]) дают представление $f(U_\varepsilon(x, t))$ в виде *линейных комбинаций* распределений $s_k(x - \phi_k(t))$ с точностью до членов порядка $o_{\mathcal{D}'}(1)$. Такие формулы можно рассматривать как “принцип нелинейной суперпозиции” сингулярностей. Частный случай такой формулы дается ниже леммой 5.1.

5.3. Распространение δ -ударной волны в системе (1.10). Рассмотрим задачу Коши (1.10), (1.17), где $[u^0(0)] > 0$. Так как $\lambda_1(u) = f'(u)$, $\lambda_2(u) = g(u)$ – собственные значения характеристической матрицы системы (1.10), то, чтобы удовлетворить условию “сверхсжатия” (1.25), предположим, что

$$f''(u) > 0, \quad g'(u) > 0, \quad f'(u) \leq g(u). \quad (5.15)$$

Для построения *слабого асимптотического решения* задачи (1.10), (1.17) вида (5.8) выберем поправки в форме

$$R_u(x, t, \varepsilon) = 0, \quad R_v(x, t, \varepsilon) = R(t) \frac{1}{\varepsilon} \Omega'' \left(\frac{-x + \phi(t)}{\varepsilon} \right), \quad (5.16)$$

где $R(t)$ – непрерывная функция, $\varepsilon^{-3}\Omega''(x/\varepsilon)$ – регуляризация распределения $\delta''(x)$, сглаживающая функция $\Omega(\eta)$ имеет свойства (а)–(с) (см. п. 5.2). Ясно, что справедливы оценки (5.6).

Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 5.1 [64; следствие 1.1], [16], [17]. *Если $f(u)$, $g(u)$ – гладкие функции, $u_\varepsilon(x, t)$, $v_\varepsilon(x, t)$ заданы в (5.8), (5.16), то имеют место слабые асимптотики: при $\varepsilon \rightarrow +0$*

$$f(u_\varepsilon(x, t)) = f(u_+) + [f(u(x, t))]H(-x + \phi) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x, t)g(u_\varepsilon(x, t)) &= g(u_+)v_+ + [g(u)v]H(-x + \phi(t)) \\ &\quad + \{e(t)a(t) + R(t)c(t)\}\delta(-x + \phi(t)) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.18)$$

где

$$\begin{aligned} a(t) &= \int g(u_-(x, t)\omega_{0u1}(\eta) + u_+(x, t)(1 - \omega_{0u1}(\eta)))|_{x=\phi(t)}\omega_{\delta1}(\eta) d\eta, \\ c(t) &= \int g(u_-(x, t)\omega_{0u1}(\eta) + u_+(x, t)(1 - \omega_{0u1}(\eta)))|_{x=\phi(t)}\Omega''(\eta) d\eta \neq 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

(ω_{0u1} , $\omega_{\delta1}$, Ω – сглаживающие функции).

ТЕОРЕМА 5.1 [16], [17]. *Путь имеет место (5.15) и $[u^0(0)] > 0$. Тогда существуют такие $T > 0$ и окрестность нуля $K \subset \mathbb{R}$, что при $(x, t) \in K \times [0, T]$ задача Коши (1.10), (1.17) имеет слабое асимптотическое решение (5.8), (5.16) тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} u_{\pm t} + (f(u_{\pm}))_x &= 0, & \pm x > \pm\phi(t), \\ v_{\pm t} + (g(u_{\pm})v_{\pm})_x &= 0, & \pm x > \pm\phi(t), \\ \dot{\phi}(t) &= \frac{[f(u)]}{[u]} \Big|_{x=\phi(t)}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \left([vg(u)] - [v] \frac{[f(u)]}{[u]} \right) \Big|_{x=\phi(t)}, \\ R(t) &= \frac{e(t)}{c(t)} \left(\frac{[f(u)]}{[u]} \Big|_{x=\phi(t)} - a(t) \right), \end{aligned} \quad (5.21)$$

где $[h(u(x, t), v(x, t))]$ – скачок функции $h(u(x, t), v(x, t))$ через линию разрыва $x = \phi(t)$, а $a(t)$, $c(t)$ определены формулами (5.19). Начальные данные для системы (5.20), (5.21) определяются из начальных данных (1.17) и

$$\phi(0) = 0, \quad R(0) = \frac{e^0}{c(0)} \left(\frac{[f(u^0)]}{[u^0]} \Big|_{x=0} - a(0) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим анзац (5.8), (5.16) и слабые асимптотики $f(u_\varepsilon(x, t))$, $g(u_\varepsilon(x, t))v_\varepsilon(x, t)$, заданные леммой 5.1, в систему (1.10). Учитывая оценки (5.6), мы получим, с точностью до $O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$, соотношения

$$\begin{aligned} (u_\varepsilon)_t + (f(u_\varepsilon))_x &= u_{+t} + (f(u_+))_x + \left\{ \frac{\partial[u]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[f(u)] \right\} H(-x + \phi(t)) \\ &\quad + \{[u]\dot{\phi}(t) - [f(u)]\}\delta(-x + \phi(t)) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
(v_\varepsilon)_t + (g(u_\varepsilon)v_\varepsilon)_x &= v_{+t} + (g(u_+)v_+)_x + \left\{ \frac{\partial[v]}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[vg(u)] \right\} H(-x + \phi(t)) \\
&+ \{[v]\dot{\phi}(t) + \dot{e}(t) - [vg(u)]\}\delta(-x + \phi(t)) \\
&+ \{e(t)\dot{\phi}(t) - e(t)a(t) - c(t)R(t)\}\delta'(-x + \phi(t)) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon),
\end{aligned} \tag{5.23}$$

где $a(t)$, $c(t)$ определены в (5.19). Ясно, что сглаживающие функции $\omega_{0u1}(\xi)$, $\Omega(\xi)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $\int \omega_{0u1}(\eta)\Omega'(\eta) d\eta > 0$. Следовательно, принимая во внимание, что $g'(u) > 0$, $[u^0(x)] > 0$, и интегрируя по частям, получим

$$c(t) = - \int g'(u_0(x, t) + u_1(x, t)\omega_{0u1}(\eta))u_1(x, t)|_{x=\phi(t)}\omega_{u1}(\eta)\Omega'(\eta) d\eta \neq 0.$$

Приравнивая к нулю правые части (5.22), (5.23), получим необходимые и достаточные условия того, что $(u_\varepsilon)_t + (f(u_\varepsilon))_x = O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$ и $(v_\varepsilon)_t + (g(u_\varepsilon)v_\varepsilon)_x = O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$, т.е. систему уравнений (5.20), (5.21).

Покажем, что система уравнений (5.20), (5.21) имеет решение.

Вначале рассмотрим задачу Коши $u_t + (f(u))_x = 0$, $u(x, 0) = u^0(x)$. Согласно (5.15), функция $f(u)$ выпуклая и $[u^0(0)] > 0$, т.е. в некотором временном интервале условие устойчивости разрыва выполнено.

Следуя схеме доказательства из [73; гл. 4.2], продолжим $u_+^0(x)$ ($u_-^0(x) = u_+^0(x) + [u^0(x)]$) на множество $x \leq 0$ ($x \geq 0$) как ограниченную C^1 -функцию, обозначая продолженные функции также $u_\pm^0(x)$. Пусть $u_\pm(x, t)$ – решения класса C^1 задачи

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad u_\pm(x, 0) = u_\pm^0(x),$$

которые с очевидностью существуют для достаточно малых интервалов $[0, T_1]$ и могут быть найдены интегрированием вдоль характеристик. Функции $u_\pm(x, t)$ определяют двулистное покрытие плоскости (x, t) . Далее, определим линию разрыва $x = \phi(t)$ как решение задачи

$$\dot{\phi}(t) = \frac{f(u_+(x, t)) - f(u_-(x, t))}{u_+(x, t) - u_-(x, t)} \Big|_{x=\phi(t)}, \quad \phi(0) = 0.$$

Ясно, что для достаточно малых временных интервалов $[0, T_2]$ последняя задача имеет единственное решение $\phi(t)$. Теперь для $T = \min(T_1, T_2)$ определим решение типа ударной волны

$$u(x, t) = \begin{cases} u_+(x, t), & x > \phi(t), \\ u_-(x, t), & x < \phi(t), \end{cases}$$

которое не зависит от продолжений. Построенное единственное решение $u(x, t)$, $\phi(t)$ задачи Коши $u_t + (f(u))_x = 0$, $u(x, 0) = u^0(x)$ для $t \in [0, T)$ определяет *единственное* решение $u_\pm(x, t)$, $\phi(t)$ первых трех уравнений системы (5.20).

Итак, решив упомянутую выше задачу Коши, мы найдем $u(x, t)$, $\phi(t)$. Затем, подставив эти функции в (5.20), определим $\hat{v}(x, t) = \hat{v}_+(x, t) + [\hat{v}](x, t)H(-x + \phi(t))$, $e(t)$ и $v(x, t) = \hat{v}(x, t) + e(t)\delta(-x + \phi(t))$. Таким образом, мы построили

единственное решение системы (5.20) и тем самым единственным образом определили функции $u_{\pm}(x, t)$, $v_{\pm}(x, t)$, $e(t)$, $\phi(t)$.

Ясно, что для каждого набора функций $u_{\pm}(x, t)$, $e(t)$, $\phi(t)$, $t \in [0, T)$, существует функция $R(t)$, заданная уравнением (5.21).

Итак, для $t \in [0, T)$ задача Коши (1.10), (1.17) имеет слабое асимптотическое решение (5.8), (5.16) тогда и только тогда, когда выполнены (5.20), (5.21). Теорема 5.1 доказана.

Используя слабое асимптотическое решение задачи Коши (1.10), (1.17), построенное в теореме 5.1, найдем решение типа δ -ударной волны для этой задачи.

ТЕОРЕМА 5.2 [16], [17]. Пусть $[u^0(0)] > 0$. Тогда существуют такие $T > 0$ и окрестность нуля $K \subset \mathbb{R}$, что для $(x, t) \in K \times [0, T)$ задача Коши (1.10), (1.17), (5.15) имеет единственное решение (1.19), удовлетворяющее интегральным тождествам (2.2), где $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t), t \in [0, T)\}$, а функции $u_{\pm}(x, t)$, $v_{\pm}(x, t)$, $\phi(t)$, $e(t)$ задаются системой уравнений

$$\begin{aligned} (u_{\pm})_t + (f(u_{\pm}))_x &= 0, & \pm x > \pm \phi(t), \\ (v_{\pm})_t + (g(u_{\pm})v_{\pm})_x &= 0, & \pm x > \pm \phi(t), \\ \dot{\phi}(t) &= \left. \frac{[f(u)]}{[u]} \right|_{x=\phi(t)}, \\ \dot{e}(t) &= \left([vg(u)] - [v] \frac{[f(u)]}{[u]} \right) \Big|_{x=\phi(t)} \end{aligned} \quad (5.24)$$

с начальными данными, которые определяются из (1.17), $\phi(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя соотношение (5.21), определяющее $R(t)$, в асимптотическую формулу (5.18) из леммы 5.1, получим

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon}(x, t)g(u_{\varepsilon}(x, t)) &= v_+g(u_+) + [vg(u)]|_{x=\phi(t)}H(-x + \phi(t)) \\ &+ e(t)\frac{[f(u)]}{[u]} \Big|_{x=\phi(t)}\delta(-x + \phi(t)) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Согласно теореме 5.1, $(u_{\varepsilon})_t + (f(u_{\varepsilon}))_x = O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$ и $(v_{\varepsilon})_t + (g(u_{\varepsilon})v_{\varepsilon})_x = O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$. Умножая обе части этих соотношений на основную функцию $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, T))$ и интегрируя по частям левые части этих соотношений, найдем

$$\begin{aligned} \int_0^T \int (u_{\varepsilon}(x, t)\varphi_t(x, t) + f(u_{\varepsilon}(x, t))\varphi_x(x, t)) dx dt \\ + \int u_{\varepsilon}(x, 0)\varphi(x, 0) dx = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int (v_{\varepsilon}(x, t)\varphi_t(x, t) + v_{\varepsilon}(x, t)g(u_{\varepsilon}(x, t))\varphi_x(x, t)) dx dt \\ + \int v_{\varepsilon}(x, 0)\varphi(x, 0) dx = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Подставляя асимптотики (5.8), (5.17), (5.25) в соотношения (5.26), (5.27), переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ в каждом из интегралов и учитывая, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^T \int e(t) \delta_{v1}(-x + \phi(t), \varepsilon) \varphi(x, t) dx dt = \int_0^T e(t) \varphi(\phi(t), t) dt, \quad (5.28)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int e(0) \delta_{v1}(-x, \varepsilon) \varphi(x, 0) dx = e(0) \varphi(0, 0), \quad (5.29)$$

видим, что пара распределений (1.19) удовлетворяет интегральному тождеству (2.2), т. е. является решением задачи.

Согласно доказательству теоремы 5.1, система уравнений (5.20), которая определяет компоненты $u_{\pm}(x, t)$, $v_{\pm}(x, t)$, $e(t)$, $\phi(t)$ решения типа δ -ударной волны (1.19), имеет *единственное* решение. Отсюда следует, что задача Коши (1.10), (1.17) имеет *единственное* решение.

Тот факт, что построенное решение не зависит от используемых аппроксимаций, подробно рассмотрен ниже в п. 5.7. Теорема 5.2 доказана.

5.4. Распространение δ -ударной волны в системе типа Кейфитц–Кранцера (1.28). Рассмотрим задачу Коши (1.28), (1.17). Для системы (1.28) собственные значения характеристической матрицы суть

$$\lambda_{\pm}(u) = \frac{1}{2} \left(f'(u) - \beta \pm \sqrt{(f'(u) + \beta)^2 - 4\alpha g'(u)} \right), \quad (f'(u) + \beta)^2 \geq 4\alpha g'(u).$$

Будем предполагать, что выполнены условия “сверхсжатия” (1.25).

Чтобы построить *слабое асимптотическое решение* задачи (1.20), (1.17) вида (5.8), выберем поправки в форме

$$R_u(x, t, \varepsilon) = P(t) \frac{1}{\varepsilon^{1/n}} \Omega_P \left(\frac{-x + \phi(t)}{\varepsilon} \right) + Q(t) \frac{1}{\varepsilon^{1/(n+1)}} \Omega_Q \left(\frac{-x + \phi(t)}{\varepsilon} \right), \quad (5.30)$$

$$R_v(x, t, \varepsilon) = 0,$$

где $P(t)$, $Q(t)$ – неизвестные функции, $\varepsilon^{-1} \Omega_P^n(x/\varepsilon)$, $\varepsilon^{-1} \Omega_Q^{n+1}(x/\varepsilon)$ – регуляризации (5.10) дельта-функции, сглаживающие функции $\Omega_P(\eta)$, $\Omega_Q(\eta)$ имеют свойства (а)–(с) (см. п. 5.2), т. е. имеют место оценки (5.6). Выберем такие сглаживающие функции $\Omega_P(\eta)$, $\Omega_Q(\eta)$, чтобы

$$\begin{aligned} \int \Omega_P^k(\eta) \Omega_Q^{n+1-k}(\eta) d\eta &= 0, \quad k = 1, \dots, n+1, \\ \int \Omega_Q^{n+1}(\eta) d\eta &\neq 0, \quad \int \Omega_P^n(\eta) d\eta \neq 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Докажем лемму, являющуюся аналогом леммы 5.1.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\delta(x, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \omega_{\delta}(x/\varepsilon)$, $\varepsilon^{-1} \omega_1(x/\varepsilon)$ – регуляризации (5.10) дельта-функции и $H(x, \varepsilon) = \omega_0(x/\varepsilon) = \int_{-\infty}^{x/\varepsilon} \omega(\eta) d\eta$, $j = 1, 2$, – регуляризации (5.12) функции Хевисайда $H(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (см. п. 5.2). Тогда имеют место

следующие слабые асимптотики: при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} (H(x, \varepsilon))^r &= H(x) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \\ (H(x, \varepsilon))^r \delta(x, \varepsilon) &= B_r \delta(x) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \\ \delta(x, \varepsilon) \left(\omega_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right)^r &= A_r \delta(x) + O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.32)$$

где

$$B_r = \int \omega_0^r(\eta) \omega_\delta(\eta) d\eta, \quad A_r = \int \omega_\delta(\eta) \omega^r(\eta) d\eta, \quad r = 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что первое соотношение в (5.32) выполнено. Делая замену переменных $x = \varepsilon \eta$, получим, что для всех $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} &\left\langle \left(\omega_0 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right)^r \frac{1}{\varepsilon} \omega_\delta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \psi(x) \right\rangle \\ &= \int \omega_0^r(\eta) \omega_\delta(\eta) \psi(\varepsilon \eta) d\eta = B_r \psi(0) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \end{aligned}$$

т. е. выполнено второе соотношение (5.32). Так как $\omega_\delta(\eta) \omega^r(\eta)$ достаточно быстро убывает при $|\eta| \rightarrow \infty$, докажем третье соотношение в (5.32): для всех $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{1}{\varepsilon} \omega_\delta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left(\omega_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right)^r, \psi(x) \right\rangle \\ &= \int \omega_\delta(\eta) \omega^r(\eta) \psi(\varepsilon \eta) d\eta = A_r \psi(0) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Лемма 5.2 доказана.

Используя (5.30), (5.31), построим слабое асимптотическое решение (5.8) задачи Коши (1.20), (1.17).

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть

$$\lambda_+(u_+^0(0)) \leq \frac{[f(u^0) - \alpha v^0]}{[u^0]} \Big|_{x=0} \leq \lambda_-(u_-^0(0)). \quad (5.33)$$

Тогда существуют такие $T > 0$ и окрестность нуля $K \subset \mathbb{R}$, что для $(x, t) \in K \times [0, T)$ задача Коши (1.28), (1.17) имеет единственное слабое асимптотическое решение (5.8), (5.30), (5.31) тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} (u_\pm)_t + (f(u_\pm) - \alpha v_\pm)_x &= 0, \quad \pm x > \pm \phi(t), \\ (v_\pm)_t + (g(u_\pm) - \beta v_\pm)_x &= 0, \quad \pm x > \pm \phi(t), \\ \dot{\phi}(t) &= \frac{[f(u) - \alpha v]}{[u]} \Big|_{x=\phi(t)}, \\ \dot{c}(t) &= \left([g(u) - \beta v] - [v] \frac{[f(u) - \alpha v]}{[u]} \right) \Big|_{x=\phi(t)} \end{aligned} \quad (5.34)$$

u

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \left(\frac{\alpha e(t)}{a A_n} \right)^{1/n}, \\
 Q(t) &= \left\{ \frac{e(t)}{c B_{n+1}} \left(\frac{[f(u) - \alpha v]}{[u]} + \beta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\alpha}{A_n} \left(B_n + \left(\left(1 - \frac{b}{a} \right) u_+ + \frac{b}{a} u_- \right) (n+1) B_{n+1} \right) \right) \right\} \Big|_{x=\phi(t)} \Big\}^{1/(n+1)},
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

где

$$a = \int \Omega_P^n(\eta) d\eta > 0, \quad b = \int \omega_{0u}(\eta) \Omega_P^n(\eta) d\eta, \quad c = \int \Omega_Q^{n+1}(\eta) d\eta \neq 0. \tag{5.36}$$

Начальные данные для (5.34), (5.35) определяются из (1.17) и

$$\begin{aligned}
 e(0) &= e^0, \quad \phi(0) = 0, \\
 P(0) &= \left(\frac{e^0}{a A_n} \right)^{1/n}, \\
 Q(0) &= \left\{ \frac{e^0}{c B_{n+1}} \left(\frac{[f(u^0) - \alpha v^0]}{[u^0]} + \beta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\alpha}{A_n} \left(B_n + \left(\left(1 - \frac{b}{a} \right) u_+^0 + \frac{b}{a} u_-^0 \right) (n+1) B_{n+1} \right) \right) \right\} \Big|_{x=0}^{1/(n+1)}.
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя второе и третье соотношения в (5.32) из леммы 5.2, вычислим следующие слабые асимптотики:

$$\begin{aligned}
 R_u^k(x, t, \varepsilon) &= o_{\mathcal{D}'}(1), \quad k \leq n-1, \\
 R_u^n(x, t, \varepsilon) &= a P^n(t) \delta(-x + \phi(t)) + o_{\mathcal{D}'}(1), \\
 H(-x + \phi(t), \varepsilon) R_u^n(x, t, \varepsilon) &= b P^n(t) \delta(-x + \phi(t)) + o_{\mathcal{D}'}(1), \\
 R_u^{n+1}(x, t, \varepsilon) &= c Q^{n+1}(t) \delta(-x + \phi(t)) + o_{\mathcal{D}'}(1),
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

где a, b, c определяются формулами (5.36). С помощью (5.37) и леммы 5.2 можно найти

$$\begin{aligned}
 (u_\varepsilon(x, t))^k &= u_+^k + (u_-^k - u_+^k) H(-x + \phi(t)) + o_{\mathcal{D}'}(1), \quad k \leq n-1, \\
 (u_\varepsilon(x, t))^n &= u_+^n + (u_-^n - u_+^n) H(-x + \phi(t)) + R_u^n(x, t, \varepsilon) + o_{\mathcal{D}'}(1), \\
 (u_\varepsilon(x, t))^{n+1} &= u_+^{n+1} + (u_-^{n+1} - u_+^{n+1}) H(-x + \phi(t)) \\
 &\quad + (n+1)(u_+ + [u] H(-x + \phi(t), \varepsilon)) R_u^n(x, t, \varepsilon) \\
 &\quad + R_u^{n+1}(x, t, \varepsilon) + o_{\mathcal{D}'}(1).
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

С учетом соотношений (5.37), (5.38), (5.8), (5.30), (5.31), получим следующие слабые асимптотики: при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\begin{aligned}
 f(u_\varepsilon(x, t)) - \alpha v_\varepsilon(x, t) &= f(u_+) - \alpha v_+ + [f(u) - \alpha v] H(-x + \phi(t)) \\
 &\quad + \{a A_n P^n(t) - \alpha e(t)\} \delta(-x + \phi(t)) + o_{\mathcal{D}'}(1),
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}
 g(u_\varepsilon(x, t)) - \beta v_\varepsilon(x, t) &= g(u_+) - \beta v_+ + [g(u) - \beta v]H(-x + \phi(t)) \\
 &+ \{aB_n P^n(t) + (n+1)(au_+ + b[u])B_{n+1}P^n(t) \\
 &+ cB_{n+1}Q^{n+1}(t) - \beta e(t)\}\delta(-x + \phi(t)) + o_{\mathcal{D}'}(1).
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Подставляя гладкий анзац (5.8) и соотношения (5.39), (5.40) в левую часть системы (1.28) и принимая во внимание (5.6), получим

$$\begin{aligned}
 (u_\varepsilon)_t + (f(u_\varepsilon) - \alpha v_\varepsilon)_x &= (u_+)_t + (f(u_+) - \alpha v_+)_x \\
 &+ \left\{ \frac{\partial}{\partial t}[u] + \frac{\partial}{\partial x}[f(u) - \alpha v] \right\} H(-x + \phi(t)) \\
 &+ \{[u]\dot{\phi}(t) - [f(u) - \alpha v]\}\delta(-x + \phi(t)) \\
 &+ \{\alpha e(t) - aA_n P^n(t)\}\delta'(-x + \phi(t)) + o_{\mathcal{D}'}(1),
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
 (v_\varepsilon)_t + (g(u_\varepsilon) - \beta v_\varepsilon)_x &= (v_+)_t + (g(u_+) - \beta v_+)_x \\
 &+ \left\{ \frac{\partial}{\partial t}[v] + \frac{\partial}{\partial x}[g(u) - \beta v] \right\} H(-x + \phi(t)) \\
 &+ \{[v]\dot{\phi}(t) + \dot{e}(t) - [g(u) - \beta v]\}\delta(-x + \phi(t)) \\
 &+ \{e(t)\dot{\phi}(t) + \beta e(t) - aB_n P^n(t) - (n+1)(au_+ + b[u])B_{n+1}P^n(t) \\
 &- cB_{n+1}Q^{n+1}(t)\}\delta'(-x + \phi(t)) + o_{\mathcal{D}'}(1)
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Приравнивая к нулю левую часть (5.41), (5.42), мы увидим, что для того чтобы $(u_\varepsilon)_t + (f(u_\varepsilon) - \alpha v_\varepsilon)_x = o_{\mathcal{D}'}(1)$, $(v_\varepsilon)_t + (g(u_\varepsilon) - \beta v_\varepsilon)_x = o_{\mathcal{D}'}(1)$, необходимо и достаточно выполнение условий (5.34), (5.35).

Покажем, что система уравнений (5.34), (5.35) имеет решение. Повторяя почти дословно часть доказательства теоремы 5.1, основанную на схеме из [73; гл. 4.2], мы докажем существование такого $T > 0$, что для $t \in [0, T)$ система уравнений (5.34), которая определяет функции $u_\pm(x, t)$, $v_\pm(x, t)$, $e(t)$, $\phi(t)$, имеет *единственное* решение. При этом мы используем тот факт, что поскольку согласно (5.33) энтропийные условия “сверхсжатия” (1.25) имеют место при $t = 0$, то существует такое $T > 0$, что для $0 \leq t < T$ условия “сверхсжатия” также имеют место.

Далее, подставляя найденные из системы уравнений (5.34) функции $u_\pm(x, t)$, $v_\pm(x, t)$, $e(t)$, $\phi(t)$ в правые части соотношений (5.35), мы найдем функции $P(t)$ и $Q(t)$.

Таким образом, задача Коши (1.20), (1.17) имеет слабое асимптотическое решение (5.8), (5.16) тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (5.34), (5.35). Теорема 5.3 доказана.

Используя слабое асимптотическое решение, полученное в теореме 5.3, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть выполнены неравенства (5.33). Тогда существуют такие $T > 0$ и окрестность нуля $K \subset \mathbb{R}$, что для $(x, t) \in K \times [0, T)$ задача Коши (1.28), (1.17) имеет единственное решение (1.19), удовлетворяющее

интегральным тождествам (2.2), где $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t), t \in [0, T]\}$, а функции $u_{\pm}(x, t)$, $v_{\pm}(x, t)$, $\phi(t)$, $e(t)$ задаются системой уравнений

$$\begin{aligned} (u_{\pm})_t + (f(u_{\pm}) - \alpha v_{\pm})_x &= 0, & \pm x > \pm \phi(t), \\ (v_{\pm})_t + (g(u_{\pm}) - \beta v_{\pm})_x &= 0, & \pm x > \pm \phi(t), \\ \dot{\phi}(t) &= \frac{[f(u)] - \alpha[v]}{[u]} \Big|_{x=\phi(t)}, \\ \dot{e}(t) &= \left([g(u) - \beta v] - [v] \frac{[f(u)] - \alpha[v]}{[u]} \right) \Big|_{x=\phi(t)} \end{aligned} \quad (5.43)$$

с начальными данными, которые определяются из (1.17), $\phi(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя функции поправок $P(t)$, $Q(t)$, заданные соотношениями (5.35), в (5.39), (5.40) получим следующие асимптотики: при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} f(u_{\varepsilon}(x, t)) - \alpha v_{\varepsilon}(x, t) \\ = f(u_+) - \alpha v_+ + [f(u) - \alpha v]H(-x + \phi(t)) + o_{\mathcal{D}'}(1), \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} g(u_{\varepsilon}(x, t)) - \beta v_{\varepsilon}(x, t) &= g(u_+) - \beta v_+ + [g(u) - \beta v]H(-x + \phi(t)) \\ &+ e(t) \frac{[f(u) - \alpha v]}{[u]} \delta(-x + \phi(t)) + o_{\mathcal{D}'}(1). \end{aligned} \quad (5.45)$$

В силу теоремы 5.3 будем иметь:

$$(u_{\varepsilon})_t + (f(u_{\varepsilon}) - \alpha v_{\varepsilon})_x = o_{\mathcal{D}'}(1), \quad (v_{\varepsilon})_t + (g(u_{\varepsilon}) - \beta v_{\varepsilon})_x = o_{\mathcal{D}'}(1).$$

Применяя левые и правые части этих соотношений к произвольной основной функции $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, T])$, принимая во внимание, что $u_{\varepsilon}(x, t)$, $v_{\varepsilon}(x, t)$ — гладкие функции, и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int (u_{\varepsilon}(x, t) \varphi_t(x, t) + (f(u_{\varepsilon}(x, t)) - \alpha v_{\varepsilon}(x, t)) \varphi_x(x, t)) dx dt \\ &\quad + \int u_{\varepsilon}(x, 0) \varphi(x, 0) dx = o(1), \\ &\int_0^T \int (v_{\varepsilon}(x, t) \varphi_t(x, t) + (g(u_{\varepsilon}(x, t)) - \beta v_{\varepsilon}(x, t)) \varphi_x(x, t)) dx dt \\ &\quad + \int v_{\varepsilon}(x, 0) \varphi(x, 0) dx = o(1) \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Подставляя асимптотики (5.8) и (5.44), (5.45) в эти соотношения, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ в каждом интеграле и учитывая (5.28), (5.29), мы убедимся, что интегральные тождества (2.2) выполнены.

Согласно доказательству теоремы 5.3, система уравнений (5.43), которая определяет компоненты $u_{\pm}(x, t)$, $v_{\pm}(x, t)$, $e(t)$, $\phi(t)$ решения типа δ -ударной волны (1.19), имеет *единственное* решение. Отсюда следует, что задача Коши (1.28), (1.17) имеет *единственное* решение.

Тот факт, что построенное решение не зависит от используемых аппроксимаций подробно рассмотрен ниже в п. 5.7. Теорема 5.4 доказана.

Если $\alpha = 1$, $\beta = 0$, то теорема 5.4 дает решение задачи Коши (1.20), (1.17), которая была решена в [29] для случая кусочно постоянных начальных данных и в [31] для случая начальных данных (1.17) (см. также [9; теорема 3.2]). Известная система Кейфитц–Кранцера является частным случаем системы (1.20). Для нее имеет место следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5.1 [16], [29], [31]. Пусть

$$u_+^0(0) + 1 \leq \frac{[(u^0)^2] - [v^0]}{[u^0]} \Big|_{x=0} \leq u_-^0(0) - 1.$$

Тогда существуют такие $T > 0$ и окрестность нуля $K \subset \mathbb{R}$, что для $(x, t) \in K \times [0, T)$ задача Коши для системы Кейфитц–Кранцера (1.12), (1.17) имеет единственное решение (1.19), удовлетворяющее интегральным тождествам (2.2), где $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t), t \in [0, T)\}$, а функции $u_{\pm}(x, t)$, $v_{\pm}(x, t)$, $\phi(t)$, $e(t)$ определяются системой уравнений (5.43), где

$$f(u) = u^2, \quad g(u) = (1/3)u^3 - u.$$

Для кусочно постоянных начальных данных это утверждение можно доказать, используя вязкостное решение Дафермоса–Ди Перны, найденное в [49], и повторяя схему доказательства теоремы 6.3.

5.5. Распространение δ -ударной волны в системе газовой динамики без давления (1.9). В этом случае условия “сверхсжатия” (1.25) имеют форму (4.9). Повторяя схему доказательства приведенных выше теорем, мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.5 [16]. Пусть $u_+^0(0) \leq \dot{\phi}(0) \leq u_-^0(0)$. Тогда существуют такие $T > 0$ и окрестность нуля $K \subset \mathbb{R}$, что для $(x, t) \in K \times [0, T)$ задача Коши (1.9), (1.17), (1.18) имеет единственное решение (1.19), которое удовлетворяет интегральным тождествам (2.11), где $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t), t \in [0, T)\}$, а функции $u_{\pm}(x, t)$, $v_{\pm}(x, t)$, $\phi(t)$, $e(t)$ задаются системой уравнений

$$\begin{aligned} L_{31}[u_{\pm}, v_{\pm}] &= 0, & \pm x > \pm \phi(t), \\ L_{32}[u_{\pm}, v_{\pm}] &= 0, & \pm x > \pm \phi(t), \\ \dot{e}(t) &= ([uv] - [v]\dot{\phi}(t)) \Big|_{x=\phi(t)}, \\ \frac{d(e(t)\dot{\phi}(t))}{dt} &= ([u^2v] - [uv]\dot{\phi}(t)) \Big|_{x=\phi(t)}, \end{aligned} \tag{5.46}$$

начальные данные которой определяются из (1.17), (1.18).

5.6. Распространение δ' -ударной волны в системе (1.22). Аналогичным образом строится решение задачи Коши (1.22), (1.23).

ТЕОРЕМА 5.6 [4]. Пусть $2u_+^0(0) \leq \dot{\phi}(0) \leq 2u_-^0(0)$. Тогда существуют такие $T > 0$ и окрестность нуля $K \subset \mathbb{R}$, что для $(x, t) \in K \times [0, T)$ задача Коши (1.22), (1.23) имеет единственное решение (1.24), которое удовлетворяет системе интегральных тождеств (3.2), где $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t), t \in [0, T)\}$,

а функции $u_{\pm}(x, t)$, $v_{\pm}(x, t)$, $w_{\pm}(x, t)$, $\phi(t)$, $e(t)$, $g(t)$, $h(t)$ задаются системой уравнений

$$\begin{aligned} L_{41}[u_{\pm}] &= 0, & \pm x > \pm \phi(t), \\ L_{42}[u_{\pm}, v_{\pm}] &= 0, & \pm x > \pm \phi(t), \\ L_{43}[u_{\pm}, v_{\pm}, w_{\pm}] &= 0, & \pm x > \pm \phi(t), \\ \dot{\phi}(t) &= \frac{[u^2]}{[u]} \Big|_{x=\phi(t)} = (u_- + u_+) \Big|_{x=\phi(t)}, \\ \dot{e}(t) &= \left(2[vu] - [v] \frac{[u^2]}{[u]} \right) \Big|_{x=\phi(t)}, \\ \dot{g}(t) &= \left(2[v^2 + uw] - [w] \frac{[u^2]}{[u]} \right) \Big|_{x=\phi(t)}, \\ \frac{d(h(t)[u(\phi(t), t)])}{dt} &= \frac{de^2(t)}{dt}, \end{aligned} \tag{5.47}$$

начальные данные для которой определяются из (1.23), $\phi(0) = 0$.

Последние два уравнения в (5.24) и (5.43) (или в (5.46)) являются условиями Ренкина–Гюгонио (2.7) (или (2.13)) для решений типа δ -ударных волн. Последние четыре уравнения в (5.47) являются условиями Ренкина–Гюгонио (3.3)–(3.6) для решений типа δ' -ударных волн.

Для кусочно постоянных начальных данных в теоремах 5.1–5.6 имеем $T = \infty$.

5.7. Независимость сингулярного решения от аппроксимаций. Слагаемые $(\tilde{u}_{\varepsilon}, \tilde{v}_{\varepsilon})$ (или $(\tilde{u}_{\varepsilon}, \tilde{v}_{\varepsilon}, \tilde{w}_{\varepsilon})$) слабого асимптотического решения (5.4) (или (5.5)) являются регуляризациями сингулярного анзаца (1.19) (или (1.24)). Регуляризации $\tilde{u}_{\varepsilon}$, $\tilde{v}_{\varepsilon}$, $\tilde{w}_{\varepsilon}$ строятся по формуле (5.7), где на сглаживающую функцию ω наложены самые общие требования – это дельта-образное семейство функций. Фактически от этих регуляризаций требуется только, чтобы они в слабом смысле сходились к распределениям сингулярного анзаца.

Другие слагаемые слабого асимптотического решения – поправки $R_u(x, t, \varepsilon)$, $R_v(x, t, \varepsilon)$, $R_w(x, t, \varepsilon)$, как было отмечено в замечании 5.1, не дают вклада в слабый предел (5.3), т. е. в сингулярное решение задачи Коши.

Возникает вопрос: если предельные распределения u , v , w от поправок R_u , R_v , R_w не зависят, зачем же тогда эти поправки вводятся? Во-первых, нелинейные функции потока на асимптотическом решении, естественно, зависят от этих поправок (см. (5.18), (5.19) и (5.39), (5.40), (5.35), (5.36), (5.31)). Во-вторых, дело в том, что системы законов сохранения, которые допускают решения типа δ - и δ' -ударных волн, являются в некотором смысле *переопределенными*. Иными словами, как было сказано выше, в классе разрывных функций они могут не иметь решений или иметь их только для частных случаев начальных данных. И необходимость введения поправок отражает это свойство систем. Действительно, если мы будем строить асимптотическое решение задачи Коши (1.10), (1.17), не вводя поправок (т. е. положив $R(t) = 0$), то, как видно из формул (5.21), (5.19), эту задачу Коши можно решить, если только имеет место соотношение

$$\frac{[f(u)]}{[u]} \Big|_{x=\phi(t)} = \int g(u_-(x, t)\omega_{0u1}(\eta) + u_+(x, t)(1 - \omega_{0u1}(\eta))) \Big|_{x=\phi(t)} \omega_{\delta 1}(\eta) d\eta.$$

В общем случае это соотношение делает задачу Коши переопределенной, т. е. мы не можем ее решить для произвольных начальных данных (1.17).

Если мы будем строить асимптотическое решение задачи Коши (1.28), (1.17), положив $P(t) = 0$, то, как видно из формул (5.35), мы получим, что $e(t) = 0$, т. е. невозможно построить асимптотическое решение типа δ -ударной волны. Если при $P(t) \neq 0$ положить $Q(t) = 0$, то, как видно из формул (5.35), эту задачу Коши (1.28), (1.17) можно решить, если только при $x = \phi(t)$ имеет место соотношение

$$\frac{[f(u) - \alpha v]}{[u]} = -\beta + \frac{\alpha}{A_n} \left(B_n + \left(\left(1 - \frac{b}{a} \right) u_+ + \frac{b}{a} u_- \right) (n+1) B_{n+1} \right),$$

где a и b заданы в (5.36). Таким образом, как и в предыдущем примере, задача Коши оказывается переопределенной.

При построении слабого асимптотического решения мы получаем систему уравнений (см. (5.20), (5.21) и (5.34), (5.35)), с помощью которой поправки определяются.

6. Задача Римана, допускающая решения в виде ударных волн, δ -, δ' -ударных волн и вакуумных состояний

6.1. Метод исчезающей вязкости. Дадим краткое изложение результатов работы [7], в которой была решена задача Римана для системы (1.22) с начальными данными

$$(u^0(x), v^0(x), w^0(x)) = \begin{cases} (u_-, v_-, w_-), & x < 0, \\ (u_+, v_+, w_+), & x > 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

где $u_{\pm}$, $v_{\pm}$, $w_{\pm}$ — заданные константы.

Для решения задачи (1.22), (6.1) в [7] был использован *метод исчезающей вязкости*. В рамках этого метода вместо задачи (1.22), (6.1) сначала решается задача для параболической аппроксимации системы (1.22)

$$\begin{aligned} (u_{\varepsilon})_t + (u_{\varepsilon}^2)_x &= \varepsilon(u_{\varepsilon})_{xx}, \\ (v_{\varepsilon})_t + 2(u_{\varepsilon}v_{\varepsilon})_x &= \varepsilon(v_{\varepsilon})_{xx}, \\ (w_{\varepsilon})_t + 2(v_{\varepsilon}^2 + u_{\varepsilon}w_{\varepsilon})_x &= \varepsilon(w_{\varepsilon})_{xx} \end{aligned} \quad (6.2)$$

с начальными данными (6.1). Последняя же задача (6.2), (6.1) с помощью обобщенного преобразования Коула–Хопфа

$$u_{\varepsilon}(x, t) = -\varepsilon \frac{A_{\varepsilon x}}{A_{\varepsilon}}, \quad v_{\varepsilon}(x, t) = -\varepsilon \left(\frac{B_{\varepsilon}}{A_{\varepsilon}} \right)_x, \quad w_{\varepsilon}(x, t) = -\varepsilon \left(\frac{A_{\varepsilon} C_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^2}{A_{\varepsilon}^2} \right)_x \quad (6.3)$$

сводится к системе трех уравнений теплопроводности

$$(A_{\varepsilon})_t = \varepsilon(A_{\varepsilon})_{xx}, \quad (B_{\varepsilon})_t = \varepsilon(B_{\varepsilon})_{xx}, \quad (C_{\varepsilon})_t = \varepsilon(C_{\varepsilon})_{xx} \quad (6.4)$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} & (A_\varepsilon^0(x), B_\varepsilon^0(x), C_\varepsilon^0(x)) \\ &= \begin{cases} \left(e^{-\frac{u_-x}{\varepsilon}}, -\frac{v_-x}{\varepsilon} e^{-\frac{u_-x}{\varepsilon}}, \left(\frac{v_-^2 x^2}{\varepsilon^2} - \frac{w_-x}{\varepsilon} \right) e^{-\frac{u_-x}{\varepsilon}} \right), & x < 0, \\ \left(e^{-\frac{u_+x}{\varepsilon}}, -\frac{v_+x}{\varepsilon} e^{-\frac{u_+x}{\varepsilon}}, \left(\frac{v_+^2 x^2}{\varepsilon^2} - \frac{w_+x}{\varepsilon} \right) e^{-\frac{u_+x}{\varepsilon}} \right), & x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Известно, что решение уравнения теплопроводности $\Phi_{\varepsilon t} = \varepsilon \Phi_{\varepsilon xx}$ с начальными данными $\Phi_\varepsilon(x, 0) = \Phi_\varepsilon^0(x)$ имеет вид

$$\Phi_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon^0(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t\varepsilon}\right) dy. \quad (6.6)$$

Подставляя начальные данные (6.5) в (6.6), найдем решение задачи (6.4), (6.5). Далее, используя решение задачи (6.4), (6.5) для системы уравнений теплопроводности, мы найдем решение задачи Коши (6.2), (6.1) (см. [7; лемма 4.1]).

6.2. Слабый предел решения задачи (6.2), (6.1). Используя решение параболической задачи (6.2), (6.1), даваемое леммой 4.1 из [7], можно доказать следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 6.1 [7; теорема 5.1]. Пусть $u_+ \leq u_-$. Если $(u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon)$ – решение параболической задачи (6.2), (6.1), то для $t \in [0, \infty)$ в слабом смысле будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon(x, t) = u_+ + [u]H(-x + \phi(t)), \\ v(x, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} v_\varepsilon(x, t) = v_+ + [v]H(-x + \phi(t)) + e(t)\delta(-x + \phi(t)), \\ w(x, t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} w_\varepsilon(x, t) = w_+ + [w]H(-x + \phi(t)) \\ &\quad + g(t)\delta(-x + \phi(t)) + h(t)\delta'(-x + \phi(t)), \end{aligned} \quad (6.7)$$

где

$$\begin{aligned} \phi(t) &= ct = \frac{[u^2]}{[u]} t = (u_- + u_+)t, \\ e(t) &= (2[uv] - [v]\dot{\phi}(t))t = [u](v_- + v_+)t, \\ g(t) &= (2[v^2 + uw] - [w]\dot{\phi}(t))t = (2[v](v_- + v_+) + [u](w_- + w_+))t, \\ h(t) &= [u](v_- + v_+)^2 t^2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Более того,

$$h(t) = \frac{e^2(t)}{[u]}. \quad (6.9)$$

ТЕОРЕМА 6.2 [7; теорема 6.1]. Пусть $u_+ > u_-$. Если $(u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon)$ – решение параболической задачи (6.2), (6.1), то для $t \in [0, \infty)$ в слабом смысле будем

иметь

$$\begin{aligned}
 (u(x, t), v(x, t), w(x, t)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t), w_\varepsilon(x, t)) \\
 &= \begin{cases} (u_-, v_-, w_-), & x \leq 2u_-t, \\ \left(\frac{x}{2t}, 0, 0\right), & 2u_-t < x < 2u_+t, \\ (u_+, v_+, w_+), & x \geq 2u_+t, \end{cases} \\
 &= (u_+, v_+, w_+)(1 - H(-x + 2u_+t)) + (u_-, v_-, w_-)H(-x + 2u_-t) \\
 &\quad + \left(\frac{x}{2t}, 0, 0\right)(H(-x + 2u_+t) - H(-x + 2u_-t)). \tag{6.10}
 \end{aligned}$$

6.3. Решения типа δ - и δ' -ударных волн задачи Римана (1.22), (6.1).

При $u_+ \leq u_-$ тройка распределений (6.7), построенная в теореме 6.1, является решением типа δ' -ударной волны задачи Римана (1.22), (6.1).

ТЕОРЕМА 6.3 [7; теорема 7.1]. Пусть $u_+ \leq u_-$. Тогда для $t \in [0, \infty)$ задача Коши (1.22), (6.1) имеет единственное обобщенное решение типа δ' -ударной волны (1.24) (см. (6.7))

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= u_+ + [u]H(-x + \phi(t)), \\
 v(x, t) &= v_+ + [v]H(-x + \phi(t)) + e(t)\delta(-x + \phi(t)), \\
 w(x, t) &= w_+ + [w]H(-x + \phi(t)) + g(t)\delta(-x + \phi(t)) + h(t)\delta'(-x + \phi(t)),
 \end{aligned}$$

которое удовлетворяет интегральным тождествам (3.2), где $e(t)$, $g(t)$, $h(t)$ заданы в (6.8). Здесь $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t) = ct, t \geq 0\}$, $\hat{v}(x, t) = v_+ + [v]H(-x + \phi(t))$, $\hat{w}(x, t) = w_+ + [w]H(-x + \phi(t))$. Более того, для этого решения имеет место условие допустимости (1.26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$ – некоторая область, которая делится кривой $\Gamma = \{(x, t) : x = \phi(t) = ct, t \geq 0\}$ на левую и правую части,

$$\mathbf{n} = (\nu_1, \nu_2) = \frac{(1, -\dot{\phi}(t))}{\sqrt{1 + (\dot{\phi}(t))^2}} = \frac{(1, -c)}{\sqrt{1 + c^2}} - \text{единичная нормаль к } \Gamma, \text{ направленная}$$

из Ω_- в Ω_+ , $\mathbf{l} = (-\nu_2, \nu_1) = \frac{(c, 1)}{\sqrt{1 + c^2}}$ – касательный вектор к Γ (см. (1.4)).

Выбирая $\varphi(x, t)$ с носителем в Ω , мы видим, что левая часть первого соотношения в (3.2) приводится к виду

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \int (u(x, t)\varphi_t + u^2(x, t)\varphi_x) dx dt + \int u^0(x)\varphi(x, 0) dx \\
 &= \iint_{\Omega_-} (u_- \varphi_t + u_-^2 \varphi_x) dx dt + \iint_{\Omega_+} (u_+ \varphi_t + u_+^2 \varphi_x) dx dt \\
 &\quad + \int_{-\infty}^0 u^0(x)\varphi(x, 0) dx + \int_0^\infty u^0(x)\varphi(x, 0) dx. \tag{6.11}
 \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\frac{dx}{dt} = -\frac{\nu_2}{\nu_1} = -c$ и $\nu_1 dl = dt$, мы получим

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_{\pm}} (u_{\pm} \varphi_t + u_{\pm}^2 \varphi_x) dx dt &= \mp \int_{\Gamma} (\nu_2 u_{\pm} + \nu_1 u_{\pm}^2) \varphi dl \mp \int_0^{\pm\infty} u^0(x) \varphi(x, 0) dx \\ &= \mp \int_0^{\infty} (-cu_{\pm} + u_{\pm}^2) \varphi(ct, t) dt \mp \int_0^{\pm\infty} u^0(x) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Так как, согласно первому уравнению в (6.8),

$$\dot{\phi}(t) = c = \frac{[u^2]}{[u]},$$

то из (6.11), (6.12) следует

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int (u(x, t) \varphi_t + u^2(x, t) \varphi_x) dx dt + \int u^0(x) \varphi(x, 0) dx \\ = \int_0^{\infty} (-c[u] + [u^2]) \varphi(ct, t) dt = 0, \end{aligned}$$

т. е. имеет место первое тождество в (3.2).

Применяя проделанные выше вычисления к левой части второго соотношения в (3.2), получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int (\hat{v}(x, t) \varphi_t + 2u(x, t) \hat{v}(x, t) \varphi_x) dx dt + \int \hat{v}^0(x) \varphi(x, 0) dx \\ = \int_{\Gamma} (\nu_2 v_- + \nu_1 2u_- v_-) \varphi dl - \int_{\Gamma} (\nu_2 v_+ + \nu_1 2u_+ v_+) \varphi dl \\ = \int_{\Gamma} (\nu_2 [v] + \nu_1 2[uv]) \varphi dl = \int_0^{\infty} (-c[v] + 2[uv]) \varphi(ct, t) dt. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Так как, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^{\infty} t \frac{d\varphi(ct, t)}{dt} dt = - \int_0^{\infty} \varphi(ct, t) dt,$$

то, учитывая второе уравнение в (6.8) и (2.5), найдем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int (\hat{v}(x, t) \varphi_t + 2u(x, t) \hat{v}(x, t) \varphi_x) dx dt + \int \hat{v}^0(x) \varphi(x, 0) dx \\ = \int_0^{\infty} (-c[v] + 2[uv]) \varphi(ct, t) dt = - \int_0^{\infty} (-c[v] + 2[uv]) t \frac{d\varphi(ct, t)}{dt} dt \\ = - \int_0^{\infty} e(t) \frac{d\varphi(ct, t)}{dt} dt = - \int_{\Gamma} e(t) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial l} dl \\ = - \int_{\Gamma} e(t) \frac{\delta \varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_s^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, второе тождество в (3.2) выполнено.

Теперь, применяя приведенные выше вычисления к левой части третьего соотношения (3.2), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int (\widehat{w}(x, t) \varphi_t + 2(\widehat{v}^2(x, t) + u(x, t) \widehat{w}(x, t)) \varphi_x) dx dt \\ & + \int \widehat{w}^0(x) \varphi(x, 0) dx = - \int_0^\infty g(t) \frac{d\varphi(ct, t)}{dt} dt \\ & = - \int_\Gamma g(t) \frac{\delta\varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}}, \end{aligned}$$

где, согласно (6.8), $g(t) = \left(2[v^2 + uw] - [w] \frac{[u^2]}{[u]} \right) t$, т. е.

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int (\widehat{w}(x, t) \varphi_t + 2(\widehat{v}^2(x, t) + u(x, t) \widehat{w}(x, t)) \varphi_x) dx dt \\ & + \int \widehat{w}^0(x) \varphi(x, 0) dx + \int_\Gamma g(t) \frac{\delta\varphi(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} = 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

В силу (6.8), (6.9) имеем $e(t) = [u](v_- + v_+)t$, $h(t) = \frac{e^2(t)}{[u]} = [u](v_- + v_+)^2 t^2$. Следовательно, учитывая, что $[u]$ – константа, и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty h(t) \frac{d\varphi_x(ct, t)}{dt} dt = \int_0^\infty [u](v_- + v_+)^2 t^2 \frac{d\varphi_x(ct, t)}{dt} dt \\ & = - \int_0^\infty 2[u](v_- + v_+)^2 t \varphi_x(ct, t) dt = - \int_0^\infty \frac{1}{[u]} \frac{de^2(t)}{dt} \varphi_x(ct, t) dt, \end{aligned}$$

т. е. в силу (2.5)

$$\int_\Gamma h(x, t) \frac{\delta\varphi_x(x, t)}{\delta t} \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} + \int_\Gamma \frac{1}{[u]} \frac{\delta e_i^2(x, t)}{\delta t} \varphi_x(x, t) \frac{dl}{\sqrt{1 + u_\delta^2}} = 0. \quad (6.15)$$

Из (6.14) и (6.15) следует, что третье тождество в (3.2) выполнено. Теорема 6.3 доказана.

Очевидно, что функции в системе (6.8) удовлетворяют системе условий Ренкина–Гюгонно для δ' -ударных волн (3.3)–(3.6).

Если $u_+ \leq u_-$, то из теорем 6.1, 6.3 следует, что $c = u_+ + u_- = \dot{\phi}(t)$ – скорость, а $x = \phi(t) = ct$ – траектория движения δ' -ударной волны.

СЛЕДСТВИЕ 6.1 [7; следствие 7.1]. Пусть $u_+ < u_-$. Задача Римана (1.22), (6.1) имеет

(а.1) классическое решение типа ударной волны (1.24) вида

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_+ + [u]H(-x + \phi(t)), \\ v(x, t) &= v_+ + [v]H(-x + \phi(t)), \\ w(x, t) &= w_+ + [w]H(-x + \phi(t)) \end{aligned} \quad (6.16)$$

тогда и только тогда, когда $v_- + v_+ = 0$ и $w_- + w_+ = 0$;

(а.2) решение типа δ -ударной волны (1.24) вида

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_+ + [u]H(-x + \phi(t)), \\ v(x, t) &= v_+ + [v]H(-x + \phi(t)), \\ w(x, t) &= w_+ + [w]H(-x + \phi(t)) + [u](w_- + w_+)t\delta(-x + \phi(t)), \end{aligned} \quad (6.17)$$

если $v_- + v_+ = 0$ и $w_- + w_+ \neq 0$, или

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0, \\ v(x, t) &= v_+ + [v]H(-x + \phi_0(t)), \\ w(x, t) &= w_+ + [w]H(-x + \phi_0(t)) + 2[v^2]t\delta(-x + \phi_0(t)), \end{aligned} \quad (6.18)$$

если $u_+ = u_- = u_0$, где $\phi_0(t) = 2u_0t$;

(а.3) решение типа δ' -ударной волны (1.24) только в случае $v_- + v_+ \neq 0$, $w_- + w_+ \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_+ < u_-$. В этом случае, согласно (1.24), (6.7) и (6.8), задача Римана (1.22), (6.1) имеет классическое решение в виде ударной волны (6.16) тогда и только тогда, когда $v_- + v_+ = 0$, $w_- + w_+ = 0$.

Если $v_- + v_+ = 0$, $w_- + w_+ \neq 0$, то в силу (6.8) задача Римана имеет решение типа δ -ударной волны (1.24) вида (6.17).

Согласно (6.8), задача Римана (1.22), (6.1) имеет решение типа δ' -ударной волны (1.24) (см. (6.7)), только если $v_- + v_+ \neq 0$, $w_- + w_+ \neq 0$.

Пусть $u_+ = u_- = u_0$. В этом случае задача Римана (1.22), (6.1) имеет решение типа δ -ударной волны (1.24) вида (6.18), где $\phi_0(t) = 2u_0t$. Здесь $x = \phi_0(t) = 2u_0t$ — характеристическая кривая первого уравнения $u_t + (u^2)_x = 0$ в системе (1.22), выходящая из точки $(0, 0)$. Следствие 6.1 доказано.

6.4. Вакуумные состояния в решении задачи Римана (1.22), (6.1). Рассмотрим случай $u_+ > u_-$. Подставляя тройку распределений (6.10), построенную в теореме 6.2, в левую часть интегральных тождеств (3.2), легко доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.4 [7; теорема 7.2]. Пусть $u_+ > u_-$. Тогда для $t \in [0, \infty)$ тройка распределений (6.10)

$$(u(x, t), v(x, t), w(x, t)) = \begin{cases} (u_-, v_-, w_-), & x \leq 2u_-t, \\ \left(\frac{x}{2t}, 0, 0\right), & 2u_-t < x < 2u_+t, \\ (u_+, v_+, w_+), & x \geq 2u_+t, \end{cases}$$

является единственным обобщенным решением задачи Коши (1.22), (6.1), которое удовлетворяет интегральным тождествам (3.2), где $\hat{v}(x, t) = v(x, t)$, $\hat{w}(x, t) = w(x, t)$ и $e(t) \equiv 0$, $g(t) \equiv 0$, $h(t) \equiv 0$.

Здесь первая компонента u решения (6.10) — это волна разрежения, а вторая и третья компоненты, v и w , содержат промежуточные вакуумные состояния $v = 0$ и $w = 0$.

7. Алгебраические аспекты сингулярных решений

7.1. Функции потоков от сингулярных решений. Как известно, в общем случае произведение распределений не определено [59]. Естественно попытаться определить такое произведение как слабый предел произведения регуляризаций этих распределений.

Попробуем определить таким образом произведение функции Хевисайда и дельта-функции. Пусть $\delta(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \omega_\delta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ – регуляризация дельта-функции (5.10) и $H(x, \varepsilon) = \omega_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\varepsilon}} \omega(\eta) d\eta$ – регуляризация функции Хевисайда (5.12), $x \in \mathbb{R}$. Поскольку при $|\eta| \rightarrow \infty$ функция $\omega_\delta(\eta)\omega_0(\eta)$ убывает достаточно быстро, имеем

$$\left\langle \frac{1}{\varepsilon} \omega_\delta\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \omega_0\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right), \psi(\cdot) \right\rangle = \int \omega_\delta(\eta) \omega_0(\eta) \psi(\varepsilon \eta) d\eta = A\psi(0) + O(\varepsilon),$$

$$\varepsilon \rightarrow +0, \quad \forall \psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Таким образом, мы определили произведение

$$[[H(x) \delta(x)]] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} H(x, \varepsilon) \delta(x, \varepsilon) = A\delta(x), \quad (7.1)$$

где $A = A(\omega_0, \omega_\delta) = \int \omega_0(\eta) \omega_\delta(\eta) d\eta$. Однако оно *зависит* от сглаживающих функций ω, ω_δ .

Таким же образом определим *сингулярные суперпозиции* для нелинейных функций потоков $F(u, v)$, $G(u, v)$, $H(u, v)$, связанных с системами законов сохранения (1.7), (1.8), и *сингулярные суперпозиции* для нелинейных функций потоков $[[f'(u)v]]$, $[[f''(u)v^2 + f'(u)w]]$, которые связаны с системой законов сохранения (1.21).

Пусть $u(x, t, \varepsilon)$, $v(x, t, \varepsilon)$, $w(x, t, \varepsilon)$ – какие-то регуляризации распределений $u(x, t)$, $v(x, t)$, $w(x, t)$, где $u(x, t)$, $v(x, t)$ заданы формулами (1.19) или $u(x, t)$, $v(x, t)$, $w(x, t)$ заданы формулами (1.24). Мы *не предполагаем*, что (u, v) – решение задачи Коши для системы (1.7) или (1.8) (или (u, v, w) – решение задачи Коши для системы (1.21)). Как и выше, определим *сингулярные суперпозиции* как слабые пределы

$$\begin{aligned} [[F(u, v)]] &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(u(x, t, \varepsilon), v(x, t, \varepsilon)), \\ [[G(u, v)]] &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} G(u(x, t, \varepsilon), v(x, t, \varepsilon)), \\ [[H(u, v)]] &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} H(u(x, t, \varepsilon), v(x, t, \varepsilon)), \\ [[f'(u)v]] &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f'(u(x, t, \varepsilon))v(x, t, \varepsilon), \\ [[f''(u)v^2 + f'(u)w]] &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f''(u(x, t, \varepsilon))v^2(x, t, \varepsilon) \\ &\quad + f'(u(x, t, \varepsilon))w(x, t, \varepsilon)). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Очевидно, что введенные сингулярные суперпозиции (7.2), так же как и (7.1), не единственны и зависят от регуляризаций распределений H , δ , δ' . Более того, некоторые из них в смысле распределений могут не существовать.

Однако, если в (7.2) использовать не произвольные регуляризации распределений u , v , w , а слабые асимптотические решения соответствующих задач Коши, можно вывести формулы, задающие “правильные” сингулярные суперпозиции распределений, которые оказываются однозначно определенными распределениями Шварца.

Докажем несколько теорем, определяющих эти “правильные” сингулярные суперпозиции.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть (u, v) – решение типа δ -ударной волны (1.19) задачи Коши (1.7), (1.17), и пусть $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ – слабое асимптотическое решение этой задачи (см. определение 5.1). Тогда для $t \in [0, T]$ имеют место следующие формулы, определяющие “правильные” единственные сингулярные суперпозиции:

$$F(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = F(u_+, v_+) + [F(u, v)]H(-x + \phi(t)), \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} G(u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \\ &= G(u_+, v_+) + [G(u, v)]H(-x + \phi(t)) + e(t)\dot{\phi}(t)\delta(-x + \phi(t)), \end{aligned} \quad (7.4)$$

где пределы понимаются в слабом смысле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t))$ – слабое асимптотическое решение задачи Коши (1.7), (1.17), то в силу соотношений (5.1) из определения 5.1 мы имеем в слабом смысле

$$(u_\varepsilon)_t + (F(u_\varepsilon, v_\varepsilon))_x = o_{\mathcal{D}'}(1), \quad (v_\varepsilon)_t + (G(u_\varepsilon, v_\varepsilon))_x = o_{\mathcal{D}'}(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (7.5)$$

Более того, имеют место соотношения (5.3), где (u, v) – решение типа δ -ударной волны (1.19) для задачи Коши (1.7), (1.17).

По определению “правильная” сингулярная суперпозиция есть слабый предел

$$F(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(u_\varepsilon, v_\varepsilon), \quad G(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} G(u_\varepsilon, v_\varepsilon), \quad (7.6)$$

где пара распределений (u, v) задана в (1.19).

В силу (7.5), (5.3) для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle (u_\varepsilon)_t, \varphi \rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle (F(u_\varepsilon, v_\varepsilon))_x, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle o_{\mathcal{D}'}(1), \varphi \rangle = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle (v_\varepsilon)_t, \varphi \rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle (G(u_\varepsilon, v_\varepsilon))_x, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle o_{\mathcal{D}'}(1), \varphi \rangle = 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Тогда из (7.7), (7.6) имеем для всех $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$

$$\begin{aligned} \langle (F(u, v))_x, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle (F(u_\varepsilon, v_\varepsilon))_x, \varphi \rangle = -\langle u_t, \varphi \rangle, \\ \langle (G(u, v))_x, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle (G(u_\varepsilon, v_\varepsilon))_x, \varphi \rangle = -\langle v_t, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Так как u, v – распределения, то $(F(u, v))_x, (G(u, v))_x$ также являются распределениями. Используя (7.8) и (1.19), получим в слабом смысле

$$\begin{aligned} (F(u, v))_x &= -u_t = -(u_+ + [u]H(-x + \phi(t)))_t \\ &= -u_{+t} - [u_t]H(-x + \phi(t)) - [u]\dot{\phi}(t)\delta(-x + \phi(t)), \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} (G(u, v))_x &= -v_t = -(v_+ + [v]H(-x + \phi(t)) + e(t)\delta(-x + \phi(t)))_t \\ &= -v_{+t} - [v_t]H(-x + \phi(t)) \\ &\quad - ([v]\dot{\phi}(t) + \dot{e}(t))\delta(-x + \phi(t)) - e(t)\dot{\phi}(t)\delta'(-x + \phi(t)). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Так как для $\pm x > \pm\phi(t)$

$$u_{\pm t} + (F(u_{\pm}, v_{\pm}))_x = 0, \quad v_{\pm t} + (G(u_{\pm}, v_{\pm}))_x = 0, \quad (7.11)$$

то, подставляя (7.11) в (7.9), (7.10), будем иметь

$$\begin{aligned} (F(u, v))_x &= (F(u_+, v_+))_x + ([F(u, v)]H(-x + \phi(t)))_x \\ &\quad + ([F(u, v)] - [u]\dot{\phi}(t))\delta(-x + \phi(t)), \\ (G(u, v))_x &= (G(u_+, v_+))_x + ([G(u, v)]H(-x + \phi(t)))_x \\ &\quad + ([G(u, v)] - [v]\dot{\phi}(t) - \dot{e}(t))\delta(-x + \phi(t)) - e(t)\dot{\phi}(t)\delta'(-x + \phi(t)). \end{aligned}$$

Интегрируя последние соотношения по x , найдем

$$\begin{aligned} F(u, v) &= F(u_+, v_+) + [F(u, v)]H(-x + \phi(t)) \\ &\quad - ([F(u, v)] - [u]\dot{\phi}(t))|_{x=\phi(t)}H(-x + \phi(t)) + C_1(t), \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} G(u, v) &= G(u_+, v_+) + [G(u, v)]H(-x + \phi(t)) \\ &\quad - ([G(u, v)] - [v]\dot{\phi}(t) - \dot{e}(t))|_{x=\phi(t)}H(-x + \phi(t)) \\ &\quad + e(t)\dot{\phi}(t)\delta(-x + \phi(t)) + C_2(t), \end{aligned} \quad (7.13)$$

где $C_1(t), C_2(t)$ – некоторые функции. Так как

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(u_{\varepsilon}(x, t), v_{\varepsilon}(x, t)) &= F(u_{\pm}, v_{\pm}), \quad \pm x > \pm\phi(t), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} G(u_{\varepsilon}(x, t), v_{\varepsilon}(x, t)) &= G(u_{\pm}, v_{\pm}), \quad \pm x > \pm\phi(t), \end{aligned} \quad (7.14)$$

то, используя условия Ренкина–Гюгонио (2.7), мы видим, что из (7.12), (7.13) следует $C_1(t) = C_2(t) = 0$, т.е. соотношения (7.3) и (7.4) выполнены. Теорема 7.1 доказана.

Как следует из доказательства теоремы 7.1, структуры нелинейных функций потоков $F(u, v)$ и $G(u, v)$, задаваемые формулами (7.3) и (7.4), определяются структурой линейных членов u и v соответственно.

Частный случай теоремы 7.1 для систем законов сохранения (1.10) и (1.20) был доказан в [9], [17], [30]. В этих работах функции потока от сингулярных решений были построены с использованием явных выражений для слабых асимптотических решений.

Теперь определим функции потоков системы уравнений газовой динамики без давления (1.9) на решениях типа δ -ударных волн.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть (u, v) – решение типа δ -ударной волны (1.19) задачи Коши (1.9), (1.17), (1.18), и пусть $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ – слабое асимптотическое решение этой задачи (см. определение 5.1). Тогда для $t \in [0, T)$ имеют место следующие формулы, определяющие “правильные” единственные сингулярные суперпозиции:

$$uv \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon v_\varepsilon = u_+ v_+ + [uv]H(-x + \phi(t)) + e(t)\dot{\phi}(t)\delta(-x + \phi(t)), \quad (7.15)$$

$$u^2 v \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon^2 v_\varepsilon = u_+^2 v_+ + [u^2 v]H(-x + \phi(t)) + e(t)(\dot{\phi}(t))^2 \delta(-x + \phi(t)), \quad (7.16)$$

где пределы понимаются в слабом смысле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t))$ – слабое асимптотическое решение задачи Коши (1.9), (1.17), (1.18). Тогда, согласно (5.1), имеем

$$(v_\varepsilon)_t + (u_\varepsilon v_\varepsilon)_x = o_{\mathcal{D}'}(1), \quad (u_\varepsilon v_\varepsilon)_t + (u_\varepsilon^2 v_\varepsilon)_x = o_{\mathcal{D}'}(1), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (7.17)$$

Кроме того, имеет место (5.3), где $(u(x, t), v(x, t))$ – решение типа δ -ударной волны (1.19) для задачи Коши (1.9), (1.17), (1.18).

В силу теоремы 7.1 соотношение (7.15) доказано.

Теперь, повторяя доказательство теоремы 7.1 и используя второе соотношение в (7.17) и соотношение (7.15), будем иметь для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$

$$\begin{aligned} \langle (u^2 v)_x, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle (u_\varepsilon^2 v_\varepsilon)_x, \varphi \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle (u_\varepsilon v_\varepsilon)_t, \varphi \rangle = - \langle (uv)_t, \varphi \rangle \\ &= - \left\langle (u_+ v_+)_t + [(uv)_t]H(-x + \phi(t)) + [uv]\dot{\phi}(t)\delta(-x + \phi(t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dt}(e(t)\dot{\phi}(t))\delta(-x + \phi(t)) + e(t)(\dot{\phi}(t))^2 \delta'(-x + \phi(t)), \varphi \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Так как uv , определенное в (7.15), является распределением, то $u^2 v$ – также распределение.

Так как для $\pm x > \pm \phi(t)$

$$v_\pm t + (u_\pm v_\pm)_x = 0, \quad (u_\pm v_\pm)_t + (u_\pm^2 v_\pm)_x = 0, \quad (7.19)$$

то, подставляя второе соотношение из (7.19) в (7.18), получим

$$\begin{aligned} (u^2 v)_x &= (u_+^2 v_+)_x + ([u^2 v]H(-x + \phi(t)))_x \\ &\quad + \left([u^2 v] - [uv]\dot{\phi}(t) - \frac{d}{dt}(e(t)\dot{\phi}(t)) \right) \delta(-x + \phi(t)) \\ &\quad - e(t)(\dot{\phi}(t))^2 \delta'(-x + \phi(t)). \end{aligned}$$

Интегрируя последние соотношения по x , найдем

$$\begin{aligned} u^2 v &= u_+^2 v_+ + [u^2 v]H(-x + \phi(t)) \\ &\quad - \left([u^2 v] + [uv]\dot{\phi}(t) - \frac{d}{dt}(e(t)\dot{\phi}(t)) \right) \Big|_{x=\phi(t)} H(-x + \phi(t)) \\ &\quad + e(t)(\dot{\phi}(t))^2 \delta(-x + \phi(t)) + C(t), \end{aligned} \quad (7.20)$$

где $C(t)$ – некоторая функция. Так как при $\pm x > \pm \phi(t)$ имеем $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} u_\varepsilon^2 v_\varepsilon = u_\pm^2 v_\pm$, то, применяя условия Ренкина–Гюгонио (2.15), видим, что из (7.20) следуют $C(t) = 0$ и соотношение (7.16). Теорема 7.2 доказана.

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть (u, v) – решение типа δ -ударной волны (1.19) задачи Коши (1.8), (1.17), (1.18), и пусть $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ – слабое асимптотическое решение этой задачи (см. определение 5.1). Тогда для $t \in [0, T)$ имеют место следующие формулы, определяющие “правильные” единственные сингулярные суперпозиции:

$$\begin{aligned} G(u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} G(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \\ &= G(u_+, v_+) + [G(u, v)]H(-x + \phi(t)) + e(t)\dot{\phi}(t)\delta(-x + \phi(t)), \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} H(u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} H(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \\ &= H(u_+, v_+) + [H(u, v)]H(-x + \phi(t)) + e(t)(\dot{\phi}(t))^2\delta(-x + \phi(t)), \end{aligned} \quad (7.22)$$

где пределы понимаются в слабом смысле.

Теперь определим функции потоков на решениях типа δ' -ударной волны.

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть (u, v, w) – решение типа δ' -ударной волны (1.24) задачи Коши (1.21), (1.23), и пусть $(u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon)$ – слабое асимптотическое решение этой задачи (см. определение 5.2). Тогда для $t \in [0, T)$ имеют место следующие формулы, определяющие “правильные” единственные сингулярные суперпозиции:

$$f(u) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(u_\varepsilon) = f(u_+) + [f(u)]H(-x + \phi(t)), \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} f'(u)v &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f'(u_\varepsilon)v_\varepsilon) \\ &= f'(u_+)v_+ + [f'(u)v]H(-x + \phi(t)) + e(t)\dot{\phi}(t)\delta(-x + \phi(t)), \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} f''(u)v^2 + f'(u)w &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f''(u_\varepsilon)v_\varepsilon^2 + f'(u_\varepsilon)w_\varepsilon) \\ &= f''(u_+)v_+^2 + f'(u_+)w_+ + [f''(u)v^2 + f'(u)w]H(-x + \phi(t)) \\ &\quad + (g(t)\dot{\phi}(t) + \dot{h}(t))\delta(-x + \phi(t)) + h(t)\dot{\phi}(t)\delta'(-x + \phi(t)), \end{aligned} \quad (7.25)$$

где пределы понимаются в слабом смысле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t))$ – слабое асимптотическое решение задачи Коши (1.21), (1.23), то в силу (5.1) найдем

$$\begin{aligned} (u_\varepsilon)_t + (f(u_\varepsilon))_x &= o_{\mathcal{D}'}(1), \\ (v_\varepsilon)_t + (f'(u_\varepsilon)v_\varepsilon)_x &= o_{\mathcal{D}'}(1), \\ (w_\varepsilon)_t + (f''(u_\varepsilon)v_\varepsilon^2 + f'(u_\varepsilon)w_\varepsilon)_x &= o_{\mathcal{D}'}(1) \end{aligned} \quad (7.26)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Более того, имеет место (5.3), где (u, v, w) – решение типа δ' -ударной волны (1.24) задачи Коши (1.21), (1.23).

В силу теоремы 7.1 имеют место соотношения (7.23), (7.24).

Аналогично вышеприведенным выкладкам, используя третье уравнение в (7.26) и третье соотношение в (1.24), получим в слабом смысле

$$\begin{aligned} (f''(u)v^2 + f'(u)w)_x &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f''(u_\varepsilon)v_\varepsilon^2 + f'(u_\varepsilon)w_\varepsilon)_x = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (w_\varepsilon)_t = -w_t \\ &= -((w_+)_t + [w_t]H(-x + \phi(t)) + [w]\dot{\phi}(t)\delta(-x + \phi(t)) \\ &\quad + \dot{g}(t)\delta(-x + \phi(t)) + g(t)\dot{\phi}(t)\delta'(-x + \phi(t)) \\ &\quad + \dot{h}(t)\delta'(-x + \phi(t)) + h(t)\dot{\phi}(t)\delta''(-x + \phi(t))). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Подставляя в (7.27) очевидное соотношение $w_\pm t + (f''(u_\pm)v_\pm^2 + f'(u_\pm)w_\pm)_x = 0$, при $\pm x > \pm\phi(t)$ будем иметь

$$\begin{aligned} (f''(u)v^2 + f'(u)w)_x &= (f''(u_+)v_+^2 + f'(u_+)w_+)_x \\ &\quad + ([f''(u)v^2 + f'(u)w]H(-x + \phi(t)))_x + ([f''(u)v^2 + f'(u)w] - [w]\dot{\phi}(t) \\ &\quad - \dot{g}(t))\delta(-x + \phi(t)) - (g(t)\dot{\phi}(t) + \dot{h}(t))\delta'(-x + \phi(t)) \\ &\quad - h(t)\dot{\phi}(t)\delta''(-x + \phi(t)). \end{aligned}$$

Интегрируя последнее соотношение по x , получим

$$\begin{aligned} f''(u)v^2 + f'(u)w &= f''(u_+)v_+^2 + f'(u_+)w_+ + [f''(u)v^2 + f'(u)w]H(-x + \phi(t)) \\ &\quad - ([f''(u)v^2 + f'(u)w] - [w]\dot{\phi}(t) - \dot{g}(t))|_{x=\phi(t)}H(-x + \phi(t)) \\ &\quad + (g(t)\dot{\phi}(t) + \dot{h}(t))\delta(-x + \phi(t)) + h(t)\dot{\phi}(t)\delta'(-x + \phi(t)) + C(t), \end{aligned} \quad (7.28)$$

где $C(t)$ – некоторая функция. Из (1.24) следует $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f''(u_\varepsilon)v_\varepsilon^2 + f'(u_\varepsilon)w_\varepsilon) = f''(u_\pm)v_\pm^2 + f'(u_\pm)w_\pm$ для $\pm x > \pm\phi(t)$, поэтому из (7.28) вытекает, что $C(t) = 0$. Соотношение (7.25) доказано.

Для частного случая системы (1.22) теорема 7.4 была доказана в [4] и [7]. В этих работах функции потока для сингулярных решений были построены с использованием явных выражений для слабых асимптотических решений.

Подчеркнем, что, в отличие от теории Коломбо, сингулярные суперпозиции не образуют алгебру и являются распределениями Шварца. Отметим также, что в рамках подхода Коломбо [47], [55] и подхода работы [45], использующего неконсервативное произведение (1.11), произведение распределений вводится без связи с нелинейным уравнением и часто однозначный выбор произведения затруднителен. Сингулярные суперпозиции, определяемые в рамках нашего подхода, однозначно определяются самим уравнением.

7.2. Специфические свойства сингулярных суперпозиций. Функции потоков на сингулярных решениях или, иными словами, “правильные” сингулярные суперпозиции распределений определяются только в контексте решения задачи Коши и являются однозначно определенными распределениями Шварца. Однако эти суперпозиции имеют специфические свойства. Например, в формуле суперпозиции (7.3) выпадает дельта-образный “след” от последовательности v_ε . Этот же “след” останется в формуле суперпозиции (7.4),

даже если предположить, что функция потока $G(u, v)$ не зависит от v . Чтобы проиллюстрировать эти странные свойства, рассмотрим два частных случая теоремы 7.1.

(а) В частном случае системы (1.10) (здесь $F(u, v) = f(u)$, $G(u, v) = vg(u)$) из теоремы 7.1, с учетом условий Ренкина–Гюгонио (2.7), следует

$$f(u) = f(u_+) + [f(u)]H(-x + \phi(t)), \quad (7.29)$$

$$vg(u) = v_+g(u_+) + [vg(u)]H(-x + \phi(t)) + e(t) \frac{[f(u)]}{[u]} \delta(-x + \phi(t)), \quad (7.30)$$

где распределения $u(x, t)$, $v(x, t)$ заданы в (1.19). В [16], [17] было построено решение типа δ -ударной волны (1.19) для задачи Коши (1.10), (1.17) и с использованием явных выражений для слабого асимптотического решения были выведены формулы (7.29).

(б) В частном случае системы (1.20) (здесь $F(u, v) = f(u) - v$, $G(u, v) = g(u)$) из теоремы 7.1, с учетом условий Ренкина–Гюгонио (2.7), следует

$$f(u(x, t)) - v(x, t) = f(u_+) - v_+ + [f(u) - v]H(-x + \phi(t)), \quad (7.31)$$

$$g(u(x, t)) = g(u_+) + [g(u)]H(-x + \phi(t)) + e(t) \frac{[f(u) - v]}{[u]} \delta(-x + \phi(t)), \quad (7.32)$$

где распределения $u(x, t)$, $v(x, t)$ заданы формулами (1.19). Эти формулы были получены непосредственным использованием слабого асимптотического решения, построенного в [9], [30], [31] при решении задачи Коши (1.20), (1.17).

Для системы Кейфитц–Кранцера (1.12) из (7.31), (7.32) следует, что

$$u^2 - v = u_+^2 - v_+ + [u^2 - v]H(-x + \phi(t)), \quad (7.33)$$

$$\frac{1}{3} u^3 - u = \frac{1}{3} u_+^3 - u_+ + \left[\frac{1}{3} u^3 - u \right] H(-x + \phi(t)) + e(t) \frac{[u^2 - v]}{[u]} \delta(-x + \phi(t)). \quad (7.34)$$

Отметим, что *единственно определенные “правильные” сингулярные суперпозиции* (7.29), (7.30) *существенно отличаются* от аналогичных суперпозиций (7.31), (7.32) и (7.33), (7.34). Рассмотрим эти различия.

Так как $H(x) \cdot H(x) = H(x)$, то ясно, что формула (7.30) фактически дает *единственно определенное “правильное” произведение ступенчатой функции и дельта-функции*:

$$\begin{aligned} e(t) \delta(-x + \phi(t)) u(x, t) &= e(t) \delta(-x + \phi(t)) \cdot \begin{cases} u_-, & x < \phi(t) \\ u_+, & x > \phi(t) \end{cases} \\ &= e(t) \frac{[f(u)]}{[u]} \delta(-x + \phi(t)). \end{aligned} \quad (7.35)$$

В случае системы Кейфитц–Кранцера (1.12) и ее обобщения (1.20) формулы (7.31), (7.32) и (7.33), (7.34) *не определяют (!) произведение ступенчатой функции и дельта-функции*.

Более того, невзирая на то, что компонента $u(x, t)$ решения *не зависит* от $e(t) \delta(-x + \phi(t))$ и $[v(x, t)]|_{x=\phi(t)}$, нелинейные функции потоков (“правильные”

сингулярные суперпозиции $g(u)$ и $(1/3)u^3 - u$, определенные в (7.32) и в (7.34), *зависят (!)* от этих членов. Таким образом, можно сказать, что в (7.32) (и в (7.34)) член

$$e(t) \frac{[f(u) - v]}{[u]} \delta(-x + \phi(t)) \quad \text{или} \quad e(t) \frac{[u^2 - v]}{[u]} \delta(-x + \phi(t))$$

“возникает из ничего”. Аналогично, невзирая на то, что в первых уравнениях систем (1.20) и (1.12) функции потоков имеют вид $f(u) - v$ и $u^2 - v$, где $v = \hat{v} + e(t) \delta(-x + \phi(t))$, значение этих функций на решении выражается формулами (7.31) и (7.33), правые части которых *не содержат* члена $e(t) \delta(-x + \phi(t))$.

Этот же “неожиданный” результат можно получить, используя метод исчезающей вязкости. Рассмотрим для системы Кейфитц–Кранцера (1.12) вязкостную аппроксимацию Дафермоса–Ди Перны:

$$u_t + (u^2 - v)_x = \varepsilon t u_{xx}, \quad v_t + \left(\frac{1}{3} u^3 - u \right)_x = \varepsilon t v_{xx}.$$

Для случая кусочно постоянных начальных данных, используя результаты [49], мы найдем решение приведенной выше системы $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$. Далее, несложно проверить, что слабые пределы выражений $u_\varepsilon^2 - v_\varepsilon$ и $(1/3)u_\varepsilon^3 - u_\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ совпадут с правыми частями (7.33), (7.34).

К “странным” свойствам сингулярных суперпозиций можно отнести и то, что, согласно формуле (7.25), функция потока $f''(u)v^2 + f'(u)w$ на решении типа δ' -ударной волны для системы (1.21) является корректно определенным распределением. И это невзирая на то, что выражение $f''(u)v^2 + f'(u)w$ содержит квадрат дельта-функции и произведение функции Хевисайда на производную дельта-функции. При этом оба предела $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f''(u_\varepsilon)v_\varepsilon^2$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f'(u_\varepsilon)w_\varepsilon$ в (7.25) *неограниченны*.

Естественно, что этот же результат может быть получен и методом исчезающей вязкости. Используя решение $(u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon)$ параболической задачи (6.2), (6.1), даваемое леммой 4.1 из [7], можно вычислить слабый предел $2(v_\varepsilon^2 + u_\varepsilon w_\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Этот предел является распределением и совпадает с правой частью соотношения (7.25), если положить $f(u) = u^2$. Легко проверить, что по отдельности выражения $2v^2$ и $2uw$ не определены, поскольку функции $2v_\varepsilon^2$ и $2u_\varepsilon w_\varepsilon$ неограничены при $\varepsilon \rightarrow 0$ и слабого предела не имеют.

8. Мотивированность определений решений типа δ - и δ' -ударных волн

Сейчас мы обсудим проблему введения *интегральных тождеств*, используемых в определениях 2.1, 2.2, 3.1, и некоторые связанные с этим вопросы.

Вначале обсудим определение 2.1, вводящее для системы (1.7) решение типа δ -ударной волны.

Напомним, что под решением типа δ -ударной волны мы понимаем (как и в остальных цитированных выше работах) пару (u, v) , где u – регулярная функция, а компонента v представляется в виде суммы регулярной функции $\hat{v}(x, t)$ (которая может иметь разрывы) и дельта-образной компоненты $e(x, t) \delta(\Gamma)$, и Γ – множество кривых в верхней полуплоскости $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty)\}$.

Поскольку нелинейные члены $F(u, v)$, $G(u, v)$ невозможно определить в смысле распределений (в частности, эти члены могут содержать произведения функции Хевисайда на дельта-функции), то, как уже отмечалось выше, для вывода тождеств (2.2) невозможно использовать стандартную идею, описанную в книге Эванса [8; п. 3.4.1.a]. Действительно, если проинтегрировать выражения

$$(u_t + (F(u, v))_x)\varphi(x, t) = 0, \quad (v_t + (G(u, v))_x)\varphi(x, t) = 0$$

по частям и перенести производные на основную функцию φ , под знаком интеграла все равно останутся неопределенные в смысле теории распределений члены $F(u, v)$, $G(u, v)$. Что же делать?

Приведем рассуждения, приводящие к интегральным тождествам (2.2), которые обобщают классические интегральные тождества (1.2) и позволяют определить решения типа δ -ударных волн.

Предполагая, что задача Коши (1.7), (1.17) допускает решение типа δ -ударной волны (1.19) ($u = u_+ + [u]H(-x + \phi(t))$, $v = v_+ + [v]H(-x + \phi(t)) + e(t)\delta(-x + \phi(t))$), и используя теорему 7.1 (см. выше в разделе 7), мы выводим формулы (7.3), (7.4), определяющие в этом случае функции потоков на этом сингулярном решении: $F(u, v) = F(u_+, v_+) + [F(u, v)]H(-x + \phi(t))$, $G(u, v) = G(u_+, v_+) + [G(u, v)]H(-x + \phi(t)) + e(t)\dot{\phi}(t)\delta(-x + \phi(t))$. Заметим, что при доказательстве теоремы 7.1 мы не используем интегральные тождества (2.2) из определения 2.1, однако используем условия Ренкина–Гюгоньо (2.7), которые сами получаются как следствие этих тождеств (см. теорему 2.1).

Тем не менее, как было показано в нашей работе [87], условия Ренкина–Гюгоньо (2.7) можно получить, не используя определение 2.1. Точнее, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8.1 [87; теорема 4.1]. Пусть $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ – слабое асимптотическое решение задачи Коши (1.7), (1.17) (см. определение 5.1) для $t \in [0, T)$ такое, что выполнено (5.3), где предельная пара распределений (u, v) имеет вид (1.19). Тогда для (1.19) имеют место условия Ренкина–Гюгоньо (2.7).

Доказательство этой теоремы практически дословно повторяет доказательство теоремы 7.1.

Итак, формулы $F(u, v) = F(u_+, v_+) + [F(u, v)]H(-x + \phi(t))$, $G(u, v) = G(u_+, v_+) + [G(u, v)]H(-x + \phi(t)) + e(t)\dot{\phi}(t)\delta(-x + \phi(t))$ можно получить, не используя интегральные тождества (2.2) из определения 2.1. И теперь, не опираясь на тождества (2.2), можно подставить в систему $u_t + (F(u, v))_x = 0$, $v_t + (G(u, v))_x = 0$ выражения (1.19) для u , v и выражения (7.3), (7.4) для $F(u, v)$, $G(u, v)$. Далее, умножив уравнения системы на основную функцию φ , а затем используя определение дельта-функции, сосредоточенной на кривой, перенесем в выражениях $\langle u_t + (F(u, v))_x, \varphi \rangle = 0$, $\langle v_t + (G(u, v))_x, \varphi \rangle = 0$ производные на основную функцию. В результате мы получим частный случай интегральных тождеств (2.2) из определения 2.1, где $\hat{v} = v_+ + [v]H(-x + \phi(t))$, $F(u, \hat{v}) = F(u_+, v_+) + [F(u, v)]H(-x + \phi(t))$, $G(u, \hat{v}) = G(u_+, v_+) + [G(u, v)]H(-x + \phi(t))$.

Дополнительный член во втором тождестве (2.2), который отличает это тождество от классического, получается из выражения $\langle \delta(-x + \phi(t)), e(t)\varphi_t + e(t)\dot{\phi}(t)\varphi_x \rangle$. Учитывая, что $\varphi_t(\phi(t), t) + \dot{\phi}(t)\varphi_x(\phi(t), t) = \frac{d\varphi(\phi(t), t)}{dt}$ (см. (2.5)),

мы получим дополнительный член

$$\langle \delta(-x + \phi(t)), e(t)\varphi_t + e(t)\dot{\phi}(t)\varphi_x \rangle = \int_{x=\phi(t)} e(t) \frac{d\varphi(\phi(t), t)}{dt} \frac{dl}{\sqrt{1 + (\dot{\phi}_i(t))^2}}.$$

Незначительное и естественное обобщение выведенных интегральных тождеств приводит к (2.2).

После этого мы используем систему интегральных тождеств (2.2) как определение.

Используя теоремы 4.2–4.4 из [87] (которые являются аналогами теоремы 8.1), теоремы 7.2–7.4 и повторяя почти дословно приведенные выше рассуждения, можно вывести интегральные тождества (2.11) из определения 2.2 (которые определяют решение типа δ -ударной волны для системы (1.8)) и интегральные тождества (3.2) (которые определяют решение типа δ' -ударной волны для системы (1.21)).

Рассмотрим еще один путь получения интегральных тождеств (2.2). Рассмотрим задачу Коши (1.7), (2.1). Анализируя *асимптотическое решение* задачи $(u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t))$, несложно получить (см. раздел 5 и [16], [17]), что $v_\varepsilon(x, t) = \hat{v} + \varepsilon\delta(\Gamma) + o_{\mathcal{D}'}(\varepsilon)$, где $\hat{v} \in L^\infty$, и нелинейная функция потока $G(u, v)$ во втором уравнении системы (1.7) может быть представлена в виде

$$G(u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t)) = A(u, \hat{v}) + B(u, \hat{v}, e)\delta(\Gamma) + o_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

где $A(u, \hat{v}), B(u, \hat{v}, e) \in L^\infty$. Умножая это соотношение на основную функцию φ и перенося производные на φ , мы представим интеграл $\int_0^\infty \int (v_\varepsilon(x, t)\varphi_t + G(u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t))\varphi_x) dx dt$ в виде суммы

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int (v_\varepsilon(x, t)\varphi_t + G(u_\varepsilon(x, t), v_\varepsilon(x, t))\varphi_x) dx dt \\ &= \int_0^\infty \int (\hat{v}\varphi_t + A(u, \hat{v})\varphi_x) dx dt + \int_\Gamma (e\varphi_t + B(u, \hat{v}, e)\varphi_x) dl + o_{\mathcal{D}'}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (8.1)$$

где оба интеграла в правой части *имеют смысл*. Далее, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$, после некоторых преобразований мы приведем (8.1) к форме второго интегрального тождества (2.2).

Еще один аргумент в пользу определений 2.1, 2.2, 3.1 следует из факта, что условия Ренкина–Гюгонио, которые являются следствиями интегральных тождеств, можно вывести *без использования* этих тождеств.

Остановимся на одной особенности решений типа δ -ударной волны. Как было отмечено в п. 2.1, невзирая на то, что нелинейные функции $F(u, v)$, $G(u, v)$ в обоих уравнениях в (1.7) однотипны, в первом тождестве (2.2) дополнительные члены $\sum_{i \in I} \int_{\gamma_i} \cdot dl$ отсутствуют. Это связано с тем, что, как видно из доказательства теоремы 7.1, структура нелинейной функции потока $G(u, v)$, задаваемая формулой (7.4), *определяется структурой линейного члена v* . И поэтому *именно во втором тождестве имеются дополнительные члены*, связанные с наличием в v дельта-функции. В первом интегральном тождестве, невзирая на то, что v содержит нелинейные функции $F(u, v)$, такого типа дополнительные члены отсутствуют. Структура $F(u, v)$ *определяется структурой линейного члена u* .

9. δ -ударные волны в многомерном случае

9.1. Некоторые факты, связанные с движущимися поверхностями и распределениями, сосредоточенными на них. Здесь мы будем систематически использовать результаты [90; разделы 5, 12], связанные с движущимися поверхностями и распределениями, связанными с этими поверхностями (см. также [93], [94] и [9]). Приведем некоторые из них.

Пусть $\Gamma = \{(x, t) : S(x, t) = 0\}$ – гиперповерхность в верхнем полупространстве $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, \infty)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $S \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, $\nabla S(x, t)|_{S=0} \neq 0$ для всех фиксированных t , где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Мы будем также рассматривать движущуюся в $\mathbb{R}^n$ гиперповерхность $\Gamma_t = \{x : S(x, t) = 0\}$. При $t = 0$ имеем $\Gamma_0 = \{x : S^0(x) = 0\}$. Обозначим через ν единичную пространственную нормаль к поверхности Γ_t , ориентированную в положительном направлении и такую, что $\nu_j = \frac{S_{x_j}}{|\nabla S|}$, $j = 1, \dots, n$. Компонента вектора нормали к Γ во временном направлении $-G = \frac{S_t}{|\nabla S|}$ является *скоростью волнового фронта* Γ_t . Обозначим $\nabla_{(x,t)} = \left(\nabla, \frac{\partial}{\partial t}\right)$.

Для гладкой функции $f(x, t)$, определенной на поверхности Γ , введем так называемые δ -производные [90; п. 5.2, (15), (16)] по переменным t и x_j :

$$\frac{\delta f}{\delta t} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + G \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu} \right) \Big|_{\Gamma}, \quad \frac{\delta f}{\delta x_j} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} - \nu_j \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu} \right) \Big|_{\Gamma}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (9.1)$$

соответственно, где $\tilde{f}$ – какое-нибудь гладкое продолжение функции f в окрестность Γ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu}$ – нормальная производная. Так как δ -производные зависят только от значений f на Γ и не зависят от способа продолжения функции f , мы будем опускать знак тильды над функцией f . Заметим, что эти определения не зависят от локальной системы координат. δ -производные $\frac{\delta f}{\delta t}$ и $\frac{\delta f}{\delta x_j}$ являются производными вдоль направлений, касательных к Γ и Γ_t соответственно. Таким образом, $\nabla_\nu = \nu(\nu \cdot \nabla)$ и $\nabla_{\Gamma_t} = \nabla - \nabla_\nu = \left(\frac{\delta}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta}{\delta x_n}\right)$ – градиенты вдоль нормального и касательного направлений к поверхности Γ_t .

Средняя кривизна поверхности Γ_t определяется как

$$\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} \nabla_{\Gamma_t} \cdot \nu = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\delta \nu_j}{\delta x_j} = -\frac{1}{2} \nabla \cdot \nu \quad (9.2)$$

(см. [90; п. 5.3, (8)]).

Дельта-функция, сосредоточенная на поверхности Γ , вводится как функционал [90; п. 5.3, (1), (2)]

$$\langle \delta(S), \varphi(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma_t} \varphi(x, t) d\mu(x) dt = \int_{\Gamma} \varphi(x, t) \frac{d\mu(x, t)}{\sqrt{1 + G^2}} \quad (9.3)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, где $d\mu$ – элемент площади соответствующей поверхности. Если $f(x, t)$ – непрерывная функция, определенная на Γ , то распределение $f\delta(S)$ определено равенством

$$\langle f\delta(S), \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma_t} f(x, t) \varphi(x, t) d\mu(x) dt = \int_{\Gamma} f(x, t) \varphi(x, t) \frac{d\mu(x, t)}{\sqrt{1 + G^2}}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Здесь для каждого t распределение $f\delta(S)$ задается соотношением $\langle f\delta(S), \psi(x) \rangle = \int_{\Gamma_t} f(x, t) \psi(x) d\mu(x)$ для всех $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и является *простым слоем* на поверхности Γ_t , описывая пространственную плотность зарядов, сосредоточенных на поверхности Γ_t с поверхностной плотностью $f(x, t)$ (см. [95; § 1.7]). Ясно, что формула (9.3) не зависит от выбора функции S , которая определяет поверхность Γ .

Следуя [91; гл. III, § 1.3], дельта-функцию, сосредоточенную на поверхности Γ , можно ввести с помощью меры Лере формулой

$$\langle \delta(S), \varphi(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma_t} \varphi(x, t) \frac{d\mu(x)}{|\nabla S|} dt$$

для всех $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Так заданная дельта-функция, в отличие от (9.3), зависит от выбора функции, определяющей уравнением $S(x, t) = 0$ поверхности Γ_t и Γ . В частном случае, когда функция $S(x, t)$ есть евклидово расстояние точки x от поверхности Γ_t , форма Лере совпадает с евклидовым элементом поверхности $d\mu(x)$ и, следовательно, вышеприведенная формула совпадает с (9.3) (см. [91; гл. III, § 1.2]). В дальнейшем мы будем использовать для дельта-функции представление (9.3).

Введем производную дельта-функции $\partial_\nu \delta(S)$ вдоль пространственной нормали ν по формуле [90; п. 5.3, (7)]

$$\langle \partial_\nu \delta(S), \varphi \rangle = - \left\langle \delta(S), \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), \quad (9.4)$$

где $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla \varphi$ – нормальная производная от φ . Если $f(x, t)$ – непрерывная функция, определенная на Γ (являющаяся сужением непрерывной функции, определенной в окрестности Γ), то

$$\langle \partial_\nu (f\delta(S)), \varphi \rangle = - \left\langle \delta(S), f \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

Для каждого t распределение $-\partial_\nu (f\delta(S))$ является *двойным слоем* на поверхности Γ_t и описывает пространственную плотность зарядов, соответствующую распределению диполей на поверхности Γ_t с поверхностной плотностью момен- та $f(x, t)$ и ориентированных вдоль нормали ν на Γ_t (см. [95; § 2.3]).

Еще одно основное распределение, сосредоточенное на поверхности Γ , – нормальная производная дельта-функции [90; п. 5.3, (6)]:

$$\delta'(S) = \sum_{i=1}^n \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(S). \quad (9.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1 [90; п. 5.3, (9)]. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\delta'(S) = 2\mathcal{K}\delta(S) + \partial_\nu\delta(S).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (9.4), (9.5) и (9.2) имеем

$$\begin{aligned} \langle \delta'(S), \varphi \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(S), \varphi \right\rangle - \sum_{i=1}^n \left\langle \delta(S), \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu_i \varphi) \right\rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \left\langle \delta(S), \varphi \frac{\partial \nu_i}{\partial x_i} + \nu_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \left\langle \delta(S), -2\mathcal{K}\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle \\ &= \langle 2\mathcal{K}\delta(S) + \partial_\nu\delta(S), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2 [90; п. 5.5, теорема 2]. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(S) &= \nu_j \delta'(S) = \nu_j (2\mathcal{K}\delta(S) + \partial_\nu\delta(S)), \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta(S) &= -G\delta'(S) = -G(2\mathcal{K}\delta(S) + \partial_\nu\delta(S)). \end{aligned} \quad (9.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что $\nu_i \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(S) = \nu_j \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(S)$. Умножая последнее соотношение на ν_i и суммируя по i , с учетом предложения 9.1 мы получим второе соотношение в (9.6). Аналогичным образом доказывается первое соотношение в (9.6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3 [90; п. 12.6, (15), (16)]. *Если $f(x, t)$ – дифференцируемая функция, определенная на Γ , то*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f\delta(S)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \nu_j \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2\mathcal{K}\nu_j f \right) \delta(S) + \nu_j f \partial_\nu \delta(S), \quad j = 1, \dots, n, \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (f\delta(S)) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + G \frac{\partial f}{\partial \nu} - 2\mathcal{K}Gf \right) \delta(S) - Gf \partial_\nu \delta(S). \quad (9.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (9.1), (9.6) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (f\delta(S)) &= \frac{\delta f}{\delta x_j} \delta(S) + f \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(S) = \frac{\delta f}{\delta x_j} \delta(S) + f \nu_j \delta'(S) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \nu_j \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) \delta(S) + \nu_j f (2\mathcal{K}\delta(S) + \partial_\nu \delta(S)). \end{aligned}$$

Соотношение (9.7) доказано. Аналогичным образом доказывается соотношение (9.8).

ЛЕММА 9.1 (ср. [90; п. 5.2, (25), (26)]). *Пусть $e(x, t)$ – гладкая функция, определенная на поверхности $\Gamma = \{(x, t) : S(x, t) = 0\}$ и являющаяся сужением некоторой гладкой функции, определенной в окрестности Γ , $\Gamma_0 = \{x : S(x, 0) = 0\}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Тогда имеет место формула интегрирования по частям*

$$\int_\Gamma e \frac{\delta \varphi}{\delta t} \frac{d\mu(x, t)}{\sqrt{1 + G^2}} = - \int_\Gamma \frac{\delta^* e}{\delta t} \varphi \frac{d\mu(x, t)}{\sqrt{1 + G^2}} - \int_{\Gamma_0} e(x, 0) \varphi(x, 0) d\mu(x), \quad (9.9)$$

$\delta e \frac{\delta^*}{\delta t}$ – оператор, сопряженный к $\frac{\delta}{\delta t}$, который определяется как

$$\frac{\delta^* e}{\delta t} = \frac{\delta e}{\delta t} - 2\mathcal{K}Ge = \frac{\delta e}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eG\nu), \quad (9.10)$$

$\mathcal{K}$ – средняя кривизна (9.2) поверхности Γ_t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (9.3), (9.4), (9.6)–(9.8) с помощью простых вычислений получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} e \frac{\delta \varphi}{\delta t} \frac{d\mu(x, t)}{\sqrt{1+G^2}} &= \left\langle e\delta(S), \frac{\delta \varphi}{\delta t} \right\rangle = \left\langle e\delta(S)H(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t} + G \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle \\ &= - \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (e\delta(S)H(t)), \varphi \right\rangle - \langle \partial_{\nu}(Ge\delta(S))H(t), \varphi \rangle \\ &= - \left\langle \frac{\delta e}{\delta t} \delta(S) - eG(2\mathcal{K}\delta(S) + \partial_{\nu}\delta(S)), \varphi \right\rangle - \langle e\delta(S)\delta(t), \varphi \rangle \\ &\quad - \left\langle \delta(S) \sum_{k=1}^n \frac{\delta(Ge)}{\delta x_k} \nu_k + eG\partial_{\nu}\delta(S), \varphi \right\rangle \\ &= - \left\langle \left(\frac{\delta e}{\delta t} - 2\mathcal{K}Ge \right) \delta(S), \varphi \right\rangle - \langle e(x, 0)\delta(S(x, 0)), \varphi(x, 0) \rangle, \end{aligned}$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда. При вычислениях мы учли очевидное соотношение $\sum_{k=1}^n \frac{\delta(Ge)}{\delta x_k} \nu_k = 0$. Используя последнее соотношение и формулу (9.2), найдем, что

$$\frac{\delta e}{\delta t} - 2\mathcal{K}Ge = \frac{\delta e}{\delta t} + \sum_{j=1}^n \frac{\delta \nu_j}{\delta x_j} Ge = \frac{\delta e}{\delta t} + \sum_{j=1}^n \frac{\delta(eG\nu_j)}{\delta x_j}.$$

9.2. Решения типа δ -ударных волн и условия Ренкина–Гюгонио.

Рассмотрим начальные данные типа δ -ударной волны

$$(U^0(x), \rho^0(x); U_{\delta}^0(x), x \in \Gamma_0), \quad \text{где } \rho^0(x) = \hat{\rho}^0(x) + e^0(x)\delta(\Gamma_0), \quad (9.11)$$

$U^0 \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $\hat{\rho}^0 \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $e^0 \in C(\Gamma_0)$, $U_{\delta}^0(x)|_{\Gamma_0}$ – начальная скорость δ -ударной волны. Здесь, так же как и в одномерном случае (см. п. 2.2 и замечание 2.1), в начальные данные входит начальная скорость δ -ударной волны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Пара распределений (U, ρ) и гиперповерхность Γ , где ρ представляется в виде суммы

$$\rho(x, t) = \hat{\rho}(x, t) + e(x, t)\delta(\Gamma),$$

$U \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty); \mathbb{R}^n)$, $\hat{\rho} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty); \mathbb{R})$, $e \in C(\Gamma)$, называется решением типа δ -ударной волны задачи Коши (1.29), (9.11), если для всех

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int \hat{\rho}(\varphi_t + F(U) \cdot \nabla \varphi) dx dt + \int_\Gamma e \frac{\delta \varphi}{\delta t} \frac{d\mu(x, t)}{\sqrt{1 + G^2}} \\ & + \int \hat{\rho}^0(x) \varphi(x, 0) dx + \int_{\Gamma_0} e^0(x) \varphi(x, 0) d\mu(x) = 0, \\ & \int_0^\infty \int \hat{\rho}(U\varphi_t + M(U) \cdot \nabla \varphi) dx dt + \int_\Gamma eU_\delta \frac{\delta \varphi}{\delta t} \frac{d\mu(x, t)}{\sqrt{1 + G^2}} \\ & + \int U^0(x) \hat{\rho}^0(x) \varphi(x, 0) dx + \int_{\Gamma_0} e^0(x) U_\delta^0(x) \varphi(x, 0) d\mu(x) = 0, \end{aligned} \quad (9.12)$$

где $\int f(x) dx$ – несобственный интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$;

$$U_\delta = \nu G = - \frac{S_t \nabla S}{|\nabla S|^2} \quad (9.13)$$

– скорость δ -ударной волны, $-G = \frac{S_t}{|\nabla S|}$.

Легко проверить, что при $n = 1$ определение 9.1 совпадает с определением 2.2.

Используя определение 9.1, выведем условия Ренкина–Гюгоннио для решений типа δ -ударных волн системы (1.29).

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ делится гладкой гиперповерхностью $\Gamma = \{(x, t) : S(x, t) = 0\}$ на левую и правую части $\Omega_\mp$. Пусть (U, ρ) , Γ – решение типа δ -ударной волны для системы (1.29), где U, ρ являются гладкими в $\Omega_\pm$ и имеют односторонние пределы $U^\pm, \hat{\rho}^\pm$ на Γ . Тогда это решение на Γ удовлетворяет условиям Ренкина–Гюгоннио для δ' -ударных волн:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta e}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eU_\delta) = ([\rho F(U)], [\rho]) \cdot \mathbf{n}, \\ & \frac{\delta(eU_\delta)}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eU_\delta \otimes U_\delta) = ([\rho M(U)], [\rho U]) \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (9.14)$$

где $\mathbf{n} = (\nu, -G) = (\nabla_{(x,t)} S) / |\nabla S|$ – пространственно-временная нормаль к Γ , $[f(U, \rho)] = f(U^-, \rho^-) - f(U^+, \rho^+)$ – скачок функции $f(U, \rho)$ через гиперповерхность разрыва Γ . Условия Ренкина–Гюгоннио (9.14) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} & \frac{\delta e}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eU_\delta) = ([\rho F(U)] - [\rho]U_\delta) \cdot \nu, \\ & \frac{\delta(eU_\delta)}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eU_\delta \otimes U_\delta) = ([\rho M(U)] - [\rho U]U_\delta) \cdot \nu \end{aligned} \quad (9.15)$$

или в форме

$$\begin{aligned} & \frac{\delta e}{\delta t} - 2\mathcal{K}Ge = ([\rho F(U)] - [\rho]U_\delta) \cdot \nu, \\ & \frac{\delta(eU_\delta)}{\delta t} - 2\mathcal{K}GeU_\delta = ([\rho M(U)] - [\rho U]U_\delta) \cdot \nu. \end{aligned} \quad (9.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ мы имеем $\varphi(x, t) = 0$ для $(x, t) \notin E$, $\bar{E} \subset \Omega$. Выбрав $\varphi(x, t)$ с компактным носителем в $\Omega_{\pm}$, увидим, что, согласно (9.12), соотношения (1.29) имеют место соответственно в $\Omega_{\pm}$. Если $\varphi(x, t)$ имеет носитель в Ω , то

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \int \hat{\rho}(\varphi_t + F(U) \cdot \nabla \varphi) dx dt \\ &= \int_{\Omega_- \cap E} \hat{\rho}(\varphi_t + F(U) \cdot \nabla \varphi) dx dt + \int_{\Omega_+ \cap E} \hat{\rho}(\varphi_t + F(U) \cdot \nabla \varphi) dx dt. \end{aligned}$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{\pm} \cap E} \hat{\rho}(\varphi_t + U \cdot \nabla \varphi) dx dt = - \int_{\Omega_{\pm} \cap E} (\rho_t + \nabla \cdot (\rho F(U))) \varphi(x, t) dx dt \\ & \mp \int_{\Gamma \cap E} \left(\frac{\hat{\rho}^{\pm} S_t}{|\nabla_{(x,t)} S|} + \frac{\hat{\rho}^{\pm} F(U^{\pm}) \cdot \nabla S}{|\nabla_{(x,t)} S|} \right) \varphi(x, t) d\mu(x, t) \\ & - \int_{\Omega_{\pm} \cap E \cap \mathbb{R}^n} \hat{\rho}^0(x) \varphi(x, 0) dx, \end{aligned}$$

где $d\mu(x, t)$ – элемент площади поверхности Γ . Складывая последние соотношения и учитывая, что $\rho_t + \nabla \cdot (\rho F) = 0$ при $(x, t) \in \Omega_{\pm}$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \int \hat{\rho}(\varphi_t + F(U) \cdot \nabla \varphi) dx dt + \int \hat{\rho}^0(x) \varphi(x, 0) dx \\ &= \int_{\Gamma} (-[\rho]G + [\rho F(U)] \cdot \nu) \varphi(x, t) \frac{d\mu(x, t)}{\sqrt{1+G^2}}. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Применяя формулу интегрирования по частям (9.9), получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} e \frac{\delta \varphi}{\delta t} \frac{d\mu(x, t)}{\sqrt{1+G^2}} + \int_{\Gamma_0} e^0(x) \varphi(x, 0) d\mu(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\delta^* e}{\delta t} \varphi \frac{d\mu(x, t)}{\sqrt{1+G^2}} \\ &= - \int_{\Gamma} \left(\frac{\delta e}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eG\nu) \right) \varphi \frac{d\mu(x, t)}{\sqrt{1+G^2}}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Складывая (9.17) и (9.18), видим, что для всех $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\Gamma} \left(-[\rho]G + [\rho F(U)] \cdot \nu - \frac{\delta e}{\delta t} - \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eG\nu) \right) \varphi(x, t) \frac{d\mu(x, t)}{\sqrt{1+G^2}} = 0,$$

что доказывает первое соотношение в (9.14).

Таким же образом доказывается и второе соотношение в (9.14).

В силу (9.13) и (9.10) условия Ренкина–Гюгоньо (9.14) можно переписать в форме (9.15) или в форме (9.16).

Правые части первого и второго уравнений в (9.14), (9.15) или в (9.16) называются *дефицитами Ренкина–Гюгоньо* в ρ и ρU соответственно.

Газовая динамика без давления. Согласно (9.14), (9.15), для систем газовой динамики без давления (1.16) и (1.30) условия Ренкина–Гюгоньо соответственно имеют форму

$$\begin{aligned} & \frac{\delta e}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eU_{\delta}) = ([\rho U] - [\rho]U_{\delta}) \cdot \nu, \\ & \frac{\delta(eU_{\delta})}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eU_{\delta} \otimes U_{\delta}) = ([\rho U \otimes U] - [\rho U]U_{\delta}) \cdot \nu \end{aligned} \quad (9.19)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\delta e}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eU_\delta) &= ([\rho C(U)] - [\rho]U_\delta) \cdot \nu, \\ \frac{\delta(eU_\delta)}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eU_\delta \otimes U_\delta) &= ([\rho U \otimes C(U)] - [\rho U]U_\delta) \cdot \nu. \end{aligned} \quad (9.20)$$

В этом случае дефициты Ренкина–Гюгонио в ρ и ρU являются токами массы и импульса соответственно.

9.3. Геометрический и физический аспекты многомерных решений типа δ -ударных волн. Рассмотрим многомерные аналоги балансовых законов сохранения, полученных в разделе 4.

Предположим, что движущаяся поверхность $\Gamma_t = \{x : S(x, t) = 0\}$ все время разделяет $\mathbb{R}_x^n$ на две части $\Omega_t^- = \{x \in \mathbb{R}^n : S(x, t) < 0\}$ и $\Omega_t^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : S(x, t) > 0\}$. Пусть (U, ρ) имеет компактный носитель по x . Обозначим через

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_{\Omega_t^- \cup \Omega_t^+} \rho(x, t) dx, & M(0) &= \int_{\Omega_0^- \cup \Omega_0^+} \rho^0(x) dx, \\ P(t) &= \int_{\Omega_t^- \cup \Omega_t^+} \rho(x, t) U(x, t) dx, & P(0) &= \int_{\Omega_0^- \cup \Omega_0^+} \rho^0(x) U^0(x) dx \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{\Gamma_t} e(x, t) d\mu(x), & m(0) &= \int_{\Gamma_0} e^0(x) d\mu(x), \\ p(t) &= \int_{\Gamma_t} e(x, t) U_\delta(x, t) d\mu(x), & p(0) &= \int_{\Gamma_0} e^0(x) U_\delta(x, 0) d\mu(x) \end{aligned}$$

“массы” и “импульсы” областей $\Omega_t^- \cup \Omega_t^+$, $\Omega_0^- \cup \Omega_0^+$ и “массы” и “импульсы” гиперповерхностей Γ_t , Γ_0 соответственно, где $d\mu(x)$ – элемент площади Γ_t .

Вначале докажем “поверхностную” транспортную теорему.

ТЕОРЕМА 9.2 [90; п. 12.8, (9)]. *Если $e(x, t)$ – гладкая функция, определенная только на движущейся поверхности $\Gamma_t = \{x : S(x, t) = 0\}$ и являющаяся сужением некоторой гладкой функции, определенной в окрестности Γ_t , то*

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} e(x, t) d\mu(x) = \int_{\Gamma_t} \left(\frac{\delta e}{\delta t} - 2\mathcal{K}Ge \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\Gamma_t} \left(\frac{\delta e}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eU_\delta) \right) d\mu(x). \end{aligned} \quad (9.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в силу определения (9.3)

$$m(t) = \int_{\Gamma_t} e(x, t) d\mu(x) = \langle e(x, t) \delta(S), 1 \rangle_x,$$

то, используя формулу (9.8), получим

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (e(x, t) \delta(S)), 1 \right\rangle_x = \left\langle \left(\frac{\delta e}{\delta t} - 2\mathcal{K}Ge \right) \delta(S) - Ge \partial_\nu \delta(S), 1 \right\rangle_x \\ &= \left\langle \left(\frac{\delta e}{\delta t} - 2\mathcal{K}Ge \right) \delta(S), 1 \right\rangle_x = \int_{\Gamma_t} \left(\frac{\delta e}{\delta t} - 2\mathcal{K}Ge \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

Теперь остается использовать формулы (9.10) и (9.13).

ТЕОРЕМА 9.3. Пусть пара распределений (U, ρ) и гиперповерхность разрыва $\Gamma = \{(x, t) : S(x, t) = 0\}$ – решение типа δ -ударной волны задачи Коши (1.29), (9.11) (в смысле определения 9.1), имеющее компактный носитель по x , $\rho(x, t) = \hat{\rho}(x, t) + e(x, t) \delta(\Gamma)$. Тогда имеют место следующие балансовые соотношения для “массы” и “импульса”:

$$\dot{M}(t) = -\dot{m}(t), \quad \dot{P}(t) = -\dot{p}(t); \quad (9.22)$$

$$M(t) + m(t) = M(0) + m(0), \quad P(t) + p(t) = P(0) + p(0). \quad (9.23)$$

Таким образом, идет процесс переноса “массы” и “импульса” из объема $\Omega_t^- \cup \Omega_t^+$ на движущийся фронт δ -ударной волны $\Gamma_t = \{x : S(x, t) = 0\}$ и обратно. При этом полные “масса” $M(t) + m(t)$ и “импульс” $P(t) + p(t)$ не зависят от времени.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть носители функций $U(x, t)$ и $\rho(x, t)$ по x содержатся в компакте $K \in \mathbb{R}_x^n$ с границей ∂K , $K_t^\pm = \Omega_t^\pm \cap K$ и ν – пространственная нормаль к Γ_t , направленная из Ω_t^- в Ω_t^+ . Дифференцируя $M(t)$ и используя транспортную теорему для объема (см., например, [90; п. 12.8, (3)], [93]), получим

$$\dot{M}(t) = \int_{K_t^- \cup K_t^+} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + \int_{\partial K_t^- \cup \partial K_t^+} G \rho d\mu(x),$$

где $G = -\frac{S_t}{|\nabla S|} = U_\delta \cdot \nu$. Так как $\rho_t^\pm + \nabla \cdot (\rho^\pm F(U^\pm)) = 0$, $x \in K^\pm$ и $U^\pm$, $\rho^\pm$ на гиперповерхности $\partial K_t^\pm$ равны нулю всюду кроме Γ_t , то, применяя теорему Гаусса–Остроградского, преобразуем последнее соотношение к виду

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= - \int_{K_t^-} \nabla \cdot (\rho^- F(U^-)) dx - \int_{K_t^+} \nabla \cdot (\rho^+ F(U^+)) dx + \int_{\Gamma_t} G[\rho] d\mu(x) \\ &= - \int_{\Gamma_t} \rho^- F(U^-) \cdot \nu d\mu(x) + \int_{\Gamma_t} \rho^+ F(U^+) \cdot \nu d\mu(x) + \int_{\Gamma_t} G[\rho] d\mu(x) \\ &= - \int_{\Gamma_t} ([\rho F(U)] \cdot \nu - [\rho]G) d\mu(x). \end{aligned} \quad (9.24)$$

Используя первое условие Ренкина–Гюгонио (9.15) и учитывая, что $G = U_\delta \cdot \nu$, перепишем (9.24) в виде

$$\dot{M}(t) = - \int_{\Gamma_t} ([\rho F(U)] - [\rho]U_\delta) \cdot \nu d\mu(x) = - \int_{\Gamma_t} \left(\frac{\delta e}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eU_\delta) \right) d\mu(x). \quad (9.25)$$

Согласно транспортной теореме (9.21), правая часть (9.25) совпадает с $-\dot{m}(t)$.

Почти дословно повторяя доказательство первого балансового соотношения в (9.22), выведем второе балансовое соотношение в (9.22).

Для доказательства (9.23) нужно проинтегрировать (9.22) по t . Теорема 9.3 доказана.

Энтропийные условия устойчивости (аналогичные (1.25)) в многомерном случае имеют вид

$$U^+(x, t) \cdot \nu|_{\Gamma_t} < U_\delta(x, t) \cdot \nu|_{\Gamma_t} < U^-(x, t) \cdot \nu|_{\Gamma_t}, \quad (9.26)$$

где U_δ – скорость движения фронта δ -ударной волны, $U^\mp$ – скорости позади и впереди фронта Γ_t соответственно, ν – нормаль к фронту Γ_t . Эти условия означают, что все характеристики с обеих сторон фронта являются входящими. Согласно этому условию, $[U] \cdot \nu|_{\Gamma_t} > 0$.

Так как в случае системы газовой динамики без давления (1.16) $\rho^\pm \geq 0$, для решений, удовлетворяющих условию (9.26), из первого условия Ренкина–Гюгонно в (9.19) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\delta e}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eU_\delta) &= ([\rho U] - [\rho]U_\delta) \cdot \nu|_{\Gamma_t} \\ &= (\rho^-(U^- - U_\delta) \cdot \nu + \rho^+(U_\delta - U^+) \cdot \nu)|_{\Gamma_t} \geq 0. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и теоремы 9.3 следует, что $\dot{m}(t) > 0$ и $\dot{M}(t) < 0$.

Таким образом, процесс переноса массы, описываемый теоремой 9.3, в случае системы уравнений газовой динамики без давления является процессом концентрации массы на движущемся фронте Γ_t .

О возможности бифуркации размерности решения в системе уравнений газовой динамики без давления. Как мы видели, в случае системы газовой динамики без давления (1.16) идет процесс концентрации массы на движущемся $(n-1)$ -мерном фронте Γ_t . Предположим, что за конечное время $\tilde{t}$ вся начальная масса $M(0)$ сконцентрируется на фронте δ -ударной волны. Тогда, согласно (9.19), для $t > \tilde{t}$ дефициты Ренкина–Гюгонно обратятся в нуль, и вместо “начальной” (n -мерной) системы газовой динамики без давления (1.16) мы будем иметь “точную поверхностную” ($(n-1)$ -мерную) версию этой системы

$$\frac{\delta e}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eU_\delta) = 0, \quad \frac{\delta(eU_\delta)}{\delta t} + \nabla_{\Gamma_t} \cdot (eU_\delta \otimes U_\delta) = 0, \quad (9.27)$$

где вместо скорости газа U стоит скорость движущегося фронта U_δ , а вместо объемной плотности массы ρ – поверхностная плотность массы фронта e , причем эти величины определены только на фронте Γ_t . Поскольку система (9.27) – $(n-1)$ -мерный аналог системы (1.16), ее решение за конечное время разовьет сингулярность в виде δ -ударной волны (в скорости фронта U_δ появится разрыв, а в поверхностной плотности массы фронта e появится дельта-функция, сосредоточенная на $(n-2)$ -мерной поверхности фронта). Таким образом, может случиться, что за конечное число описанных бифуркаций вся начальная масса сконцентрируется в точке.

Поскольку система газовой динамики без давления (1.16) используется как модель формирования структур во вселенной, аналитическое описание указанного процесса бифуркаций может оказаться полезным для моделей астрофизики и моделей, в которых используются системы типа газовой динамики без давления.

10. Заключение

I. Метод слабых асимптотик, применяемый при решении большинства задач в этой статье, является адекватной техникой для работы с решениями типа $\delta^{(n)}$ -ударных волн, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Некоторые из решенных в статье задач нельзя решить, применяя иную известную технику. Так, согласно формулам (7.31)–(7.34) и (7.25), невозможно

построить решение типа δ -ударной волны для систем (1.12), (1.20) или решение типа δ' -ударной волны для систем (1.21), используя *неконсервативное произведение* [27], [46], [45], поскольку эти сингулярные суперпозиции *не могут быть сведены* к виду (1.11). Здесь также неприменим подход “*обобщенное решение в смысле меры*” [10], [33], [34]. Тем не менее, оба эти подхода можно использовать в случае задачи Коши (1.10), (1.17) (см. формулы (7.29), (7.30), (7.35) и работы [27], [33]). Другой показательный факт был отмечен в замечании 1.1. Так, в [58] задача построения сингулярного решения системы (1.27) была решена в рамках теории Коломбо. Однако эта задача решается с использованием нашего подхода без выхода за рамки теории распределений Шварца и не используя теорию Коломбо.

II. Результаты работ [4]–[7], связанные с решениями типа δ' -ударных волн (отраженные в разделах 3–7), показывают, что решения систем законов сохранения могут развивать не только дельта-функции (как в случае решений типа δ -ударных волн), но также и их производные. Эти результаты открывают новый раздел теории законов сохранения.

В связи со сказанным возникает задача построения теории систем законов сохранения, которые допускают решения типа $\delta^{(n)}$ -ударных волн, $n = 2, 3, \dots$. Типичная система, которая могла бы иметь решение типа $\delta^{(n)}$ -ударной волны, – это система вида

$$\begin{aligned}(u_1)_t + (f(u_1))_x &= 0, \\ (u_2)_t + (f_1(u_1)u_2)_x &= 0, \\ (u_3)_t + (f_{22}(u_1)u_2^2 + f_{21}(u_1)u_3)_x &= 0, \\ (u_4)_t + (f_{33}(u_1)u_2^3 + f_{32}(u_1)u_2u_3 + f_{31}(u_1)u_4)_x &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ (u_{n+2})_t + (f_{n+1n+1}(u_1)u_2^{n+1} + \dots\dots\dots + f_{n+11}(u_1)u_{n+2})_x &= 0,\end{aligned}$$

где $f(u)$, $f_1(u)$, $f_{kj}(u)$, $k = 2, \dots, n+1$, $j = 1, \dots, n+1$, – гладкие функции. Чтобы решить задачу Коши для такой системы, мы должны вывести систему интегральных тождеств типа (2.2), (2.11), (3.2), которая будет потом использоваться для определения такого сингулярного решения.

III. В многомерном случае естественно обобщить определение 9.1 и ввести для системы (1.29) понятие решения типа δ -ударной волны (U, ρ) , когда компоненты ρ могут содержать дельта-функции, сосредоточенные на поверхностях коразмерностей $2, \dots, n$ (или даже дельта-функции, сосредоточенные на фрактальных множествах):

$$\rho(x, t) = \hat{\rho}(x, t) + \sum_{j=1}^n e_j(x, t) \delta(\Gamma^{(j)}),$$

где $U \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty); \mathbb{R}^n)$, $\hat{\rho} \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty); \mathbb{R})$, $e_j \in C(\Gamma^{(j)})$, $\Gamma^{(j)}$ – гиперповерхность коразмерности j , $\delta(\Gamma^{(j)})$ – дельта-функция, сосредоточенная на $\Gamma^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$. Для этого в интегральные тождества (9.12) из определения 9.1 нужно ввести дополнительно интегралы по поверхностям коразмерностей $2, \dots, n$. Используя это определение и нужно решать задачу о бифуркации размерности, поставленную в п. 9.3.

IV. Как представляется автору, теория нелинейных уравнений, которые допускают решения типа $\delta^{(n)}$ -ударных волн, $n = 0, 1, 2, \dots$, является адекватным аппаратом для изучения задач с особенностями, таких как движение многофазных сред, которые могут быть математически рассмотрены как среды без давления (например, запыленный газ) [3], [78]–[82], гранулированные среды [86], [96]–[98] (см. также [99]).

Отметим, что двухфазные потоки с вкраплениями твердых частиц встречаются в природе (пыльные и песчаные бури, извержения вулканов и т. д.), в авиационно-космической технике и машиностроении (двигатели самолетов и ракет, турбины, теплообменники с двухфазным рабочим веществом, пневматический транспорт), промышленных технологиях (плазменное напыление, химические реакторы с гранулированной субстанцией) и т. п. Поэтому дальнейшее развитие теории сильно сингулярных решений может найти многочисленные приложения.

Автор выражает глубокую благодарность Е. Ю. Панову, В. И. Полищуку и О. С. Розановой за обсуждение отдельных разделов статьи.

Список литературы

- [1] D. J. Korchinski, *Solution of a Riemann problem for 2×2 systems of conservation laws possessing no classical weak solution*, Thesis, Adelphi Univ., New York, 1977.
- [2] Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис, *Элементы математической физики*, Наука, М., 1973.
- [3] А. Н. Крайко, “О поверхностях разрыва в среде, лишенной ‘собственного’ давления”, *ПММ*, **43**:3 (1979), 500–510; англ. пер.: A. N. Kraiko, “On discontinuity surfaces in a medium devoid of ‘proper’ pressure”, *J. Appl. Math. Mech.*, **43**:3 (1979), 539–549.
- [4] E. Yu. Panov, V. M. Shelkovich, “ δ' -shock waves as a new type of solutions to systems of conservation laws”, *J. Differential Equations*, **228**:1 (2006), 49–86.
- [5] Е. Ю. Панов, В. М. Шелкович, “ δ' -ударные волны как новый тип сингулярных решений гиперболических систем законов сохранения”, *Докл. РАН*, **407**:5 (2006), 595–599; англ. пер.: E. Yu. Panov, V. M. Shelkovich, “ δ' -shock waves as a new type of singular solutions to hyperbolic systems of conservation laws”, *Doklady Math.*, **73**:2 (2006), 264–268.
- [6] E. Yu. Panov, V. M. Shelkovich, “Definition of δ' -shock waves type solutions and the Rankine–Hugoniot conditions”, *Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction”* (St. Petersburg, 2005), 2005, 187–199.
- [7] V. M. Shelkovich, “The Riemann problem admitting δ -, δ' -shocks, and vacuum states (the vanishing viscosity approach)”, *J. Differential Equations*, **231**:2 (2006), 459–500.
- [8] Л. К. Эванс, *Уравнения с частными производными*, Университетская серия, **7**, Тамара Рожковская, Новосибирск, 1998; пер. с англ.: L. C. Evans, *Partial differential equations*, Grad. Stud. Math., **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [9] S. Alberverio, V. M. Shelkovich, “On the delta-shock front problem”, *Analytical Approaches to Multidimensional Balance Laws*, vol. 2, Nova Science Publishers, Inc., 2005, 45–88.
- [10] F. Bouchut, “On zero pressure gas dynamics”, *Advances in Kinetic Theory and Computing*, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., **22**, World Scientific, River Edge, NJ, 1994, 171–190.

- [11] Gui-Qiang Chen, Hailiang Liu, “Formation of δ -shocks and vacuum states in the vanishing pressure limit of solutions to the Euler equations for isentropic fluids”, *SIAM J. Math. Anal.*, **34**:4 (2003), 925–938.
- [12] Gui-Qiang Chena, Hailiang Liu, “Concentration and cavitation in the vanishing pressure limit of solutions to the Euler equations for nonisentropic fluids”, *Phys. D*, **189**:1–2 (2004), 141–165.
- [13] S. Chiang, “On the interaction of δ -shocks and contact vacuum states”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **57**:6 (2006), 940–959.
- [14] V. G. Danilov, V. M. Shelkovich, “Propagation and interaction of delta-shock waves of a hyperbolic system of conservation laws”, *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Proceedings of the Ninth International Conference on Hyperbolic Problems held in CalTech* (Pasadena, 2002), Springer-Verlag, Berlin, 2003, 483–492.
- [15] В. Г. Данилов, В. М. Шелкович, “Распространение и взаимодействие δ -ударных волн гиперболических систем законов сохранения”, *Докл. РАН*, **394**:1 (2004), 10–14; англ. пер.: V. G. Danilov, V. M. Shelkovich, “Propagation and interaction of δ -shock waves for hyperbolic systems of conservation laws”, *Dokl. Math.*, **69**:1 (2004), 4–8.
- [16] V. G. Danilov, V. M. Shelkovich, “Delta-shock wave type solution of hyperbolic systems of conservation laws”, *Quart. Appl. Math.*, **63**:3 (2005), 401–427.
- [17] V. G. Danilov, V. M. Shelkovich, “Dynamics of propagation and interaction of δ -shock waves in conservation law systems”, *J. Differential Equations*, **211**:2 (2005), 333–381.
- [18] W. E, Yu. G. Rykov, Ya. G. Sinai,, “Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics”, *Comm. Math. Phys.*, **177**:2 (1996), 349–380.
- [19] G. Ercole, “Delta-shock waves as self-similar viscosity limits”, *Quart. Appl. Math.*, **58**:1 (2000), 177–199.
- [20] F. Huang, “Existence and uniqueness of discontinuous solutions for a class of non-strictly hyperbolic systems”, *Advances in Nonlinear Partial Differential Equations and Related Areas* (Beijing, 1997), World Scientific, River Edge, NJ, 1998, 187–208.
- [21] Feiming Huang, Zhen Wang, “Well posedness for pressureless flow”, *Comm. Math. Phys.*, **222**:1 (2001), 117–146.
- [22] B. L. Keyfitz, “Conservation laws, delta-shocks and singular shocks”, *Nonlinear Theory of Generalized Functions* (Vienna, 1997), Chapman&Hall/CRC Res. Notes Math., **401**, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999, 99–111.
- [23] B. L. Keyfitz, H. C. Kranzer, “Spaces of weighted measures for conservation laws with singular shock solutions”, *J. Differential Equations*, **118**:2 (1995), 420–451.
- [24] B. L. Keyfitz, R. Sanders, M. Sever, “Lack of hyperbolicity in the two-fluid model for two-phase incompressible flow”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **3**:4 (2003), 541–563.
- [25] B. L. Keyfitz, M. Sever, Fu Zhang, “Viscous singular shock structure for a nonhyperbolic two-fluid model”, *Nonlinearity*, **17**:5 (2004), 1731–1747.
- [26] H. C. Kranzer, B. L. Keyfitz, “A strictly hyperbolic system of conservation laws admitting singular shocks”, *Nonlinear Evolution Equations That Change Type*, IMA Vol. Math. Appl., **27**, Springer, New York, 1990, 107–125.
- [27] P. Le Floch, “An existence and uniqueness result for two nonstrictly hyperbolic systems”, *Nonlinear Evolution Equations That Change Type*, IMA Vol. Math. Appl., **27**, Springer, New York, 126–138.
- [28] M. Sever, *Distribution solutions of nonlinear systems of conservation laws*, Mem. Amer. Math. Soc., № 190, 2007.
- [29] V. M. Shelkovich, “Delta-shock waves of a class of hyperbolic systems of conservation laws”, *Patterns and Waves* (St. Petersburg, July 8–13, 2002), AkademPrint, St. Petersburg, 2003, 155–168.

- [30] V.M. Shelkovich, *A specific hyperbolic system of conservation laws admitting delta-shock wave type solutions*, Preprint № 2003-059, NTNU, Trondheim, 2003.
- [31] V.M. Shelkovich, "Delta-shocks, the Rankine–Hugoniot conditions, and singular superposition of distributions", *Proceedings of the International Conference "Days on Diffraction"* (St. Petersburg, 2004), 2004, 175–196.
- [32] Wancheg Sheng, Tong Zhang, *The Riemann problem for the transportaion equations in gas dynamics*, Mem. Amer. Math. Soc., №. 137, 1999.
- [33] De Chun Tan, Tong Chang, Yu Xi Zheng, "Delta-shock waves as limits of vanishing viscosity for hyperbolic systems of conservation laws", *J. Differential Equations*, **112**:1 (1994), 1–32.
- [34] Hanchun Yang, "Riemann problems for a class of coupled hyperbolic systems of conservation laws", *J. Differential Equations*, **159**:2 (1999), 447–484.
- [35] J. Glimm, "Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **18**:4 (1965), 697–715.
- [36] P.D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. Appl. Math., **11**, SIAM, Philadelphia, PA, 1973.
- [37] Jiequan Li, Tong Zhang, "On the initial-value problem for zero-pressure gas dynamics", *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications* (Zurich, 1998), vol. II, Internat. Ser. Numer. Math., **130**, Birkhäuser, Basel, 1999, 629–640.
- [38] Jiequan Li, Wei Li, "Riemann problem for the zero-pressure flow in gas dynamics", *Progr. Natur. Sci. (English Ed.)*, **11**:5 (2001), 331–344.
- [39] Jiequan Li, Hanchun Yang, "Delta-shocks as limit of vanishing viscosity for multidimensional zero-pressure gas dynamics", *Quart. Appl. Math.*, **59**:2 (2001), 315–342.
- [40] Yu. G. Rykov, "The propagation of shock waves in 2-D system of pressureless gas dynamics", *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications* (Zürich, 1998), vol. II, Internat. Ser. Numer. Math., **130**, Birkhäuser, Basel, 1999, 813–822.
- [41] Yu. G. Rykov, "On the non-Hamiltonian character of shocks in 2-D pressureless gas", *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.* (8), **5**:1 (2002), 55–78.
- [42] M. Sever, "An existence theorem in the large for zero-pressure gas dynamics", *Differential Integral Equations*, **14**:9 (2001), 1077–1092.
- [43] Hanchun Yang, "Generalized plane delta-shock waves for n -dimensional zero-pressure gas dynamics", *J. Math. Anal. Appl.*, **260**:1 (2001), 18–35.
- [44] А. И. Вольперт, "Пространства BV и квазилинейные уравнения", *Матем. сб.*, **73**:2 (1967), 255–302; англ. пер.: A. I. Vol’pert, "The spaces BV and quasilinear equations", *Math. USSR-Sb.*, **2**:2 (1967), 225–267.
- [45] G. Dal Maso, P. G. Le Floch, F. Murat, "Definition and weak stability of nonconservative products", *J. Math. Pures Appl.* (9), **74**:6 (1995), 483–548.
- [46] P. Le Floch, "Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under nonconservative form", *Comm. Partial Differential Equations*, **13**:6 (1988), 669–727.
- [47] J.-F. Colombeau, *Elementary introduction to new generalized functions*, North-Holland Math. Stud. **113**, Notes on Pure Mathematics, **103**, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [48] J.-F. Colombeau, "Multiplication of distributions", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **23**:2 (1990), 251–268.
- [49] S. Schecter, "Existence of Dafermos profiles for singular shocks", *J. Differential Equations*, **205**:1 (2004), 185–210.
- [50] D. G. Schaeffer, S. Schecter, M. Shearer, "Nonstrictly hyperbolic conservation laws with a parabolic line", *J. Differential Equations*, **103**:1 (1993), 94–126.
- [51] M. Sever, "Viscous structure of singular shocks", *Nonlinearity*, **15**:3 (2002), 705–725.

- [52] V. M. Shelkovich, “On delta-shocks and singular shocks”, *Hyperbolic Problems. Theory, Numerics and Applications. Proceedings of the 11th International Conference on Hyperbolic Problems* (Lyon, 2006), eds. S. Benzoni-Gavage et al., Springer, Berlin, 2008, 971–979.
- [53] R. J. DiPerna, “Measure-valued solutions to conservation laws”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **88**:3 (1985), 223–270.
- [54] M. Grosser, M. Kunzinger, M. Oberguggenberger, R. Steinbauer, *Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity*, Math. Appl., **537**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.
- [55] M. Oberguggenberger, *Multiplication of distributions and applications to partial differential equations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **259**, Longman, Harlow; Wiley, New York, 1992.
- [56] M. Oberguggenberger, “Generalized functions in nonlinear models – a survey”, *Nonlinear Anal.*, **47**:8 (2001), 5029–5040.
- [57] Jiaxin Hu, “The Riemann problem for pressureless fluid dynamics with distributional solutions in Colombeau’s sense”, *Comm. Math. Phys.*, **194**:1 (1998), 191–205.
- [58] K. T. Joseph, “Explicit generalized solutions to a system of conservation laws”, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **109**:4 (1999), 401–409.
- [59] L. Schwartz, “Sur l’impossibilité de la multiplication des distributions”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **239** (1954), 847–848.
- [60] V. M. Shelkovich, “New versions of the Colombeau algebras”, *Math. Nachr.*, **278**:11 (2005), 1318–1340.
- [61] V. M. Shelkovich, “The Colombeau algebra and an algebra of asymptotical distributions”, *Proceedings of the International Conference on Generalized Functions* (University of French West Indies, 2000), Cambridge Scientific Publishers, 2004, 317–328.
- [62] В. М. Шелкович, “Теория обобщенных функций Коломбо, использующая гармонические регуляризации”, *Матем. заметки*, **63**:2 (1998), 313–316; англ. пер.: V. M. Shelkovich, “Colombeau generalized functions: A theory based on harmonic regularizations”, *Math. Notes*, **63**:2 (1998), 275–279.
- [63] V. G. Danilov, V. M. Shelkovich, “Propagation and interaction of nonlinear waves to quasilinear equations”, *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*, vol. I (Magdeburg, 2000), Internat. Ser. Numer. Math., **140**, Birkhäuser, Basel, 2001, 267–276.
- [64] V. G. Danilov, V. M. Shelkovich, “Propagation and interaction of shock waves of quasilinear equation”, *Nonlinear Stud.*, **8**:1 (2001), 135–169.
- [65] V. G. Danilov, G. A. Omel’yanov, V. M. Shelkovich, “Weak asymptotics method and interaction of nonlinear waves”, *Asymptotic methods for wave and quantum problems*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **208**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 33–165.
- [66] M. G. García-Alvarado, R. Flores-Espinoza, G. A. Omel’yanov, “Interaction of shock waves in gas dynamics: uniform in time asymptotics”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **19** (2005), 3111–3126.
- [67] R. Flores-Espinoza, G. A. Omel’yanov, “Asymptotic behavior for the centered-rarefaction appearance problem”, *Electron. J. Differ. Equ.*, 2005, № 148, 1–25.
- [68] V. G. Danilov, D. Mitrovic, “Weak asymptotics of shock wave formation process”, *Nonlinear Anal.*, **61**:4 (2005), 613–635.
- [69] V. G. Danilov, D. Mitrovic, *Delta shock wave formation in the case of triangular hyperbolic system of conservation laws*, Preprint № 2006-057, NTNU, Trondheim, 2006; [arXiv: math/0612763](https://arxiv.org/abs/math/0612763); *Z. Differential Equation* (to appear).
- [70] V. G. Danilov, “On singularities of continuity equation solutions”, *Nonlinear Anal.*, **68**:6 (2008), 1640–1651.
- [71] A. Majda, “The stability of multidimensional shock fronts”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **41**:275 (1983).

- [72] A. Majda, "The existence of multidimensional shock fronts", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **43**:281 (1983).
- [73] A. Majda, *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, Appl. Math. Sci., **53**, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [74] Tai-Ping Liu, Zhou Ping Xin, "Overcompressive shock waves", *Nonlinear Evolution Equations That Change Type*, IMA Vol. Math. Appl., **27**, Springer, New York, 1990, 139–145.
- [75] S. F. Shandarin, Ya. B. Zeldovich, "The large-scale structure of the universe: turbulence, intermittence, structures in self-gravitating medium", *Rev. Modern Phys.*, **61**:2 (1989), 185–220.
- [76] Ya. B. Zeldovich, "Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations", *Astronom. Astrophys.*, **5** (1970), 84–89.
- [77] S. Albeverio, S. A. Molchanov, D. Surgailis, "Stratified structure of the Universe and the Burgers' equation – a probabilistic approach", *Probab. Theory Related Fields*, **100**:4 (1994), 457–484.
- [78] А. Н. Крайко, С. М. Сулайманова, "Двухжидкостные течения смеси газа и твердых частиц с 'пеленами' и 'шнурами', возникающими при обтекании непроницаемых поверхностей", *ПММ*, **47**:4 (1983), 619–630; англ. пер.: A. N. Kraiko, S. M. Sulaimanova, "Two-fluid flows of a mixture of a gas and solid particles with 'films' and 'filaments' appearing in flows past impermeable surfaces", *J. Appl. Math. Mech.*, **47**:4 (1983), 507–516.
- [79] А. Н. Крайко, "К двухжидкостной модели течений газа и диспергированных в нем частиц", *ПММ*, **46**:1 (1982), 96–106; англ. пер.: A. N. Kraiko, "The two-fluid model of flow of gas with particles dispersed in it", *J. Appl. Math. Mech.*, **46**:1 (1983), 75–82.
- [80] А. Н. Осипцов, "Исследование зон неограниченного роста концентрации частиц в дисперсных потоках", *Механика жидкости и газа*, 1984, №3, 46–52; англ. пер.: A. N. Osipsov, "Investigation of regions of unbounded growth of the particle concentration in disperse flows", *Fluid Dynam.*, **19** (1984), 378–385.
- [81] A. N. Osipsov, "Modified Lagrangian method for calculating the particle concentration in dusty-gas flows with intersecting particle trajectories", *Proceedings of the 3 International Conference on Multiphase Flows* (Lyon, 1998), 1998.
- [82] A. N. Osipsov, "Lagrangian modeling of dust admixture in gas flows", *Astrophys. Space Sci. Lib.*, **274**:1–2 (2000), 377–386.
- [83] F. Berthelin, P. Degond, M. Delitala, M. Rascole, "A model for the formation and evolution of traffic jams", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **187**:2 (2008), 185–220.
- [84] M. Mazzotti, "Local equilibrium theory for the binary chromatography of species subject to a generalized Langmuir isotherm", *Ind. Eng. Chem. Res.*, **45**:15 (2006), 5332–5350.
- [85] M. Mazzotti, "Occurrence of a delta-shock in non-linear chromatography", *6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics* (Zurich, 2007), 2007.
- [86] I. Fouxon, B. Meerson, M. Assaf, E. Livne, "Formation and evolution of density singularities in hydrodynamics of inelastic gases", *Phys. Rev. E*, **75**:5 (2007), 050301(R).
- [87] V. M. Shelkovich, "Validity and naturalness of definitions of δ - and δ' -shock type solutions to systems of conservation laws", *Proceedings of the International Conference "Days on Diffraction"* (St. Petersburg, 2006), 2006, 266–279.
- [88] А. Ю. Хренников, V. M. Shelkovich, "On the algebraic aspect of singular solutions to conservation laws systems", *Mathematical Modelling of Wave Phenomena: 2nd Conference on Mathematical Modelling of Wave Phenomena* (Växjö, Sweden, 2005), AIP Conference Proceedings, **834**, №1, 2006, 206–213.
- [89] F. Poupaud, "Global smooth solutions of some quasi-linear hyperbolic systems with large data", *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), **8**:4 (1999), 649–659.

- [90] R. P. Kanwal, *Generalized Functions: Theory and technique*, Birkhäuser, Boston, MA, 1998.
- [91] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматгиз, М., 1959; англ. пер.: I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions. I: Properties and operations*, Academic Press, New York–London, 1964.
- [92] В. М. Шелкович, “Условия Ренкина–Гюгоньо и балансовые законы для δ -ударных волн”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:6 (2006), 213–229; англ. пер.: V. M. Shelkovich, “The Rankine–Hugoniot conditions and balance laws for δ -shock waves”, *J. Math. Sci.*, **151**:1 (2008), 2781–2792.
- [93] D. E. Betounes, “Dirac tensor distributions for moving submanifolds of $\mathbb{R}^n$ ”, *J. Math. Phys.*, **24**:11 (1983), 2566–2572.
- [94] D. E. Betounes, “Nonclassical fields with singularities on the moving surface”, *J. Math. Phys.*, **23**:12 (1982), 2304–2311.
- [95] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*, Mir, Moscow, 1979.
- [96] I. S. Aranson, L. S. Tsimring, “Patterns and collective behavior in granular media: Theoretical concepts”, *Rev. Modern Phys.*, **78**:2 (2006), 641–692.
- [97] B. Meerson, “Nonlinear dynamics of radiative condensations in optically thin plasmas”, *Rev. Modern Phys.*, **68**:1 (1996), 215–257.
- [98] I. Fouxon, B. Meerson, M. Assaf, E. Livne, “Formation of density singularities in ideal hydrodynamics of freely cooling inelastic gases: a family of exact solutions”, *Phys. Fluids*, **19** (2007), 17; [arXiv: 0704.084](https://arxiv.org/abs/0704.084).
- [99] D. A. Drew, S. L. Passman, *Theory of multicomponent fluids*, Appl. Math. Sci., **135**, Springer, New York, 1999.

В. М. Шелкович (V. M. Shelkovich)
Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
E-mail: shelkv@vs1567.spb.edu

Поступила в редакцию
09.02.2008