Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Спиридонов, Очерки теории эллиптических гипергеометрических функций, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 3, 3–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:41:30

УДК 517.5+517.3

Очерки теории эллиптических гипергеометрических функций

В. П. Спиридонов

Дается краткий обзор основных результатов теории эллиптических гипергеометрических функций – нового класса специальных функций математической физики. Доказывается самая общая известная точная формула однократного интегрирования, обобщающая бета-интеграл Эйлера, названная эллиптическим бета-интегралом. Строится эллиптический аналог гипергеометрической функции Гаусса и эллиптическое гипергеометрическое уравнение для него. Приводятся соотношения биортогональности для этой функции и ее частных случаев. Перечисляются известные эллиптические бета-интегралы на корневых системах и рассматриваются преобразования симметрии для соответствующих эллиптических гипергеометрических функций более высокого порядка.

Библиография: 118 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	4
2. Обобщенные гамма-функции.....	6
2.1. Многократная гамма-функция Барнса.....	6
2.2. Эллиптические гамма-функции.....	8
3. Эллиптический бета-интеграл.....	12
4. Общие эллиптические гипергеометрические ряды и интегралы.....	18
4.1. Эллиптический аналог функции Мейера.....	18
4.2. Вполне уравновешенные и совершенно уравновешенные интегралы.....	20
4.3. Ряды.....	23
5. Эллиптический аналог гипергеометрической функции Гаусса.....	26
5.1. Определение V -функции и связь с системой корней E_7	26
5.2. Эллиптическое гипергеометрическое уравнение.....	28
6. Цепочки преобразований симметрии для функций.....	31
7. Биортогональные функции гипергеометрического типа.....	34
7.1. Дискретные биортогональные функции с непрерывной мерой... ..	34
7.2. Обрывающаяся цепная дробь.....	39
7.3. Непрерывная биортогональность V -функции.....	41
8. Связь с алгеброй Складина.....	43

9. Разложения на простые дроби и определители	46
10. Эллиптические бета-интегралы на корневых системах	48
10.1. Интегралы для системы корней C_n	48
10.2. Интегралы для системы корней A_n	51
11. Некоторые формулы суммирования многократных рядов	54
12. Преобразования симметрии для многократных интегралов	56
13. Заключение	60
Приложение А. Эллиптические функции и тэта-функции Якоби	62
Список литературы	66

1. Введение

Теория специальных функций широко востребована в теоретической и математической физике как справочный набор точных математических формул и методов их построения. Это относится к формулам суммирования рядов, точно вычисляемым интегралам, преобразованиям симметрии функций, дифференциальным или другим уравнениям, решаемым в терминах “простых” функций, и так далее. Бурное построение такой базы данных, которое происходило в XIX веке и находилось на вершине приоритетов математики того времени, сменилось в XX веке значительным снижением интереса к специальным функциям, изучение которых стало рассматриваться как дело второстепенной важности. Такое отношение к исследованиям в этой области оправдывалось мнением, что все основные типы интересных функций “с классическими свойствами” (эллиптические, гипергеометрические, автоморфные и некоторые другие функции) уже найдены и необходимо только их более детальное изучение.

Теория специальных функций гипергеометрического типа развивалась в течение нескольких столетий, начиная с фундаментальных результатов, полученных Эйлером [1]. Над ее основаниями работали Гаусс, Якоби, Риман, Куммер и другие выдающиеся математики. Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; x)$ является каноническим примером функций такого типа. Согласно подходу Похгаммера и Хорна [2], обобщенные чисто гипергеометрические ряды можно определить как суммы $\sum_n c_n$, для которых отношение c_{n+1}/c_n есть рациональная функция n . В 1847 г. Гейне ввел в рассмотрение q -аналог ${}_2F_1$ -ряда ${}_2\varphi_1(a, b; c; q; x)$ [3]. Общие ряды такого типа $\sum_n c_n$ характеризуются тем, что для них отношение c_{n+1}/c_n есть рациональная функция q^n , где q – некоторый комплексный параметр. До недавнего времени были известны только эти два класса функций гипергеометрического типа (включая интегральные представления для них), и их изучению было посвящено множество работ.

Около десяти лет назад неожиданно выяснилось, что существуют гипергеометрические функции третьего типа, связанные с эллиптическими кривыми. Впервые такие объекты возникли в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния, разработанного для точно решаемых моделей статистической

механики [4], [5], в качестве эллиптических решений уравнения Янга–Бакстера [6], [7]. Как продемонстрировано Френкелем и Тураевым [8], эти решения (названные эллиптическими $6j$ -символами) выражаются через эллиптическое обобщение обрывающегося совершенно уравновешенного сбалансированного q -гипергеометрического ряда ${}_{10}\varphi_9$ с дискретными значениями параметров. В работе [9] построена обобщенная $(1+1)$ -мерная интегрируемая цепочка типа цепочки Тоды с дискретным временем и показано, что этот же обрывающийся ряд с произвольными параметрами возникает как частное решение соответствующих уравнений пары Лакса.

Общее формальное определение эллиптических гипергеометрических рядов, предложенное и детально изученное в [10], описывает их как ряды $\sum_n c_n$, для которых отношение c_{n+1}/c_n является эллиптической функцией n . В рамках этой схемы случай [8] характеризуется наличием нескольких интересных структурных ограничений на коэффициенты c_n . При этом в описании бесконечных рядов имеются определенные трудности, связанные с их сходимостью. Поэтому общие эллиптические гипергеометрические функции определяются интегральными представлениями [11].

Наиболее общей чисто гипергеометрической функцией можно считать функцию Мейера [12]. Она задается контурным интегралом некоторого отношения гамма-функций Эйлера. Для интегральных представлений более сложных функций гипергеометрического типа требуются обобщенные гамма-функции, теория которых была развита Барнсом [13] и Джексоном [14] более века назад. q -гамма-функция Джексона необходима для описания q -гипергеометрических функций при $|q| < 1$. Более сложная функция требуется, когда q лежит на единичной окружности, $|q| = 1$ [15]–[18]. Эти функции, связанные с гамма-функцией Барнса второго порядка, активно используются в современной математической физике в описании квантовых интегрируемых моделей и представлений квантовых алгебр [19]–[24].

Для определения эллиптических гипергеометрических интегралов требуется эллиптическая гамма-функция, связанная с гамма-функцией Барнса третьего порядка. Важность эллиптической гамма-функции была подчеркнута Руджинарсом [18], который дал ей это имя и рассмотрел некоторые ее свойства. Модулярные преобразования этой функции описаны в [25]. В [11] построена модифицированная эллиптическая гамма-функция, которая остается корректно определенной и в случае, когда один из базисных параметров лежит на единичной окружности. Другие аспекты этой функции изучались в [26]–[28].

Первая точная формула интегрирования, использующая эллиптическую гамма-функцию, была построена автором в [29]. Она представляет наиболее общий известный однократный интеграл, обобщающий бета-интеграл Эйлера [1]. Этот эллиптический бета-интеграл служит основой для построения общих совершенно уравновешенных эллиптических гипергеометрических функций. Первое направление обобщения состоит в увеличении числа свободных параметров, входящих в подынтегральное выражение, что приводит к эллиптическим аналогам функций ${}_{s+1}F_s$ [11], [30]. В частности, таким способом строится эллиптический аналог гипергеометрической функции Гаусса и вводятся его свойства [31]. Второе направление обобщения увеличивает кратно-

сти интегрирований так, что подынтегральные функции приобретают симметрии по переменным интегрирования, связанные с корневыми системами [11], [32]–[36]. Одно из таких обобщений приводит к эллиптическому аналогу интеграла Сельберга. За короткий период времени в работах, упомянутых выше и перечисленных ниже в списке литературы, была построена систематическая теория эллиптических гипергеометрических функций одной и многих переменных. Краткому описанию этой теории и посвящен настоящий обзор.

2. Обобщенные гамма-функции

Используемые символы: $\mathbb{Z} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $\mathbb{C}$ – открытая комплексная плоскость; $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/\{0\}$; $\mathbb{R}$ – действительная ось; $i = \sqrt{-1}$.

2.1. Многократная гамма-функция Барнса. Гамма-функция Эйлера является краеугольным камнем теории обычных гипергеометрических функций [1]. Различные аналоги этой функции со многими параметрами рассматривались в математической литературе начала двадцатого века. Наиболее полные исследования обобщенных гамма-функций принадлежат Барнсу [13]. Отправной точкой в его работе служит функция, обобщающая дзета-функцию Гурвица [1]

$$\zeta(s, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(u+n)^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1,$$

которая сводится к дзета-функции Римана при $u = 1$. Ввиду возросшего интереса теория Барнса достаточно широко обсуждалась недавно в литературе, например в [19], [26]–[28], [37].

Рассмотрим m квазипериодов $\omega_j \in \mathbb{C}$, которые для простоты будем считать линейно независимыми над $\mathbb{Z}$ (условие несоизмеримости). Для $s, u \in \mathbb{C}$ дзета-функция Барнса определяется m -кратным рядом

$$\zeta_m(s, u; \boldsymbol{\omega}) = \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} \frac{1}{(u + \Omega)^s}, \quad \Omega = n_1\omega_1 + \dots + n_m\omega_m,$$

сходящимся при $\operatorname{Re}(s) > m$ и при условии, что все ω_j лежат в одной полуплоскости, определяемой какой-либо прямой, проходящей через начало координат. Благодаря последнему требованию, последовательности $n_1\omega_1 + \dots + n_m\omega_m$ не имеют точек накопления в конечной плоскости при каких-либо $n_j \rightarrow +\infty$. Удобно считать, для определенности, что $\operatorname{Re}(\omega_j) > 0$ или $\operatorname{Im}(\omega_j) > 0$.

Функция $\zeta_m(s, u; \boldsymbol{\omega})$ удовлетворяет следующему набору конечно-разностных уравнений:

$$\zeta_m(s, u + \omega_j; \boldsymbol{\omega}) - \zeta_m(s, u; \boldsymbol{\omega}) = -\zeta_{m-1}(s, u; \boldsymbol{\omega}(j)), \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.1)$$

где $\boldsymbol{\omega}(j) = (\omega_1, \dots, \omega_{j-1}, \omega_{j+1}, \dots, \omega_m)$ и $\zeta_0(s, u; \boldsymbol{\omega}) = u^{-s}$. Она может быть аналитически (мероморфно) продолжена на всю комплексную плоскость $\operatorname{Re}(s) \leq m$ с простыми полюсами в точках $s = 1, 2, \dots, m$. Многократная гамма-функция Барнса определяется равенством

$$\Gamma_m(u; \boldsymbol{\omega}) = \exp\left(\frac{\partial \zeta_m(s, u; \boldsymbol{\omega})}{\partial s}\right)\Big|_{s=0}.$$

Она имеет представление в виде бесконечного произведения

$$\frac{1}{\Gamma_m(u; \omega)} = e^{\sum_{k=0}^m \gamma_{mk} \frac{u^k}{k!}} u \prod_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} \left(1 + \frac{u}{\Omega}\right) e^{\sum_{k=1}^m (-1)^k \frac{u^k}{k \Omega^k}}, \quad (2.2)$$

где γ_{mk} – некоторые постоянные, аналогичные постоянной Эйлера. Штрих произведения означает, что точка $n_1 = \dots = n_m = 0$ в нем пропущена. В частности, функция $\Gamma_1(u; \omega)$ прямым образом связана с гамма-функцией Эйлера $\Gamma(u)$:

$$\Gamma_1(u; \omega) = \frac{\omega^{u/\omega}}{\sqrt{2\pi\omega}} \Gamma\left(\frac{u}{\omega}\right),$$

в чем можно убедиться непосредственными манипуляциями с дзета-функций Гурвица. Отметим, что в [13] Барнс использовал другую нормировку Γ_m -функции, в которой $\gamma_{m0} = 0$.

Функция $\Gamma_m(u; \omega)$ удовлетворяет m конечно-разностным уравнениям первого порядка, получающимся дифференцированием равенств (2.1) в точке $s = 0$:

$$\Gamma_m(u + \omega_j; \omega) = \frac{1}{\Gamma_{m-1}(u; \omega(j))} \Gamma_m(u; \omega), \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

где $\Gamma_0(u; \omega) := u^{-1}$.

Хорошо известны интегральные представления для гамма-функции Эйлера:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt = \frac{i}{2 \sin(\pi s)} \int_{C_H} (-t)^{s-1} e^{-t} dt,$$

где в первом случае $\operatorname{Re}(s) > 0$, а во втором выражении $|\arg(-t)| < \pi$ и ганкелевский контур C_H начинается и заканчивается вблизи точки $+\infty$, огибая полюс $[0, \infty)$ против часовой стрелки. С их помощью можно записать

$$\begin{aligned} \zeta_m(s, u; \omega) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1} e^{-ut}}{\prod_{k=1}^m (1 - e^{-\omega_k t})} dt \\ &= \frac{i\Gamma(1-s)}{2\pi} \int_{C_H} \frac{(-t)^{s-1} e^{-ut}}{\prod_{k=1}^m (1 - e^{-\omega_k t})} dt \end{aligned}$$

и аналитически продолжить эту функцию по s на всю комплексную плоскость. Используя последнее выражение, Барнс получил для многократных гамма-функций следующее интегральное представление:

$$\Gamma(u; \omega) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_H} \frac{e^{-ut} (\log(-t) + \gamma)}{t \prod_{k=1}^m (1 - e^{-\omega_k t})} dt\right), \quad (2.4)$$

где γ – постоянная Эйлера.

Значения $\zeta_m(0, u; \omega)$ выражаются через многократные многочлены Бернулли,

$$\zeta_m(0, u; \omega) = \frac{(-1)^m}{m!} B_{m,m}(u \mid \omega),$$

которые определяются производящей функцией

$$\frac{x^m e^{xu}}{\prod_{k=1}^m (e^{\omega_k x} - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{m,n}(u \mid \omega_1, \dots, \omega_m) \frac{x^n}{n!}. \quad (2.5)$$

Нам потребуются в дальнейшем первые три диагональных многочлена

$$\begin{aligned} B_{1,1}(u \mid \omega_1) &= \frac{u}{\omega_1} - \frac{1}{2}, \\ B_{2,2}(u \mid \omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \left(u^2 - (\omega_1 + \omega_2)u + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{6} + \frac{\omega_1 \omega_2}{2} \right), \\ B_{3,3}(u \mid \omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \left(u^3 - \frac{3u^2}{2} \sum_{k=1}^3 \omega_k + \frac{u}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \omega_k^2 + 3 \sum_{j < k} \omega_j \omega_k \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^3 \omega_k \right) \sum_{j < k} \omega_j \omega_k \right). \end{aligned}$$

Теория обычных гипергеометрических функций строится с помощью гамма-функции Эйлера или $\Gamma_1(u; \omega_1)$; q -гипергеометрические функции привязаны к $\Gamma_2(u; \omega_1, \omega_2)$, а эллиптические гипергеометрические функции “живут” на уровне многократной гамма-функции Барнса третьего порядка соответственно.

2.2. Эллиптические гамма-функции. Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ обозначают комплексные параметры, линейно независимые над $\mathbb{Z}$ и лежащие в правой полуплоскости. Определим с их помощью базисные переменные $p, q, r \in \mathbb{C}$:

$$q = e^{2\pi i \omega_1 / \omega_2}, \quad p = e^{2\pi i \omega_3 / \omega_2}, \quad r = e^{2\pi i \omega_3 / \omega_1}, \quad (2.6)$$

и их модулярно ($\tau \rightarrow -1/\tau$) преобразованных партнеров:

$$\tilde{q} = e^{-2\pi i \omega_2 / \omega_1}, \quad \tilde{p} = e^{-2\pi i \omega_2 / \omega_3}, \quad \tilde{r} = e^{-2\pi i \omega_1 / \omega_3}. \quad (2.7)$$

При $|p|, |q| < 1$ бесконечные произведения

$$(z; q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - zq^j), \quad (z; p, q)_\infty = \prod_{j,k=0}^{\infty} (1 - zp^j q^k)$$

определены и удовлетворяют q -разностным уравнениям

$$\begin{aligned} (qz; q)_\infty &= \frac{(z; q)_\infty}{1 - z}, \\ (qz; q, p)_\infty &= \frac{(z; q, p)_\infty}{(z; p)_\infty}, \quad (pz; q, p)_\infty = \frac{(z; q, p)_\infty}{(z; q)_\infty}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Укороченная тэта-функция

$$\theta(z; p) := (z; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty = \frac{1}{(p; p)_\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p^{k(k-1)/2} z^k \quad (2.9)$$

играет ключевую роль в наших рассуждениях. Она обладает следующими простыми преобразованиями симметрии:

$$\theta(pz; p) = \theta(z^{-1}; p) = -z^{-1} \theta(z; p), \quad (2.10)$$

и имеет нули, $\theta(z; p) = 0$, при $z = p^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что $\theta(z; 0) = 1 - z$. Для $k > 0$ имеем

$$\theta(p^k z; p) = \frac{\theta(z; p)}{(-z)^k p^{\binom{k}{2}}}, \quad \theta(p^{-k} z; p) = \frac{(-z)^k \theta(z; p)}{p^{\binom{k+1}{2}}}.$$

Нам потребуется правило $\tau \rightarrow -1/\tau$ модулярного преобразования $\theta(z; p)$, для описания которого необходимо воспользоваться экспоненциальной параметризацией переменных:

$$\theta(e^{-2\pi i u/\omega_1}; e^{-2\pi i \omega_2/\omega_1}) = e^{\pi i B_{2,2}(u|\omega_1, \omega_2)} \theta(e^{2\pi i u/\omega_2}; e^{2\pi i \omega_1/\omega_2}), \quad (2.11)$$

где $B_{2,2}(u | \omega_1, \omega_2)$ – второй многочлен Бернулли. В дальнейшем удобно использовать компактные обозначения

$$\theta(a_1, \dots, a_k; p) := \theta(a_1; p) \cdots \theta(a_k; p), \quad \theta(at^{\pm 1}; p) := \theta(at; p) \theta(at^{-1}; p).$$

Простейшую гамма-функцию можно определить как специальное мероморфное решение функционального уравнения $f(u + \omega_1) = u f(u)$. Следуя подходу Джексона [14], мы будем связывать q -гамма-функции с мероморфными решениями уравнения

$$f(u + \omega_1) = (1 - e^{2\pi i u/\omega_2}) f(u), \quad (2.12)$$

где $q = e^{2\pi i \omega_1/\omega_2}$. Вводя переменную $z = e^{2\pi i u/\omega_2}$, это уравнение можно заменить на $f(qz) = (1 - z)f(z)$. При $|q| < 1$ его частное решение, аналитическое в точке $z = 0$, находится простой итерацией, что дает стандартную q -гамма-функцию $\gamma_q(z) = 1/(z; q)_\infty$ (которую можно рассматривать также как q -экспоненциальную функцию [3]). Это выражение отличается от q -гамма-функции Джексона

$$\Gamma_q^{(J)}(u) = \frac{(q; q)_\infty}{(q^u; q)_\infty} (1 - q)^{1-u}, \quad (2.13)$$

удовлетворяющей уравнению $\Gamma_q^{(J)}(u+1)/\Gamma_q^{(J)}(u) = (1-q^u)/(1-q)$, заменой аргумента и простым множителем. Предельный переход к обычной гамма-функции имеет вид $\lim_{q \rightarrow 1} \Gamma_q^{(J)}(u) = \Gamma(u)$ [1], [3], однако для упрощения q -гипергеометрических формул удобнее пользоваться функцией $\gamma_q(z)$.

Модифицированная q -гамма-функция, которая остается корректно определенной и при $|q| = 1$, имеет вид

$$\gamma(u; \omega_1, \omega_2) = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}+i0} \frac{e^{ux}}{(1 - e^{\omega_1 x})(1 - e^{\omega_2 x})} \frac{dx}{x}\right), \quad (2.14)$$

где контур $\mathbb{R} + i0$ проходит по действительной оси, огибая сверху точку $x = 0$ инфинитезимальным образом. Эта функция появлялась в теории чисел [15] и в теории интегрируемых систем [17]–[19]. Она фигурирует в литературе под различными именами: “двойной синус” [16], “некомпактный квантовый дилогарифм” [21], “гиперболическая гамма-функция” [18].

Пусть $\text{Re}(\omega_1), \text{Re}(\omega_2) > 0$. Тогда интеграл (2.14) сходится при $0 < \text{Re}(u) < \text{Re}(\omega_1 + \omega_2)$. При подходящих ограничениях на u и $\omega_{1,2}$ интеграл (2.14) может

быть вычислен как сходящаяся сумма вычетов полюсов в верхней полуплоскости. При $\text{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$ это приводит к выражению

$$\gamma(u; \omega_1, \omega_2) = \frac{(e^{2\pi i u/\omega_1} \tilde{q}; \tilde{q})_\infty}{(e^{2\pi i u/\omega_2}; q)_\infty}, \quad (2.15)$$

которое аналитически продолжается на всю комплексную плоскость u (это выражение очевидным образом удовлетворяет уравнению (2.12)). Данная q -гамма-функция служит главным “кирпичиком” при построении аналитических q -гипергеометрических функций при $|q| = 1$, которые не рассматривались в литературе до недавнего времени.

Модифицированная q -гамма-функция пропорциональна отношению двух гамма-функций Барнса второго порядка. Общее соотношение такого типа выводится с помощью интегрального представления (2.4) и имеет вид [27]

$$\exp\left(-\int_{\mathbb{R}+i0} \frac{e^{ux}}{\prod_{k=1}^m (e^{\omega_k x} - 1)} \frac{dx}{x}\right) = e^{\frac{\pi i}{m} B_{m,m}(u|\omega)} \frac{\Gamma_m(u; \omega)^{(-1)^m}}{\Gamma_m(\sum_{k=1}^m \omega_k - u; \omega)},$$

где $\text{Re}(\omega_k) > 0$ и $0 < \text{Re}(u) < \text{Re}(\sum_{k=1}^m \omega_k)$. В [27] также были получены представления этих функций в виде бесконечных произведений, аналогичных (2.15), которые мы не приводим.

Еще в работах Барнса было отмечено, что $\theta_1(u | \tau)$ -функция Якоби может быть разложена на произведение четырех многократных гамма-функций второго порядка с различными аргументами. Точная форма такого соотношения имеет вид (см., например, [26])

$$\theta(e^{2\pi i u}; p) = \frac{e^{-\pi i B_{2,2}(u|1, \tau)}}{\Gamma_2(u; 1, \tau) \Gamma_2(1 + \tau - u; 1, \tau) \Gamma_2(u - \tau; 1, -\tau) \Gamma_2(1 - u; 1, -\tau)}, \quad (2.16)$$

где $p = e^{2\pi i \tau}$. Общая связь между многократными гамма-функциями и бесконечными произведениями джексоновского типа имеет вид [26]

$$\prod_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} (1 - e^{2\pi i(u+\Omega)}) = \frac{e^{-\pi i \zeta_{m+1}(0, u; 1, \alpha)}}{\Gamma_{m+1}(u; 1, \alpha) \Gamma_{m+1}(1 - u; 1, -\alpha)},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\Omega = n_1 \alpha_1 + \dots + n_m \alpha_m$ и $\text{Im}(\alpha_j) > 0$.

Следуя логике определения q -гамма-функций, мы связываем эллиптические гамма-функции с мероморфными решениями разностного уравнения

$$f(u + \omega_1) = \theta(e^{2\pi i u/\omega_2}; p) f(u), \quad (2.17)$$

переходящего в (2.12) при $p \rightarrow 0$. Пользуясь факторизацией (2.9) и равенствами (2.8), нетрудно убедиться, что отношение

$$\Gamma(z; p, q) = \frac{(pqz^{-1}; p, q)_\infty}{(z; p, q)_\infty} = \prod_{j,k=0}^{\infty} \frac{1 - z^{-1} p^{j+1} q^{k+1}}{1 - z p^j q^k}, \quad (2.18)$$

где $|p|, |q| < 1$ и $z \in \mathbb{C}^*$, удовлетворяет уравнениям

$$\Gamma(qz; p, q) = \theta(z; p) \Gamma(z; p, q), \quad \Gamma(pz; p, q) = \theta(z; q) \Gamma(z; p, q). \quad (2.19)$$

Таким образом, функция $f(u) = \Gamma(e^{2\pi i u/\omega_2}; p, q)$ определяет решение уравнения (2.17) при $|q|, |p| < 1$ и называется (стандартной) эллиптической гамма-функцией [18]. Так как не существует нетривиальных трижды периодических функций, ее можно однозначно определить как мероморфное решение системы трех уравнений:

$$f(u + \omega_2) = f(u), \quad f(u + \omega_3) = \theta(e^{2\pi i u/\omega_2}; q)f(u)$$

и уравнения (2.17) с нормировкой решения $f(\sum_{k=1}^3 \omega_k/2) = 1$. Формула отражения для этой обобщенной гамма-функции имеет вид $\Gamma(z; p, q)\Gamma(pq/z; p, q) = 1$. При $p = 0$ имеем $\Gamma(z; 0, q) = \gamma_q(z)$.

Модифицированная эллиптическая гамма-функция, корректно определенная и при $|q| = 1$, имеет вид [11]

$$G(u; \omega) = \Gamma(e^{2\pi i u/\omega_2}; p, q)\Gamma(re^{-2\pi i u/\omega_1}; \tilde{q}, r). \quad (2.20)$$

Она определяет однозначное решение трех уравнений:

$$f(u + \omega_2) = \theta(e^{2\pi i u/\omega_1}; r)f(u), \quad f(u + \omega_3) = e^{-\pi i B_{2,2}(u|\omega)}f(u)$$

и уравнения (2.17) с нормировкой решения $f(\sum_{k=1}^3 \omega_k/2) = 1$.

Нетрудно проверить [38], что функция

$$G(u; \omega) = e^{-\frac{\pi i}{3} B_{3,3}(u|\omega)}\Gamma(e^{-2\pi i u/\omega_3}; \tilde{r}, \tilde{p}), \quad (2.21)$$

где $|\tilde{p}|, |\tilde{r}| < 1$, удовлетворяет тем же самым трем уравнениям и нормировке, что и (2.20). Поэтому эти функции совпадают, и их равенство составляет один из законов модулярных преобразований для эллиптической гамма-функции, связанный с $SL(3; \mathbb{Z})$ -группой [25]. Из выражения (2.21) следует, что $G(u; \omega)$ является мероморфной функцией u при $\omega_1/\omega_2 > 0$, т.е. $|q| = 1$.

Благодаря соотношению $B_{3,3}(\sum_{k=1}^3 \omega_k - u | \omega) = -B_{3,3}(u | \omega)$, формула отражения для G -функции имеет вид $G(a; \omega)G(b; \omega) = 1$, $a + b = \sum_{k=1}^3 \omega_k$. При $|q| < 1$ в пределе $p, r \rightarrow 0$ (т.е. $\text{Im}(\omega_3/\omega_1), \text{Im}(\omega_3/\omega_2) \rightarrow +\infty$) выражение (2.20) очевидным образом переходит в модифицированную q -гамма-функцию $\gamma(u; \omega_1, \omega_2)$. Представление (2.21) дает альтернативный способ редукции к этой функции (такой предельный переход строго обоснован другим способом в [18]). Как следует из результатов [28], для определенной области значений параметров функция $G(u; \omega)$ сходится в этом пределе к $\gamma(u; \omega_1, \omega_2)$ экспоненциально быстро и равномерно на компактных подмножествах этой области. Этот результат важен для строгого обоснования соответствующего вырождения эллиптических гипергеометрических интегралов.

Воспользовавшись факторизацией тэта-функции (2.16), можно рассмотреть уравнение (2.17) как композицию четырех уравнений для $\Gamma_3(u; \omega)$ с различными аргументами и квазипериодами. Это позволяет представить эллиптическую гамма-функцию как отношение четырех гамма-функций Барнса третьего порядка [26]

$$\Gamma(e^{2\pi i u}; e^{2\pi i \tau}, e^{2\pi i \sigma}) = \frac{e^{-\frac{\pi i}{3} B_{3,3}(u|1, \sigma, \tau)}\Gamma_3(u; 1, \sigma, \tau)\Gamma_3(1 - u; 1, -\sigma, -\tau)}{\Gamma_3(1 + \sigma + \tau - u; 1, \sigma, \tau)\Gamma_3(u - \sigma - \tau; 1, -\sigma, -\tau)}.$$

При $0 < \text{Im}(u) < \text{Im}(\tau + \sigma)$ имеет место представление

$$\Gamma(e^{2\pi i u}, e^{2\pi i \tau}, e^{2\pi i \sigma}) = \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k(2u - \tau - \sigma))}{k \sin(\pi k \tau) \sin(\pi k \sigma)}\right),$$

через которое эллиптическая гамма-функция появилась в скрытой форме в работе Бакстера по восьмивершинной модели [6] (см. также [5], [25]).

3. Эллиптический бета-интеграл

В качестве первого примера эллиптических гипергеометрических функций опишем эллиптический бета-интеграл, открытый автором в [29].

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим шесть комплексных параметров t_j , $j = 1, \dots, 6$, и две базисные переменные p и q , удовлетворяющие ограничениям $|p|, |q|, |t_j| < 1$ и $\prod_{j=1}^6 t_j = pq$ (условие балансировки). Тогда справедливо равенство*

$$\kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{j=1}^6 \Gamma(t_j z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz}{z} = \prod_{1 \leq j < k \leq 6} \Gamma(t_j t_k; p, q), \quad (3.1)$$

где $\mathbb{T}$ обозначает положительно ориентированную единичную окружность и

$$\kappa = \frac{(p; p)_{\infty} (q; q)_{\infty}}{4\pi i}.$$

Здесь и ниже мы пользуемся компактными обозначениями

$$\begin{aligned} \Gamma(a_1, \dots, a_k; p, q) &:= \Gamma(a_1; p, q) \cdots \Gamma(a_k; p, q), \\ \Gamma(tz^{\pm 1}; p, q) &:= \Gamma(tz; p, q) \Gamma(tz^{-1}; p, q), \quad \Gamma(z^{\pm 2}; p, q) := \Gamma(z^2; p, q) \Gamma(z^{-2}; p, q). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем переменные $z, q, p \in \mathbb{C}$, $|q|, |p| < 1$, и пять комплексных параметров t_m , $m = 1, \dots, 5$, и составим функцию

$$\rho(z, t_1, \dots, t_5) = \frac{\prod_{m=1}^5 \Gamma(t_m z^{\pm 1}, A t_m^{-1}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}, A z^{\pm 1}; p, q) \prod_{1 \leq m < s \leq 5} \Gamma(t_m t_s; p, q)}, \quad (3.2)$$

где $A = \prod_{m=1}^5 t_m$. Эта функция имеет последовательности полюсов, сходящихся к нулю по точкам

$$\mathcal{P} = \{t_m q^a p^b, A^{-1} q^{a+1} p^{b+1}\}_{m=1, \dots, 5, a, b=0, 1, \dots}$$

и уходящих на бесконечность по их $z \rightarrow 1/z$ отражениям $\mathcal{P}^{-1}$. Обозначим через C положительно ориентированный контур на комплексной плоскости, разделяющий множества $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^{-1}$ (существование такого контура – единственное ограничение на параметры t_m). Например, при $|t_m| < 1$, $|pq| < |A|$ контур C может совпадать с единичной окружностью $\mathbb{T}$. Докажем теперь, что

$$\int_C \rho(z, t_1, \dots, t_5) \frac{dz}{z} = \frac{4\pi i}{(q; q)_{\infty} (p; p)_{\infty}}, \quad (3.3)$$

откуда необходимая формула будет следовать после подстановки $A = pq/t_6$.

Первый шаг состоит в выводе следующего q -разностного уравнения для ядра:

$$\rho(z, qt_1, t_2, \dots, t_5) - \rho(z, t_1, \dots, t_5) = g(q^{-1}z, t_1, \dots, t_5) - g(z, t_1, \dots, t_5), \quad (3.4)$$

где

$$g(z, t_1, \dots, t_5) = \rho(z, t_1, \dots, t_5) \frac{\prod_{m=1}^5 \theta(t_m z; p)}{\prod_{m=2}^5 \theta(t_1 t_m; p)} \frac{\theta(t_1 A; p)}{\theta(z^2, Az; p)} \frac{t_1}{z}. \quad (3.5)$$

После деления уравнения (3.4) на $\rho(z, t_1, \dots, t_5)$, оно принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(t_1 z, t_1 z^{-1}; p)}{\theta(Az, Az^{-1}; p)} \prod_{m=2}^5 \frac{\theta(At_m^{-1}; p)}{\theta(t_1 t_m; p)} - 1 \\ &= \frac{t_1 \theta(t_1 A; p)}{z \theta(z^2; p) \prod_{m=2}^5 \theta(t_1 t_m; p)} \left(\frac{z^4 \prod_{m=1}^5 \theta(t_m z^{-1}; p)}{\theta(Az^{-1}; p)} - \frac{\prod_{m=1}^5 \theta(t_m z; p)}{\theta(Az; p)} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обе стороны этого равенства определяют эллиптические функции $\log z$ (т. е. они инвариантны относительно замены $z \rightarrow pz$) с одинаковыми множествами полюсов и вычетами в них. Например,

$$\lim_{z \rightarrow A} \theta(Az^{-1}; p) \left(\begin{array}{c} \text{левая} \\ \text{часть} \end{array} \right) = \frac{\theta(t_1 A, t_1 A^{-1}; p)}{\theta(A^2; p)} \prod_{m=2}^5 \frac{\theta(At_m^{-1}; p)}{\theta(t_1 t_m; p)},$$

с таким же результатом для правой части. Поэтому разность выражений в двух частях равенства (3.6) определяет эллиптическую функцию без полюсов, т. е. постоянную. Эта постоянная равна нулю, так как уравнение (3.6) проверяется тривиальным образом при выборе $z = t_1$.

Теперь мы интегрируем (3.4) по переменной $z \in C$ и получаем

$$I(qt_1, t_2, \dots, t_5) - I(t_1, \dots, t_5) = \left(\int_{q^{-1}C} - \int_C \right) g(z, t_1, \dots, t_5) \frac{dz}{z}, \quad (3.7)$$

где $I(t_1, \dots, t_5) = \int_C \rho(z, t_1, \dots, t_5) \frac{dz}{z}$, а $q^{-1}C$ обозначает контур C , растянутый относительно точки $z = 0$ множителем q^{-1} . Функция (3.5) имеет последовательности полюсов, сходящиеся к нулю по точкам $z = \{t_m q^a p^b, A^{-1} q^a p^{b+1}\}$ и уходящие на бесконечность при $z = \{t_m^{-1} q^{-a-1} p^{-b}, A q^{-a-1} p^{-b-1}\}$ для $m = 1, \dots, 5$ и $a, b = 0, 1, \dots$. Для $C = \mathbb{T}$ видно, что при $|t_m| < 1$ и $|p| < |A|$ в кольце $1 \leq |z| \leq |q|^{-1}$ нет полюсов. Поэтому в (3.7) мы можем деформировать $q^{-1}\mathbb{T}$ в $\mathbb{T}$ и получить нуль в правой части. В результате $I(qt_1, t_2, \dots, t_5) = I(t_1, \dots, t_5)$.

Потребовав $|p|, |q| < |A|$, по симметрии между p и q имеем $I(pt_1, t_2, \dots, t_5) = I(t_1, \dots, t_5)$. Дальнейшие замены $t_1 \rightarrow q^{\pm 1} t_1$ и $t_1 \rightarrow p^{\pm 1} t_1$ могут быть произведены, только если они не выводят параметры за пределы кольца аналитичности функции $I(t_1, \dots, t_5)$.

Временно предположим, что p и q действительны, $p < q$ и $p^n \neq q^k$ для любых $n, k = 0, 1, \dots$. Наложим также условие, что аргументы $t_m^{\pm 1}$, $m = 1, \dots, 5$, и $A^{\pm 1}$ отличаются друг от друга. Пусть теперь C будет контуром, содержащим

внутри себя $\mathcal{P}$ и два отрезка $c_1 = [t_1, t_1 p^2]$, $c_2 = [(pq/A)p^{-2}, pq/A]$ и исключаящим их $z \rightarrow 1/z$ партнеров. Тогда мы будем проводить преобразования $t_1 \rightarrow t_1 q^k$, $k = 1, 2, \dots$, до тех пор пока $t_1 q^k$ не войдет в интервал $[t_1 p, t_1 p^2]$, после чего делаем замену $t_1 \rightarrow t_1 p^{-1}$; это не выводит необходимые параметры за интервалы c_1 или c_2 . Таким образом, мы получим $I(q^j p^{-k} t_1, t_2, \dots, t_5) = I(t_1, \dots, t_5)$ для всех $j, k = 0, 1, 2, \dots$ таких, что $q^j p^{-k} \in [1, p]$. Поскольку такое множество точек плотно, мы приходим к выводу, что I не зависит от t_1 и по симметрии от всех t_m .

Альтернативно, мы можем воспользоваться p -разложением $I(t_1, \dots, t_5) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(t_1, \dots, t_5) p^n$ и проверить равенства $I_n(qt_1, \dots, t_5) = I_n(t_1, \dots, t_5)$ почленно. Коэффициенты I_n аналитичны по параметрам вблизи точек $t_m = 0$ (ограничения на абсолютные значения параметров снизу возникают только из требования сходимости p -разложения). Поэтому мы можем итерировать растяжения $t_1 \rightarrow qt_1$ до достижения предельной точки. В результате, I_n и сам интеграл I не зависят от t_1 и, следовательно, от любого из t_m .

Итак, интеграл I есть постоянная, зависящая только от p и q . Для того чтобы найти ее значение, равное правой части (3.3), достаточно рассмотреть предел параметров $t_1 t_2 \rightarrow 1$. В этом случае два полюса приближаются к контуру интегрирования и необходимо деформировать этот контур так, чтобы пересечь их. При этом оказывается, что в пределе $t_1 t_2 \rightarrow 1$ только вычеты полюсов имеют конечное значение, а сам интеграл обращается в нуль. (Более подробно эта процедура описана ниже.) После доказательства формулы интегрирования в ограниченной области значений параметров ее можно аналитически продолжить в область, допускаемую контуром интегрирования C .

Существует множество способов вырождения эллиптического бета-интеграла. В простейшем случае необходимо подставить $t_6 = pq/(t_1 \cdots t_5)$, воспользоваться формулой отражения для $\Gamma(z; p, q)$ и перейти к пределу $p \rightarrow 0$. При этом эллиптический бета-интеграл переходит в “тригонометрический” q -бета-интеграл Рахмана [39] (связанный с интегральным представлением для ${}_8\varphi_7$ -ряда [40]):

$$\begin{aligned} & \frac{(q; q)_{\infty}}{4\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{(z^2; q)_{\infty} (z^{-2}; q)_{\infty} (Az; q)_{\infty} (Az^{-1}; q)_{\infty}}{\prod_{m=1}^5 (t_m z; q)_{\infty} (t_m z^{-1}; q)_{\infty}} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{\prod_{m=1}^5 (A t_m^{-1}; q)_{\infty}}{\prod_{1 \leq m < s \leq 5} (t_m t_s; q)_{\infty}}, \end{aligned}$$

где $A = \prod_{m=1}^5 t_m$, $|t_m| < 1$. Дальнейшее упрощение этого равенства переходом к пределу $t_5 \rightarrow 0$ приводит к знаменитому интегралу Аски–Вильсона

$$\frac{(q; q)_{\infty}}{4\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{(z^2; q)_{\infty} (z^{-2}; q)_{\infty}}{\prod_{m=1}^4 (t_m z; q)_{\infty} (t_m z^{-1}; q)_{\infty}} \frac{dz}{z} = \frac{(t_1 t_2 t_3 t_4; q)_{\infty}}{\prod_{1 \leq m < s \leq 4} (t_m t_s; q)_{\infty}},$$

служащему мерой для многочленов Аски–Вильсона [41] – наиболее общих ортогональных многочленов, обладающих классическими свойствами. Первое доказательство формулы (3.1) было основано на эллиптическом расширении подхода Аски [42] к вычислению интеграла Рахмана. Здесь мы представили

доказательство, полученное в работе [43], которое обобщает метод вычисления интеграла Аски–Вильсона из [44].

Если в приведенных q -бета-интегралах выразить бесконечные произведения $(a; q)_\infty$ через q -гамма-функцию Джексона и перейти к пределу $q \rightarrow 1$, то появятся “рациональные” бета-интегралы по некомпактным контурам, содержащие обычную гамма-функцию Эйлера [1]. Их дальнейшее упрощение специальным выбором параметров приводит к классическому бета-интегралу Эйлера

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

Таким образом, эллиптический бета-интеграл (3.1) дает самую общую (из известных) точную формулу однократного интегрирования, включающую в себя бета-интеграл Эйлера как частный случай.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Справедлива следующая формула суммирования Френкеля–Тураева [8]:*

$$\sum_{n=0}^N \frac{\theta(t_5^2 q^{2n}; p)}{\theta(t_5^2; p)} \prod_{m=0}^5 \frac{\theta(t_m t_5)_n}{\theta(q t_m^{-1} t_5)_n} q^n = \frac{\theta(q t_5^2, q/(t_1 t_2), q/(t_1 t_3), q/(t_2 t_3))_N}{\theta(q/(t_1 t_2 t_3 t_5), q t_5/t_1, q t_5/t_2, q t_5/t_3)_N}, \quad (3.8)$$

где $t_4 t_5 = q^{-N}$, $\prod_{m=0}^5 t_m = q$ и использовано компактное обозначение

$$\theta(t_1, \dots, t_k)_n := \prod_{j=1}^k \theta(t_j)_n$$

для произведений эллиптического символа Похгаммера

$$\theta(t)_n = \prod_{j=0}^{n-1} \theta(t q^j; p) = \frac{\Gamma(t q^n; p, q)}{\Gamma(t; p, q)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменим в интеграле (3.1) $\mathbb{T}$ на контур C , отделяющий последовательности полюсов $z = t_j q^a p^b$, $j = 1, \dots, 6$, $a, b = 0, 1, 2, \dots$, сходящихся к нулю, от их $z \rightarrow 1/z$ партнеров, стремящихся к бесконечности. Это позволяет снять ограничения $|t_j| < 1$ без изменения правой части (3.1). Подставим теперь $t_6 = pq/A$, $A = \prod_{m=1}^5 t_m$, и предположим, что $|t_m| < 1$, $m = 1, \dots, 4$, $|p t_5| < 1 < |t_5|$, $|pq| < |A|$ и что аргументы t_m , $m = 1, \dots, 5$, и p, q линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Тогда справедливо следующее равенство [32]:

$$\kappa \int_C \Delta_E(z, \underline{t}) \frac{dz}{z} = \kappa \int_{\mathbb{T}} \Delta_E(z, \underline{t}) \frac{dz}{z} + c_0(\underline{t}) \sum_{|t_5 q^n| > 1, n \geq 0} \nu_n(\underline{t}), \quad (3.9)$$

где

$$\Delta_E(z, \underline{t}) = \prod_{m=1}^5 \Gamma(t_m z^{\pm 1}; p, q) / \Gamma(z^{\pm 2}, A z^{\pm 1}; p, q)$$

и

$$c_0(\underline{t}) = \frac{\prod_{m=1}^4 \Gamma(t_m t_5^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(t_5^{-2}, A t_5^{\pm 1}; p, q)}, \quad \nu_n(\underline{t}) = \frac{\theta(t_5^2 q^{2n}; p)}{\theta(t_5^2; p)} \prod_{m=0}^5 \frac{\theta(t_m t_5)_n}{\theta(q t_m^{-1} t_5)_n} q^n.$$

Здесь мы ввели новый параметр t_0 с помощью соотношения $\prod_{m=0}^5 t_m = q$. Множитель κ отсутствует в коэффициенте c_0 ввиду $\lim_{z \rightarrow 1} (1-z)\Gamma(z; p, q) = 1/((p; p)_\infty (q; q)_\infty)$ и удвоения числа вычетов (последнее вытекает из симметрии ядра $z \rightarrow z^{-1}$).

В пределе $t_5 t_4 \rightarrow q^{-N}$, $N = 0, 1, 2, \dots$, интеграл в левой части (3.9) (совпадающий с (3.1)) и множитель $c_0(t)$ перед суммой вычетов в правой части расходятся. При этом интеграл по единичной окружности $\mathbb{T}$ в правой части остается конечным. Разделив все члены на $c_0(t)$ и перейдя к предельному равенству, мы получаем формулу суммирования (3.8), которая впервые была получена в [8] совершенно иным способом.

Другие доказательства формулы (3.8) приведены в [3], [45]–[49]. При $p \rightarrow 0$ и фиксированных параметрах равенство (3.8) редуцируется к сумме Джексона для обрывающегося совершенно уравновешенного сбалансированного q -гипергеометрического ряда ${}_8\varphi_7$ [1]. Таким образом, левая часть формулы (3.8) представляет собой эллиптический аналог этого q -ряда.

Используя модифицированную эллиптическую гамма-функцию, нетрудно построить модифицированный эллиптический бета-интеграл [38], у которого один из базисных параметров может лежать на единичной окружности, скажем, $|q| = 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\text{Im}(\omega_1/\omega_2) \geq 0$, $\text{Im}(\omega_3/\omega_1) > 0$, $\text{Im}(\omega_3/\omega_2) > 0$ и шесть параметров $g_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, 6$, удовлетворяют ограничениям $\text{Im}(g_j/\omega_3) < 0$ и $\sum_{j=1}^6 g_j = \sum_{k=1}^3 \omega_k$. Тогда

$$\tilde{\kappa} \int_{-\omega_3/2}^{\omega_3/2} \frac{\prod_{j=1}^6 G(g_j \pm u; \omega)}{G(\pm 2u; \omega)} \frac{du}{\omega_2} = \prod_{1 \leq j < m \leq 6} G(g_j + g_m; \omega), \quad (3.10)$$

где

$$\tilde{\kappa} = -\frac{(q; q)_\infty (p; p)_\infty (r; r)_\infty}{2(\tilde{q}; \tilde{q})_\infty}.$$

Здесь интегрирование идет вдоль отрезка с граничными точками $-\omega_3/2$ и $\omega_3/2$ и используется соглашение $G(a \pm b; \omega) \equiv G(a + b; \omega)G(a - b; \omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя соотношение (2.21) в левую часть (3.10), получим

$$\tilde{\kappa} e^{\pi i a/3} \int_{-\omega_3/2}^{\omega_3/2} \frac{\prod_{j=1}^6 \Gamma(e^{-2\pi i (g_j \pm u)/\omega_3}; \tilde{r}, \tilde{p})}{\Gamma(e^{\mp 4\pi i u/\omega_3}; \tilde{r}, \tilde{p})} \frac{du}{\omega_2}, \quad (3.11)$$

где $a = 2B_{3,3}(0 | \omega) - 2 \sum_{j=1}^6 B_{3,3}(g_j | \omega)$. Ограничения на параметры позволяют использовать формулу (3.1) с подстановками

$$z \rightarrow e^{\frac{2\pi i}{\omega_3} u}, \quad t_j \rightarrow e^{-\frac{2\pi i}{\omega_3} g_j}, \quad p \rightarrow e^{-2\pi i \frac{\omega_1}{\omega_3}}, \quad q \rightarrow e^{-2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_3}},$$

что для (3.11) приводит к

$$\begin{aligned} & \frac{2\tilde{\kappa}\omega_3\omega_2^{-1}e^{\pi i a/3}}{(\tilde{r}; \tilde{r})_\infty(\tilde{p}; \tilde{p})_\infty} \prod_{1 \leq j < m \leq 6} \Gamma(e^{-2\pi i (g_j + g_m)/\omega_3}; \tilde{r}, \tilde{p}) \\ &= \frac{2\tilde{\kappa}\omega_3\omega_2^{-1}e^{\pi i (a+b)/3}}{(\tilde{r}; \tilde{r})_\infty(\tilde{p}; \tilde{p})_\infty} \prod_{1 \leq j < m \leq 6} G(g_j + g_m; \omega), \end{aligned}$$

где $b = \sum_{1 \leq j < m \leq 6} B_{3,3}(g_j + g_m \mid \omega)$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$a + b = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^3 \omega_k \right) \left(\sum_{k=1}^3 \omega_k^{-1} \right).$$

Поэтому при выборе

$$\tilde{\kappa}^{-1} = \frac{2\omega_3 e^{\frac{\pi i}{12} \left(\sum_{k=1}^3 \omega_k \right) \left(\sum_{k=1}^3 \omega_k^{-1} \right)}}{\omega_2(\tilde{r}; \tilde{r})_{\infty}(\tilde{p}; \tilde{p})_{\infty}}$$

получаем необходимый ответ. После применения закона модулярного преобразования для функции Дедекинда

$$e^{-\frac{\pi i}{12\tau}} (e^{-2\pi i/\tau}; e^{-2\pi i/\tau})_{\infty} = (-i\tau)^{1/2} e^{\frac{\pi i\tau}{12}} (e^{2\pi i\tau}; e^{2\pi i\tau})_{\infty} \quad (3.12)$$

к бесконечным произведениям, входящим в $\tilde{\kappa}$, получаем

$$\tilde{\kappa}^{-1} = -2 \sqrt{\frac{\omega_1}{i\omega_2}} \frac{e^{\frac{\pi i}{12} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)}}{(r; r)_{\infty}(p; p)_{\infty}}.$$

Еще одно применение соотношения (3.12) позволяет заменить экспоненциальную функцию отношением бесконечных произведений, что и приводит к необходимой форме κ .

Если взять предел $\text{Im}(\omega_3) \rightarrow \infty$ таким образом, что $p, r \rightarrow 0$, то модифицированный эллиптический бета-интеграл редуцируется к q -бета-интегралу типа Меллина–Барнса. Точнее, для $\omega_{1,2}$ таких, что $\text{Im}(\omega_1/\omega_2) \geq 0$ и $\text{Re}(\omega_1/\omega_2) > 0$, мы подставляем $g_6 = \sum_{k=1}^3 \omega_k - \mathcal{A}$, где $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^5 g_j$, и применяем формулу инверсии для $G(u; \omega)$. После этого мы полагаем $\omega_3 = it\omega_2$, $t \rightarrow +\infty$, и формально получаем

$$\int_{\mathbb{L}} \frac{\prod_{j=1}^5 \gamma(g_j \pm u; \omega)}{\gamma(\pm 2u, \mathcal{A} \pm u; \omega)} \frac{du}{\omega_2} = -2 \frac{(\tilde{q}; \tilde{q})_{\infty}}{(q; q)_{\infty}} \frac{\prod_{1 \leq j < m \leq 5} \gamma(g_j + g_m; \omega)}{\prod_{j=1}^5 \gamma(\mathcal{A} - g_j; \omega)}, \quad (3.13)$$

где $\gamma(u; \omega_1, \omega_2)$ обозначает модифицированную q -гамма-функцию, а интегрирование ведется вдоль прямой $\mathbb{L} \equiv i\omega_2\mathbb{R}$. При этом параметры должны удовлетворять ограничениям $\text{Re}(g_j/\omega_2) > 0$ и $\text{Re}((\mathcal{A} - \omega_1)/\omega_2) < 1$. Эта формула интегрирования представляет собой “гиперболический” аналог интеграла Рахмана; впервые она была доказана Стокманом в [50]. Из-за некомпактности контура интегрирования описанный метод вывода (3.13) строг при условии равномерной сходимости функции $G(u; \omega)$ к $\gamma(u; \omega_1, \omega_2)$, что следует из результатов, полученных Рэйнсом в [28]. Можно обосновать формулу (3.13) и методом, использованным выше для доказательства эллиптического бета-интеграла. Предельный переход $q \rightarrow 1$ приводит к тому же рациональному бета-интегралу, что и “тригонометрический” интеграл Рахмана.

Подытоживая сказанное в данном разделе, мы видим, что эллиптический бета-интеграл включает в себя целую иерархию точно вычисляемых интегралов: два типа q -бета-интегралов, рациональный класс бета-интегралов, ядра которых выражаются через гамма-функцию Эйлера, и классический бета-интеграл Эйлера. Эта схема отражает общую картину вырождений эллиптических гипергеометрических функций, строго рассмотренную в [28].

4. Общие эллиптические гипергеометрические ряды и интегралы

В работах [10] и [11] автор предложил определения общих эллиптических гипергеометрических рядов и интегралов, которые и будут рассмотрены в данном разделе.

4.1. Эллиптический аналог функции Мейера. Однократные контурные интегралы $\int_C \Delta(u) du$ называются эллиптическими гипергеометрическими интегралами, если мероморфная функция $\Delta(u)$ удовлетворяет следующей системе трех уравнений:

$$\Delta(u + \omega_k) = h_k(u)\Delta(u), \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

где параметры $\omega_{1,2,3} \in \mathbb{C}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$, а $h_k(u)$ – некоторые эллиптические функции с периодами ω_k , ω_{k+1} (мы полагаем $\omega_{k+3} = \omega_k$).

Общая эллиптическая функция порядка s с периодами ω_2 и ω_3 может быть представлена в виде (см. приложение A)

$$h_1(u) = y_1 \prod_{j=1}^s \frac{\theta(t_j e^{2\pi i u / \omega_2}; p)}{\theta(w_j e^{2\pi i u / \omega_2}; p)},$$

где y_1 – произвольная постоянная, а t_j, w_j – параметры, удовлетворяющие условию балансировки $\prod_{j=1}^s t_j = \prod_{j=1}^s w_j$ (напомним, что $p = e^{2\pi i \omega_3 / \omega_2}$). Пользуясь свойствами функции $\Gamma(z; p, q)$, легко построить общее решение первого ($k = 1$) уравнения в (4.1) при $|q| < 1$:

$$\Delta(u) = y_1^{u/\omega_1} \varphi(u) \prod_{j=1}^s \frac{\Gamma(t_j z; p, q)}{\Gamma(w_j z; p, q)}, \quad z = e^{2\pi i u / \omega_2},$$

где $\varphi(u + \omega_1) = \varphi(u)$ – произвольная периодическая функция. Таким образом, если бы мы ограничились только одним уравнением для $\Delta(u)$, то наше определение интегралов было бы в значительной степени неоднозначным.

Произвольная эллиптическая функция порядка ℓ с периодами ω_1 и ω_3 имеет вид

$$h_2(u) = y_2 \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\theta(\tilde{t}_j e^{-2\pi i u / \omega_1}; r)}{\theta(\tilde{w}_j e^{-2\pi i u / \omega_1}; r)},$$

где $|r| < 1$, y_2 – произвольная постоянная, а параметры удовлетворяют соотношению $\prod_{j=1}^{\ell} \tilde{t}_j = \prod_{j=1}^{\ell} \tilde{w}_j$. Уравнение из (4.1) с $k = 2$ является теперь ограничением на функцию $\varphi(u)$. Легко доказать, что общее решение этих двух уравнений при $|q| < 1$ имеет вид

$$\Delta(u) = \phi(u) \prod_{j=1}^s \frac{\Gamma(t_j e^{2\pi i u / \omega_2}; p, q)}{\Gamma(w_j e^{2\pi i u / \omega_2}; p, q)} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\Gamma(\tilde{t}_j e^{-2\pi i u / \omega_1}; \tilde{q}, r)}{\Gamma(\tilde{w}_j e^{-2\pi i u / \omega_1}; \tilde{q}, r)}, \quad (4.2)$$

где $\phi(u)$ – произвольная функция, удовлетворяющая уравнениям $\phi(u + \omega_1) = y_1 \phi(u)$ и $\phi(u + \omega_2) = y_2 \phi(u)$. Таким образом, $\phi(u)$ есть мероморфная эта-функция со специальными множителями квазипериодичности, общий вид которой

легко установить (см. приложение A):

$$\phi(u) = e^{cu+d} \prod_{k=1}^m \frac{\theta(a_k e^{2\pi i u/\omega_2}; q)}{\theta(b_k e^{2\pi i u/\omega_2}; q)} = e^{cu+d} \prod_{k=1}^m \frac{\Gamma(pa_k e^{2\pi i u/\omega_2}, b_k e^{2\pi i u/\omega_2}; p, q)}{\Gamma(a_k e^{2\pi i u/\omega_2}, pb_k e^{2\pi i u/\omega_2}; p, q)},$$

где m – произвольное целое число, параметр d произволен, а параметры a_k, b_k, c связаны с y_1 и y_2 соотношениями $y_2 = e^{c\omega_2}$ и $y_1 = e^{c\omega_1} \prod_{k=1}^m b_k a_k^{-1}$.

Благодаря представлению через эллиптические гамма-функции, функцию $\phi(u)$ можно свести к чисто экспоненциальному множителю заменой s в $\Delta(u)$ на $s+2m$ и выбором параметров $t_{s+k} = pa_k$, $t_{s+m+k} = b_k$, $w_{s+k} = a_k$, $w_{s+m+k} = pb_k$, $k = 1, \dots, m$, что не нарушает условия балансировки $\prod_{j=1}^{s+2m} t_j = \prod_{j=1}^{s+2m} w_j$. Поскольку s было произвольным с самого начала, не ограничивая общности, можем считать $\phi(u) = e^{cu+d}$.

Таким образом, два уравнения уже фиксируют вид ядра $\Delta(u)$, т. е. для эллиптической функции $h_3(u)$ автоматически получаем

$$h_3(u) = e^{c\omega_3} \prod_{j=1}^s \frac{\theta(t_j e^{2\pi i u/\omega_2}; q)}{\theta(w_j e^{2\pi i u/\omega_2}; q)} \prod_{j=1}^\ell \frac{\theta(r^{-1} \tilde{w}_j e^{-2\pi i u/\omega_1}; \tilde{q})}{\theta(r^{-1} \tilde{t}_j e^{-2\pi i u/\omega_1}; \tilde{q})}.$$

Итак, при $|q| < 1$ наиболее общий эллиптический гипергеометрический интеграл имеет вид [11], [31]

$$\int_C e^{cu+d} \prod_{j=1}^s \frac{\Gamma(t_j e^{2\pi i u/\omega_2}; p, q)}{\Gamma(w_j e^{2\pi i u/\omega_2}; p, q)} \prod_{j=1}^\ell \frac{\Gamma(\tilde{t}_j e^{-2\pi i u/\omega_1}; \tilde{q}, r)}{\Gamma(\tilde{w}_j e^{-2\pi i u/\omega_1}; \tilde{q}, r)} du \quad (4.3)$$

с указанными выше двумя условиями балансировки для параметров и некоторым контуром интегрирования C .

Рассмотрим определение интегралов при $|q| = 1$. Оказывается, что теперь даже функция $h_2(u)$ не может быть произвольной. В этом случае необходимо выбрать $\ell = s$ и подобрать параметры $t_j, \tilde{t}_j$ и $w_j, \tilde{w}_j$ так, чтобы все Γ -функции комбинировались в модифицированные эллиптические гамма-функции $G(u; \omega)$ (именно таким образом она и была построена в [11]). Это приводит к интегралам вида

$$\int_C e^{cu+d} \prod_{j=1}^s \frac{G(u + g_j; \omega)}{G(u + v_j; \omega)} du, \quad (4.4)$$

где параметры g_j и v_j удовлетворяют условию балансировки $\sum_{j=1}^s (g_j - v_j) = 0$ совместно с соотношениями $t_j = e^{2\pi i g_j/\omega_2}$, $w_j = e^{2\pi i v_j/\omega_2}$, $\tilde{t}_j = r e^{-2\pi i g_j/\omega_1}$, $\tilde{w}_j = r e^{-2\pi i v_j/\omega_1}$, и $y_{1,2} = e^{c\omega_{1,2}}$.

Случай $|q| > 1$ оказывается эквивалентным случаю $|q| < 1$ после замены параметров и приводит к интегралам

$$\int_C e^{cu+d} \prod_{j=1}^s \frac{\Gamma(q^{-1} w_j e^{2\pi i u/\omega_2}; p, q^{-1})}{\Gamma(q^{-1} t_j e^{2\pi i u/\omega_2}; p, q^{-1})} \prod_{j=1}^\ell \frac{\Gamma(\tilde{q}^{-1} \tilde{w}_j e^{-2\pi i u/\omega_1}; \tilde{q}^{-1}, r)}{\Gamma(\tilde{q}^{-1} \tilde{t}_j e^{-2\pi i u/\omega_1}; \tilde{q}^{-1}, r)} du. \quad (4.5)$$

Функции (4.3), (4.4) и (4.5) можно назвать эллиптическими аналогами функции Мейера, поскольку при определенном выборе параметров и контура интегрирования C они вырождаются к этой функции [12]. При этом на промежуточном

этапе возникают различные q -аналоги функции Мейера, включая случаи, рассмотренные в [51]. Более общие тэта-гипергеометрические аналоги функции Мейера, для которых ядра $\Delta(u)$ удовлетворяют системе уравнений (4.1), где $h_k(u)$ – произвольные мероморфные тэта-функции, построены в [11]; мы их здесь не рассматриваем.

4.2. Вполне уравновешенные и совершенно уравновешенные интегралы. Рассмотрим интегралы (4.3) с $\ell = c = d = 0$ и заменим переменную интегрирования на $z = e^{2\pi i u/\omega_2}$. До настоящего времени мы не фиксировали контур C . Выберем его в виде единичной окружности $\mathbb{T}$, ориентированной против часовой стрелки. В результате мы получаем интегралы вида

$$\int_{\mathbb{T}} \Delta(z) \frac{dz}{z}, \quad \Delta(z) = \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(t_k z; p, q)}{\Gamma(w_k z; p, q)},$$

с $\prod_{k=1}^s t_k = \prod_{k=1}^s w_k$. Если выполнены условия $w_k t_k = pq$, $k = 1, \dots, s$, то интегралы принимают вид

$$\int_{\mathbb{T}} \Delta^{(s)}(z) \frac{dz}{z}, \quad \Delta^{(s)}(z) = \prod_{k=1}^s \Gamma(t_k z, t_k/z; p, q),$$

и называются вполне уравновешенными. Условие балансировки для них принимает вид $\prod_{k=1}^s t_k^2 = (pq)^s$ или $\prod_{k=1}^s t_k = \mu(pq)^{s/2}$ с неопределенностью в выборе знака $\mu = \pm 1$. Формула отражения $\Gamma(a, b; p, q) = 1$, $ab = pq$, показывает, что выбор параметров $t_j t_k = pq$ играет существенную роль, уменьшая число параметров в $\Delta^{(s)}(z)$. В частности, при $t_k^2 = pq$ переменная t_k полностью исчезает из формул. Очевидно, что функция

$$h^{(p)}(z) := \frac{\Delta^{(s)}(qz)}{\Delta^{(s)}(z)} = \prod_{k=1}^s \frac{\theta(t_k z; p)}{\theta(pqz/t_k; p)}$$

является p -эллиптической, т. е. $h^{(p)}(pz) = h^{(p)}(z)$. Обозначив $u_k := t_k z$, $v_k := pqz/t_k$, $\lambda := pqz^2$, можно переписать $h^{(p)}(z)$ как

$$h^{(p)}(u_1, \dots, u_s; \lambda) = \prod_{k=1}^s \frac{\theta(u_k; p)}{\theta(v_k; p)} \quad (4.6)$$

с условиями вполне уравновешенности $u_k v_k = \lambda$, $k = 1, \dots, s$, и балансировки $\prod_{k=1}^s u_k = \mu \lambda^{s/2}$.

Рассмотрим все возможные p -сдвиги параметров $u_1, \dots, u_s$ и λ :

$$u_k \rightarrow p^{n_k} u_k, \quad \lambda \rightarrow p^N \lambda, \quad n_k, N \in \mathbb{Z},$$

и потребуем, чтобы $h^{(p)}$ была инвариантна относительно максимально возможной группы этих преобразований. Условие балансировки приводит к ограничению $\sum_{k=1}^s n_k = sN/2$. При $N = 0$ легко проверить, что $h^{(p)}(\dots, pu_a, \dots, p^{-1}u_b, \dots; \lambda) = h^{(p)}(u_1, \dots, u_s; \lambda)$, т. е. $h^{(p)}$ является эллиптической функцией всех своих параметров. Преобразования с $N \neq 0$ сложнее и зависят от четности переменной s . Для нечетных s целое число N должно быть четным.

Полная группа симметрий генерируется тогда преобразованиями с $N = 0$ и, скажем, $n_1 = s$, $n_k = 0$, $k \neq 1$, и $N = 2$, что дает

$$\frac{h^{(p)}(p^s u_1, u_2, \dots, u_s; p^2 \lambda)}{h^{(p)}(u_1, \dots, u_s; \lambda)} = \frac{\lambda^s}{\prod_{k=1}^s u_k^2} = 1,$$

т.е. значение μ не фиксируется.

Что же касается четных $s = 2m$, то в этом случае на N нет ограничений, и достаточно рассмотреть преобразование, соответствующее выбору $n_1 = m$, $N = 1$, со всеми остальными $n_k = 0$. Тогда имеем

$$\frac{h^{(p)}(p^m u_1, u_2, \dots, u_{2m}; p \lambda)}{h^{(p)}(u_1, \dots, u_{2m}; \lambda)} = \frac{\lambda^m}{\prod_{k=1}^{2m} u_k} = \mu.$$

Требуя, чтобы это преобразование было симметрией, мы однозначно фиксируем условие балансировки, $\mu = 1$.

Нетрудно проверить, что для произвольного $\mu = \pm 1$ верно равенство

$$\Delta^{(s)}(p^i q^j z) \Delta^{(s)}(z) = \Delta^{(s)}(p^i z) \Delta^{(s)}(q^j z)$$

для всех $i, j \in \mathbb{Z}$. Наоборот, из этого условия можно получить условие балансировки с $\mu = \pm 1$. Переходя к пределам $z \rightarrow \pm p^{-i/2} q^{-j/2}$ и используя симметрию $\Delta^{(s)}(z) = \Delta^{(s)}(z^{-1})$, получаем $\Delta^{(s)}(\pm p^{i/2} q^{j/2})^2 = \Delta^{(s)}(\pm p^{i/2} q^{-j/2})^2$. Прямое вычисление дает

$$\Delta^{(s)}(\pm p^{i/2} q^{j/2}) = ((\mp 1)^s \mu)^{ij} \Delta^{(s)}(\pm p^{i/2} q^{-j/2}).$$

Для четных $s = 2m$ и $\mu = 1$ получаем

$$\Delta^{(2m)}(\pm p^{i/2} q^{j/2}) = \Delta^{(2m)}(\pm p^{i/2} q^{-j/2}) \quad (4.7)$$

при условии, что функции в обеих частях равенства корректно определены. Последнее требование выполняется, если мы не сталкиваемся с полюсами, т.е. $t_r \neq \pm p^{a/2} q^{b/2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, для всех r .

Будем называть интегралы $\int_{\mathbb{T}} \Delta(z) \frac{dz}{z}$ совершенно уравновешенными, если их ядра имеют вид

$$\Delta_{vwp}^{(2m+6)}(z) = \frac{\prod_{k=1}^{2m+6} \Gamma(t_k z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} = \theta(z^2; p) \theta(z^{-2}; q) \prod_{k=1}^{2m+6} \Gamma(t_k z^{\pm 1}; p, q).$$

Это ядро может быть получено из $\Delta^{(2m+14)}(z)$ ограничением параметров

$$t_{2m+7}, \dots, t_{2m+14} = (\pm(pq)^{1/2}, \pm p^{1/2} q, \pm p q^{1/2}, \pm pq);$$

это следует из формулы отражения и формулы удвоения аргумента для функции $\Gamma(z; p, q)$:

$$\Gamma(z^2; p, q) = \Gamma(\pm z, \pm q^{1/2} z, \pm p^{1/2} z, \pm(pq)^{1/2} z; p, q).$$

Условие балансировки принимает теперь вид

$$\prod_{k=1}^{2m+6} t_k = \mu(pq)^{m+1}, \quad (4.8)$$

где выбор знака $\mu = 1$ мы считаем каноническим, так как он приводит к дополнительным симметриям. Ядро $\Delta_{vwp}^{(2m+6)}(z)$ также может быть получено из $\Delta^{(2m+12)}(z)$ ограничениями $t_{2m+7}, \dots, t_{2m+12} = (\pm p^{1/2}q, \pm pq^{1/2}, \pm pq)$, поскольку выбор $t_k^2 = pq$ просто устраняет соответствующие Γ -множители. Однако мы не будем пользоваться такой редукцией, так как для нее в условии балансировки изменится знак: $\prod_{k=1}^{2m+6} t_k = -\mu(pq)^{m+1}$.

В дальнейшем, мы будем изучать совершенно уравновешенные эллиптические гипергеометрические интегралы вида

$$I^{(m)}(t_1, \dots, t_{2m+6}) = \kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{k=1}^{2m+6} \Gamma(t_k z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz}{z}$$

с “правильным” условием балансировки $\prod_{k=1}^{2m+6} t_k = (pq)^{m+1}$. Эти интегралы представляют собой эллиптические аналоги чисто гипергеометрических функций ${}_{m+1}F_m$. В частности, при $m = 0$ мы получаем эллиптический бета-интеграл. Ограничения $t_{2m+5} = (pq)^{1/2}$, $t_{2m+6} = -(pq)^{1/2}$ редуцируют эти интегралы к $I^{(m-1)}(t_1, \dots, t_{2m+4})$ с условием балансировки $\prod_{k=1}^{2m+4} t_k = -(pq)^m$. Появление знака “−” в правой части просто указывает, что эти интегралы на самом деле должны рассматриваться как обобщение ${}_{m+1}F_m$, а не ${}_mF_{m-1}$ -функций. Например, такой выбор в эллиптическом бета-интеграле с учетом соотношения $\Gamma(-pq; p, q) = 2(-p; p)_{\infty}(-q; q)_{\infty}$ дает следующее:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{k=1}^4 \Gamma(t_k z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz}{z} \\ &= 4(p^2; p^2)_{\infty}(q^2; q^2)_{\infty} \prod_{1 \leq j < k \leq 4} \Gamma(t_j t_k; p, q) \prod_{k=1}^4 \Gamma(p q t_k^2; p^2, q^2), \end{aligned}$$

где $\prod_{k=1}^4 t_k = -1$ и контур C отделяет сходящиеся к нулю последовательности полюсов ядра от уходящих на бесконечность. При $p \rightarrow 0$ получаем специальный случай интеграла Аски–Вильсона.

Множитель в ядре интегралов, появляющийся из-за ограничений совершенной уравновешенности на параметры, приводит к интересному свойству [34]

$$\Delta_{vwp}^{(2m+6)}(p^{i/2}q^{j/2}) = -\mu^{ij} \Delta_{vwp}^{(2m+6)}(p^{i/2}q^{-j/2}), \quad (4.9)$$

т.е. к знаку “−” в правой части при каноническом выборе $\mu = 1$, что принципиально отличается от (4.7). Действительно, при $i = 0$ или $j = 0$ имеем нули в обеих частях равенства, а в других случаях получаем

$$\frac{\lim_{z \rightarrow p^{i/2}q^{j/2}} \Gamma_{p,q}^{-1}(z^2, z^{-2})}{\lim_{z \rightarrow p^{i/2}q^{-j/2}} \Gamma_{p,q}^{-1}(z^2, z^{-2})} = \frac{\theta(p^{-i}q^{-j}; q)\theta(p^i q^j; p)}{\theta(p^{-i}q^j; q)\theta(p^i q^{-j}; p)} = -(pq)^{-2ij},$$

что вместе с описанными свойствами $\Delta^{(2m+6)}(z)$ дает приведенную формулу. При $i, j \neq 0$ возникает некоммутативность двух пределов:

$$\frac{\lim_{z \rightarrow p^{i/2} q^{j/2}} \Delta_{vwp}^{(2m+6)}(z)}{\lim_{z \rightarrow p^{i/2} q^{-j/2}} \Delta_{vwp}^{(2m+6)}(z)} = -\mu^{ij}$$

$$\neq \lim_{t_{2m+7}, \dots, t_{2m+14} \rightarrow (\pm(pq)^{1/2}, \pm p^{1/2}q, \pm pq^{1/2}, \pm pq)} \frac{\Delta^{(2m+14)}(p^{i/2}q^{j/2})}{\Delta^{(2m+14)}(p^{i/2}q^{-j/2})} = \mu^{ij},$$

хотя оба они корректно определены. Причиной этого противоречия служит то, что условие совершенной уравновешенности использует “запрещенные” значения параметров, приводящие к полюсам и нулям $\Delta^{(2m+14)}(z)$ при $z = p^{i/2}q^{j/2}$.

Как показано в [34], произведение $\prod_{1 \leq j \leq k \leq m} (t_j t_k; p, q)_{\infty} I^{(m)}(\underline{t})$ является голоморфной функцией параметров $t_j \in \mathbb{C}^*$. Дополнительно, знак “—” в правой части (4.9) гарантирует голоморфность интеграла $I^{(m)}(\underline{t})$ в точках $t_k^2 = p^{-a}q^{-b}$, $a, b = 0, 1, 2, \dots$. Если же придать каким-либо параметрам запрещенные значения $\pm p^{a/2}q^{b/2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, то последнее свойство исчезнет.

4.3. Ряды. Согласно общему определению [10], формальные ряды $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n$ называются эллиптическими гипергеометрическими рядами, если отношение соседних членов ряда c_{n+1}/c_n является некоторой эллиптической функцией $n \in \mathbb{C}$. Это определение находится в русле идей Похгаммера и Хорна, которые используются при построении обычных и q -гипергеометрических рядов [2].

Как мы уже видели на примере суммы Френкеля–Тураева, эллиптические гипергеометрические ряды возникают как суммы вычетов определенных последовательностей полюсов ядер эллиптических гипергеометрических интегралов. Действительно, рассмотрим полюсы подынтегральной функции в (4.3), расположенные в точках $u = a + \omega_1 n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, для некоторого параметра a , и обозначим вычеты этих полюсов через c_n . При $u \rightarrow a + \omega_1 n$ имеем $\Delta(u) \rightarrow c_n/(u - a - \omega_1 n) + O(1)$. Теперь несложно заметить, что отношение

$$\lim_{u \rightarrow a + \omega_1 n} \frac{\Delta(u + \omega_1)}{\Delta(u)} = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{u \rightarrow a + \omega_1 n} h_1(u) = h_1(a + \omega_1 n)$$

является эллиптической функцией n с периодами ω_2/ω_1 и ω_3/ω_1 , что демонстрирует общую связь между интегралами и рядами.

Произвольная эллиптическая функция $h(n)$ порядка $s+1$ с периодами ω_2/ω_1 и ω_3/ω_1 имеет вид

$$h(n) = y \prod_{k=1}^{s+1} \frac{\theta(t_k q^n; p)}{\theta(w_k q^n; p)}, \quad (4.10)$$

где $\prod_{k=1}^{s+1} t_k = \prod_{k=1}^{s+1} w_k$. Определим эллиптический символ Похгаммера $\theta(t)_n$ как решение рекуррентного соотношения $c_{n+1} = \theta(tq^n; p)c_n$ с начальным условием $c_0 = 1$:

$$\theta(t)_n = \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1} \theta(tq^j; p), & n > 0, \\ \prod_{j=1}^{-n} \frac{1}{\theta(tq^{-j}; p)}, & n < 0. \end{cases}$$

Тогда легко вывести явный вид формального двустороннего эллиптического гипергеометрического ряда

$${}_{s+1}G_{s+1} \left(\begin{matrix} t_1, \dots, t_{s+1} \\ w_1, \dots, w_{s+1} \end{matrix}; q, p; y \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \prod_{k=1}^{s+1} \frac{\theta(t_k)_n}{\theta(w_k)_n} y^n$$

с нормировкой нулевого коэффициента ряда $c_0 = 1$. Выбрав $w_{s+1} = q$ и заменив $t_{s+1} \rightarrow t_0$, получаем односторонний ряд

$${}_{s+1}E_s \left(\begin{matrix} t_0, t_1, \dots, t_s \\ w_1, \dots, w_s \end{matrix}; q, p; y \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta(t_0, t_1, \dots, t_s)_n}{\theta(q, w_1, \dots, w_s)_n} y^n. \quad (4.11)$$

Для фиксированных t_j и w_j в пределе $p \rightarrow 0$ имеем $\theta(t)_n \rightarrow (t; q)_n = (1-t) \times (1-qt) \cdots (1-q^{n-1}t)$, и функция ${}_{s+1}E_s$ переходит в q -гипергеометрический ряд [3]

$${}_{s+1}\varphi_s \left(\begin{matrix} t_0, t_1, \dots, t_s \\ w_1, \dots, w_s \end{matrix}; q; y \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_0; q)_n \cdots (t_s; q)_n}{(q; q)_n (w_1; q)_n \cdots (w_s; q)_n} y^n$$

с условием $\prod_{j=0}^s t_j = q \prod_{j=1}^s w_j$. Параметризуя $t_j = q^{u_j}$ и $w_j = q^{v_j}$, в пределе $q \rightarrow 1$ получаем ряд

$${}_{s+1}F_s \left(\begin{matrix} u_0, u_1, \dots, u_s \\ v_1, \dots, v_s \end{matrix}; y \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u_0)_n \cdots (u_s)_n}{n! (v_1)_n \cdots (v_s)_n} y^n,$$

где $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$ обозначает обычный символ Похгаммера и $u_0 + \cdots + u_s = 1 + v_1 + \cdots + v_s$. Последнее ограничение на параметры несущественно, так как оно уже отсутствует для ${}_sF_{s-1}$ -функции, полученной предельным переходом $u_s \rightarrow \infty$.

Исследование условий сходимости бесконечных рядов (4.11) представляет собой серьезную задачу и до настоящего времени она не решена полностью. Поэтому при использовании E -рядов обычно подразумевается, что они обрываются благодаря условию $t_k = q^{-N} p^M$ для некоторого k , где $N = 0, 1, 2, \dots$ и $M \in \mathbb{Z}$. Отметим, что формальный ${}_2E_1$ -ряд не является естественным эллиптическим обобщением гипергеометрической функции Гаусса, так как у него нет естественных аналогов многих важных свойств ${}_2F_1$ -функции.

При выполнении ограничений на параметры $t_0 q = t_1 w_1 = \cdots = t_s w_s$ ряды (4.11) называются вполне уравновешенными. Для них условие балансировки принимает вид $t_1 \cdots t_s = \pm q^{(s+1)/2} t_0^{(s-1)/2}$, а функции $h(n)$ и ${}_{s+1}E_s$ становятся инвариантными относительно преобразований $t_j \rightarrow p t_j$, $j = 1, \dots, s-1$, и $t_0 \rightarrow p^2 t_0$ (при этом t_s считается зависимым параметром). Так же, как и в случае интегралов, при нечетных s и выборе знака “+” в условии балансировки возникает дополнительная симметрия – функции $h(n)$ и ${}_{s+1}E_s$ становятся инвариантными относительно преобразования $t_0 \rightarrow p t_0$ (с компенсирующим преобразованием $t_s \rightarrow p^{(s-1)/2} t_s$). Таким образом, $h(n)$ становится эллиптической функцией всех свободных параметров $\log t_j$, $j = 0, 1, \dots, s-1$, с одинаковыми периодами, т. е. появляется некоторая “полная эллиптичность” [10], [31].

Следующее структурное ограничение, которое необходимо для построения наиболее интересных примеров рядов, выглядит так:

$$t_{s-3} = q\sqrt{t_0}, \quad t_{s-2} = -q\sqrt{t_0}, \quad t_{s-1} = q\sqrt{\frac{t_0}{p}}, \quad t_s = -q\sqrt{pt_0}$$

и называется условием совершенной уравновешенности (оно связано с удвоением аргумента тэта-функций). Ввиду важности совершенно уравновешенных эллиптических гипергеометрических рядов для них имеются специальные обозначения [52]:

$$\begin{aligned} {}_{s+1}V_s(t_0; t_1, \dots, t_{s-4}; q, p; y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta(t_0 q^{2n}; p)}{\theta(t_0; p)} \prod_{m=0}^{s-4} \frac{\theta(t_m)_n}{\theta(q t_0 t_m^{-1})_n} (qy)^n \\ &= {}_{s+1}E_s \left(\begin{matrix} t_0, t_1, \dots, t_{s-4}, q\sqrt{t_0}, -q\sqrt{t_0}, q\sqrt{\frac{t_0}{p}}, -q\sqrt{pt_0} \\ \frac{qt_0}{t_1}, \dots, \frac{qt_0}{t_{s-4}}, \sqrt{t_0}, -\sqrt{t_0}, \sqrt{pt_0}, -\sqrt{\frac{t_0}{p}} \end{matrix} ; q, p; -y \right), \end{aligned}$$

где $\prod_{k=1}^{s-4} t_k = \pm t_0^{(s-5)/2} q^{(s-7)/2}$ (в этом условии балансировки для нечетных s выбор знака “+” считается каноническим). Выбор $t_j = \pm \sqrt{qt_0}$ устраняет этот параметр и редуцирует индексы ряда на 1 (при этом может измениться знак в условии балансировки). Для достаточно больших s можно подобрать четыре параметра так, что совершенно уравновешенная часть в коэффициентах ряда сократится и он снова станет только вполне уравновешенным рядом. При $y = 1$ этот аргумент опускается в обозначениях ${}_{s+1}V_s$ -рядов. В этой схеме формула Френкеля–Тураева (3.8) дает замкнутое выражение для обрывающегося ${}_{10}V_9(t_0; t_1, \dots, t_5; q, p)$ -ряда.

Для рассмотрения модулярных преобразований необходимо перейти к параметризации $t_k = q^{u_k}$, $w_k = q^{v_k}$, $q = e^{2\pi i \sigma}$, $p = e^{2\pi i \tau}$ и заменить $\theta(q^a; p)$ -функции на “эллиптические числа” $[a] = \theta_1(\sigma a \mid \tau)$. Предположим, что параметр y не зависит от τ . Тогда с помощью формулы (A.3) (с. 64) нетрудно проверить, что функции $h(n)$ и соответственно ${}_{s+1}E_s$ будут модулярно инвариантными при условии $\sum_{k=0}^s u_k^2 = 1 + \sum_{k=1}^s v_k^2$, определенном по модулю $2\tau/\sigma^2$. Для полноты описания приведем явное выражение для наиболее интересного ${}_{s+1}V_s$ -ряда с нечетным s в этих обозначениях:

$${}_{2m}V_{2m-1}(q^{u_0}; q^{u_1}, \dots, q^{u_{2m-5}}; q, p; y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[2n + u_0]}{[u_0]} \prod_{k=0}^{2m-5} \frac{[u_k]_n}{[1 + u_0 - u_k]_n} y^n,$$

где $[a]_n = [a][a+1] \cdots [a+n-1]$, а условие балансировки имеет вид $\sum_{k=1}^{2m-5} u_k = m - 4 + (m-3)u_0$. Этот ряд автоматически модулярно инвариантен. В [3] для аддитивной системы обозначений рядов были предложены ${}_{s+1}e_s$ - и ${}_{s+1}v_s$ -символы, но мы не будем ими пользоваться в данной работе.

Важность условия балансировки для обычных и q -гипергеометрических функций была известна давно, так как при его наличии появляются некоторые дополнительные тождества [3]. То же самое относится к понятиям вполне

уравновешенности и совершенной уравновешенности. Появление соответствующих ограничений на параметры выглядело, однако, достаточно произвольным, и не был ясен их глубинный смысл. Эллиптические гипергеометрические функции проясняют происхождение этих старых концепций. Именно, условие балансировки связано с условием двоякой периодичности основной эллиптической функции, использованной при построении рядов или интегралов. Условие вполне уравновешенности связано с условием эллиптичности по всем параметрам, определяющим дивизор этой эллиптической функции. А условие совершенной уравновешенности привязано к правилу удвоения аргумента тэта-функций. Строго говоря, эти понятия на самом деле последовательно определены только на эллиптическом уровне. Действительно, существуют предельные переходы от эллиптических гипергеометрических тождеств, использующих ${}_{s+1}V_s$ -ряды, к q -гипергеометрическим соотношениям, в результате которых возникают базисные ${}_{s+1}\varphi_s$ -функции, не обладающие каким-либо из упомянутых свойств [35], [52].

Описанное выше вырождение ${}_{s+1}E_s$ -рядов при $p \rightarrow 0$ приводит к ограничению на параметры для ${}_{s+1}\varphi_s$ -рядов, похожему на старое условие q -балансировки [1], [3], но не совпадающему с ним. Предел $p \rightarrow 0$ для ${}_{s+1}V_s$ -рядов с фиксированными параметрами приводит к совершенно уравновешенным сбалансированным ${}_{s-1}\varphi_{s-2}$ -рядам, имеющим свое обозначение [3]:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} {}_{s+1}V_s(t_0; t_1, \dots, t_{s-4}; q, p; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - t_0 q^{2n}}{1 - t_0} \prod_{k=0}^{s-4} \frac{(t_k; q)_n}{(qt_0/t_k; q)_n} (qz)^n \\ &=: {}_{s-1}W_{s-2}(t_0; t_1, \dots, t_{s-4}; q, qz). \end{aligned}$$

Замечательным образом, условие балансировки для ${}_{s+1}V_s$ -рядов совпадает в этом случае с обычным условием балансировки для ${}_{s-1}W_{s-2}$ -рядов [3], [10]. Возможность фиксации знака в условии балансировки для нечетных s из требования наличия дополнительной симметрии усиливает важность “эллиптической” точки зрения на функции гипергеометрического типа и указывает на неразрывную связь этих двух классов функций.

В заключение этого раздела упомянем, что квадратичные преобразования для ${}_{s+1}V_s$ -рядов и связанные формулы суммирования рассмотрены в [49], [52]–[54]. Другие специфические эллиптические гипергеометрические ряды исследовались в работах [55], [56]. Интересное приложение ${}_{s+1}E_s$ -рядов с нетривиальным степенным параметром y появилось недавно в [57].

5. Эллиптический аналог гипергеометрической функции Гаусса

5.1. Определение V -функции и связь с системой корней E_7 . Интегральное представление Эйлера для ${}_2F_1(a, b; c; x)$ -функции отличается от бета-интеграла тем, что содержит в подынтегральном выражении дополнительный член, зависящий от двух новых параметров [1]. Эллиптический аналог гипергеометрической функции Гаусса, который мы будем обозначать символом

$V(t_1, \dots, t_8; p, q)$, также является двухпараметрическим расширением эллиптического бета-интеграла [31]:

$$V(t_1, \dots, t_8; p, q) = \kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{j=1}^8 \Gamma(t_j z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz}{z}, \quad (5.1)$$

где восемь параметров $t_1, \dots, t_8 \in \mathbb{C}$ и две базисные переменные $p, q \in \mathbb{C}$ удовлетворяют ограничениям $|t_j|, |p|, |q| < 1$ и условию балансировки $\prod_{j=1}^8 t_j = p^2 q^2$. Для других значений параметров t_j V -функция определяется аналитическим продолжением интеграла (5.1). Это продолжение строится заменой контура интегрирования $\mathbb{T}$ на контур C , отделяющий последовательности полюсов подынтегрального выражения $z = t_j p^a q^b$, $a, b = 0, 1, 2, \dots$, сходящихся к нулю, от полюсов $z = t_j^{-1} p^{-a} q^{-b}$, уходящих на бесконечность; это уже не подразумевает ограничений $|t_j| < 1$. Стыгивая контур C , можно представить результирующую функцию как интеграл по $\mathbb{T}$ и сумму вычетов полюсов, пересеченных контуром при этой деформации.

Пусть некоторая пара параметров удовлетворяет условию $t_j t_k = pq$. Тогда V -функция редуцируется к эллиптическому бета-интегралу (3.1), что следует из формулы отражения для эллиптической гамма-функции $\Gamma(z; p, q)$.

Рассмотрим симметрии V -функции. Очевидно, что она инвариантна относительно перестановки p и q и S_8 -группы перестановок t_j , связанной с корневой системой A_7 . Оказывается, что существует преобразование, расширяющее S_8 до группы Вейля для исключительной системы корней E_7 . Оно находится с помощью двойного интеграла

$$\kappa \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\prod_{j=1}^4 \Gamma(a_j z^{\pm 1}, b_j w^{\pm 1}; p, q) \Gamma(c z^{\pm 1} w^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}, w^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz}{z} \frac{dw}{w},$$

где $a_j, b_j, c \in \mathbb{C}$, $|a_j|, |b_j|, |c| < 1$ и $c^2 \prod_{j=1}^4 a_j = c^2 \prod_{j=1}^4 b_j = pq$. Вычисление интегралов по z или по w в различном порядке с помощью формулы (3.1) приводит к фундаментально важному соотношению [11]

$$V(\underline{t}) = \prod_{1 \leq j < k \leq 4} \Gamma(t_j t_k, t_{j+4} t_{k+4}; p, q) V(\underline{s}), \quad (5.2)$$

где $V(\underline{t}) = V(t_1, \dots, t_8; p, q)$ и

$$\begin{cases} s_j = \varepsilon t_j, & j = 1, 2, 3, 4; \\ s_j = \varepsilon^{-1} t_j, & j = 5, 6, 7, 8; \end{cases} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{pq}{t_1 t_2 t_3 t_4}} = \sqrt{\frac{t_5 t_6 t_7 t_8}{pq}} \quad \text{и} \quad |t_j|, |s_j| < 1.$$

Повторное преобразование (5.2) с параметрами $s_{3,4,5,6}$, играющими ту же роль, что и $t_{1,2,3,4}$, и последующая перестановка параметров t_3, t_4 с t_5, t_6 приводят к равенству

$$V(\underline{t}) = \prod_{j,k=1}^4 \Gamma(t_j t_{k+4}; p, q) V\left(\frac{T^{1/2}}{t_1}, \dots, \frac{T^{1/2}}{t_4}, \frac{U^{1/2}}{t_5}, \dots, \frac{U^{1/2}}{t_8}\right), \quad (5.3)$$

где $T = t_1 t_2 t_3 t_4$, $U = t_5 t_6 t_7 t_8$ и $|T|^{1/2} < |t_j| < 1$, $|U|^{1/2} < |t_{j+4}| < 1$, $j = 1, 2, 3, 4$. Приравнявая правые части равенств (5.2) и (5.3) и выражая параметры t_j через s_j , получаем третье преобразование

$$V(\underline{s}) = \prod_{1 \leq j < k \leq 8} \Gamma(s_j s_k; p, q) V\left(\frac{\sqrt{pq}}{s_1}, \dots, \frac{\sqrt{pq}}{s_8}\right), \quad (5.4)$$

где $|pq|^{1/2} < |s_j| < 1$ для всех j .

Свяжем параметры функции $V(\underline{t})$ с координатами евклидова пространства $x_j \in \mathbb{R}^8$ соотношениями $t_j = e^{2\pi i x_j} (pq)^{1/4}$. Обозначим через $\langle x, y \rangle$ скалярное произведение в $\mathbb{R}^8$ и через e_i – какой-либо ортонормированный базис, удовлетворяющий условию $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Корневая система A_7 состоит из векторов $v = \{e_i - e_j, i \neq j\}$, а ее группа Вейля S_8 – из отражений $x \rightarrow S_v(x) = x - 2v\langle v, x \rangle / \langle v, v \rangle$, действующих в гиперплоскости, ортогональной вектору $\sum_{i=1}^8 e_i$. При этом координаты векторов $x = \sum_{i=1}^8 x_i e_i$ удовлетворяют соотношению $\sum_{i=1}^8 x_i = 0$, что обеспечивается условием балансировки.

Преобразование координат в (5.2) соответствует отражению $S_v(x)$ по отношению к вектору $v = (\sum_{i=5}^8 e_i - \sum_{i=1}^4 e_i)/2$ длины $\langle v, v \rangle = 2$. Оно расширяет группу S_8 до группы Вейля для исключительной системы корней E_7 . Другое доказательство равенств (5.2)–(5.4) дано Рэйнсом в [34], где впервые указана их связь с E_7 -группой.

В [11] показано, что V -функция сводится к произведению двух ${}_{12}V_{11}$ -рядов при специальных дискретных значениях одного из параметров. Обозначим $A = t_0 \cdots t_4$; тогда

$$\begin{aligned} & V(t_0, \dots, t_5, t_5^{-1} p^{n+1} q^{m+1}, A^{-1} p^{1-n} q^{1-m}; p, q) \\ &= \frac{\prod_{0 \leq j < k \leq 4} \Gamma(t_j t_k; p, q)}{\prod_{j=0}^4 \Gamma(t_j^{-1} A; p, q)} \frac{\Gamma(p^{n+1} q^{m+1} t_5^{-1} t_0^{\pm 1}, t_5 t_0^{\pm 1}, A t_0^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(p^n q^m A t_0^{\pm 1}; p, q)} \\ & \quad \times {}_{12}V_{11}\left(\frac{A t_0}{q}; \frac{A t_5}{q}, t_0 t_1, t_0 t_2, t_0 t_3, t_0 t_4, q^{-m}, \frac{A q^m}{t_5}; q, p\right) \\ & \quad \times {}_{12}V_{11}\left(\frac{A t_0}{p}; \frac{A t_5}{p}, t_0 t_1, t_0 t_2, t_0 t_3, t_0 t_4, p^{-n}, \frac{A p^n}{t_5}; p, q\right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где контур интегрирования в определении V -функции выбран так, чтобы разделить последовательности полюсов подынтегральной функции, сходящиеся к нулю и уходящие на бесконечность. При $m = 0$ получаем интегральное представление для отдельного обрывающегося ${}_{12}V_{11}$ -ряда. Поскольку левая часть (5.5) симметрична по $t_0, \dots, t_4$, это должно быть верно и для правой части, что выполняется благодаря преобразованию симметрии для рядов, которое будет рассмотрено ниже.

5.2. Эллиптическое гипергеометрическое уравнение. Формула сложения для тэта-функций (A.5), записанная в виде

$$t_8 \theta(t_7 t_8^{\pm 1}, t_6 z^{\pm 1}; p) + t_6 \theta(t_8 t_6^{\pm 1}, t_7 z^{\pm 1}; p) + t_7 \theta(t_6 t_7^{\pm 1}, t_8 z^{\pm 1}; p) = 0,$$

приводит к формуле связи

$$\frac{t_6 V(qt_6)}{\theta(t_6 t_7^{\pm 1}, t_6 t_8^{\pm 1}; p)} + \frac{t_7 V(qt_7)}{\theta(t_7 t_6^{\pm 1}, t_7 t_8^{\pm 1}; p)} + \frac{t_8 V(qt_8)}{\theta(t_8 t_6^{\pm 1}, t_8 t_7^{\pm 1}; p)} = 0, \quad (5.6)$$

где $V(qt_j)$ обозначает V -функции с параметром t_j , замененным на qt_j (это приводит к условию балансировки $\prod_{j=1}^8 t_j = p^2 q$). Действительно, легко проверить выполнение такого же равенства для ядра V -функции, после интегрирования которого по z и получается (5.6).

Подстановка преобразования (5.4) в (5.6) дает

$$\begin{aligned} & \frac{\prod_{j=1}^5 \theta(t_6 t_j / q; p)}{t_6 \theta(t_7 / t_6, t_8 / t_6; p)} V(q^{-1} t_6) + \frac{\prod_{j=1}^5 \theta(t_7 t_j / q; p)}{t_7 \theta(t_6 / t_7, t_8 / t_7; p)} V(q^{-1} t_7) \\ & + \frac{\prod_{j=1}^5 \theta(t_8 t_j / q; p)}{t_8 \theta(t_6 / t_8, t_7 / t_8; p)} V(q^{-1} t_8) = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $\prod_{j=1}^8 t_j = p^2 q^3$.

Рассмотрим три уравнения, получающиеся заменами $t_8 \rightarrow qt_8$ в (5.7) и $t_6 \rightarrow q^{-1} t_6$ или $t_7 \rightarrow q^{-1} t_7$ в (5.6). Исключая из них функции $V(q^{-1} t_6, qt_8)$ и $V(q^{-1} t_7, qt_8)$, мы получаем эллиптическое гипергеометрическое уравнение [31], [58]:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(t_1, \dots, t_6, t_7, t_8, q; p) (U(qt_6, q^{-1} t_7) - U(\underline{t})) \\ & + \mathcal{A}(t_1, \dots, t_7, t_6, t_8, q; p) (U(q^{-1} t_6, qt_7) - U(\underline{t})) + U(\underline{t}) = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где

$$\mathcal{A}(t_1, \dots, t_8, q; p) := \frac{\theta(t_6 / qt_8, t_8 t_6, t_8 / t_6; p)}{\theta(t_6 / t_7, t_7 / qt_6, t_6 t_7 / q; p)} \prod_{k=1}^5 \frac{\theta(t_7 t_k / q; p)}{\theta(t_8 t_k; p)} \quad (5.9)$$

и

$$U(\underline{t}) := U(\underline{t}; p, q) = \frac{V(\underline{t}; p, q)}{\prod_{k=6}^7 \Gamma(t_k t_8^{\pm 1}; p, q)}.$$

Потенциал $\mathcal{A}(t_1, \dots, t_8, q; p)$ является эллиптической функцией всех своих параметров, т. е. он не меняется при заменах $t_j \rightarrow pt_j$, $j = 1, \dots, 7$, если считать t_8 параметром, зависящим от остальных через условие балансировки. Ввиду симметрии U -функции по p и q , она удовлетворяет еще одному эллиптическому гипергеометрическому уравнению, получающемуся из (5.8) перестановкой p и q . Замена переменных приводит функцию $\mathcal{A}(t_1, \dots, t_8, q; p)$ к полностью S_8 -симметричному виду (4.6) с произвольными $u_1, \dots, u_8$ и $\mu = 1$ (замечание Д. Цагира автору). Однако само эллиптическое гипергеометрическое уравнение обладает максимально S_6 -симметрией [31], [58].

Обозначим $t_6 = cx$, $t_7 = c/x$ и перейдем к новому набору параметров

$$\varepsilon_k = \frac{q}{ct_k}, \quad k = 1, \dots, 5, \quad \varepsilon_8 = \frac{c}{t_8}, \quad \varepsilon_7 = \frac{\varepsilon_8}{q}.$$

Выберем параметр ε_6 исходя из требования выполнения условия балансировки в виде $\prod_{k=1}^8 \varepsilon_k = p^2 q^2$, что дает $c = \sqrt{\varepsilon_6 \varepsilon_8 / p^2}$. Теперь после замены $U(\underline{t})$

на неизвестную функцию $f(x)$ в (5.8) мы можем переписать это эллиптическое гипергеометрическое уравнение в виде q -разностного уравнения второго порядка:

$$A(x)(f(qx) - f(x)) + A(x^{-1})(f(q^{-1}x) - f(x)) + \nu f(x) = 0, \quad (5.10)$$

$$A(x) = \frac{\prod_{k=1}^8 \theta(\varepsilon_k x; p)}{\theta(x^2, qx^2; p)}, \quad \nu = \prod_{k=1}^6 \theta\left(\frac{\varepsilon_k \varepsilon_8}{q}; p\right), \quad (5.11)$$

в котором явно видна S_6 -группа симметрий по параметрам. Одно функциональное решение этого уравнения у нас уже есть:

$$f_1(x; \varepsilon; p, q) = \frac{V(q/(c\varepsilon_1), \dots, q/(c\varepsilon_5), cx, c/x, c/\varepsilon_8; p, q)}{\Gamma(c^2 x^{\pm 1}/\varepsilon_8, x^{\pm 1}\varepsilon_8; p, q)}. \quad (5.12)$$

Для построения других линейно независимых решений можно использовать симметрии уравнения (5.10), не являющимися симметриями функции (5.12). Например, второе решение может быть получено умножением одного из параметров $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$ или x на степени p или перестановками $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$ с ε_6 .

Поскольку функция $\mathcal{A}(\underline{t}, q; p)$ в уравнении (5.8) не меняется при заменах $t_6 \rightarrow p^{-1}t_6$, $t_7 \rightarrow pt_7$, то функция $U(p^{-1}t_6, pt_7)$ также является решением этого уравнения. В работе [59] вычислен казоратиан (дискретный вронскиан) этих двух решений. Умножим уравнение (5.8) на $U(p^{-1}t_6, pt_7)$, а уравнение для $U(p^{-1}t_6, pt_7)$ на $U(\underline{t})$ и вычтем одно получающееся соотношение из другого. В результате возникает равенство

$$\mathcal{A}(t_1, \dots, t_6, t_7, t_8, q; p) D(p^{-1}t_6, q^{-1}t_7) = \mathcal{A}(t_1, \dots, t_7, t_6, t_8, q; p) D(p^{-1}q^{-1}t_6, t_7), \quad (5.13)$$

где D обозначает казоратиан

$$D(t_6, t_7) = U(pqt_6, t_7)U(t_6, pqt_7) - U(qt_6, pt_7)U(pt_6, qt_7).$$

После подстановок $t_6 \rightarrow pt_6$, $t_7 \rightarrow qt_7$ условие балансировки принимает вид $t_6 t_7 = pq/(t_1 \cdots t_5 t_8)$, и (5.13) можно рассматривать как q -разностное уравнение первого порядка по t_7 . Оно легко решается, и его решение определено с точностью до умножения на произвольную q -периодическую функцию $\varphi(qt_7) = \varphi(t_7)$.

Повторяя эту же процедуру с уравнениями, получающимися после перестановки параметров p и q , находим $\varphi(pt_7) = \varphi(t_7)$, так что $\varphi(t_7)$ не зависит от t_7 . Дальнейшее исследование структуры вычетов полюсов V -функций в $D(t_6, t_7)$, пересекаемых контуром интегрирования в пределе $t_7 \rightarrow t_8^{-1}$, полностью фиксирует вид φ и приводит к тождеству [59]

$$V(pqt_6, t_7)V(t_6, pqt_7) - t_6^{-2}t_7^{-2}V(qt_6, pt_7)V(pt_6, qt_7) = \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq 8} \Gamma(t_j t_k; p, q)}{\Gamma(t_6^{\pm 1} t_7^{\pm 1}; p, q)}, \quad (5.14)$$

в котором t_6 и t_7 могут быть заменены на любую другую пару параметров.

Описанные решения эллиптического гипергеометрического уравнения существуют при $|q| < 1$, в то время как само уравнение (5.8) не требует такого ограничения. Благодаря симметрии

$$\mathcal{A}\left(\frac{p^{1/2}}{t_1}, \dots, \frac{p^{1/2}}{t_8}, q; p\right) = \mathcal{A}(t_1, \dots, t_8, q^{-1}; p),$$

преобразование $t_j \rightarrow p^{1/2}/t_j$, $j = 1, \dots, 8$, приводит к изменению базисной переменной $q \rightarrow q^{-1}$ в (5.8). Это дает следующее решение эллиптического гипергеометрического уравнения при $|q| > 1$ (см. [59]):

$$U(t; p, q) = \frac{V(p^{1/2}/t_1, \dots, p^{1/2}/t_8; p, q^{-1})}{\prod_{k=6}^7 \Gamma(p/(t_k t_8), t_8/t_k; p, q^{-1})}. \quad (5.15)$$

Для построения решений уравнения (5.8) (или (5.10)) при $|q| = 1$ можно воспользоваться параметризацией базисных переменных (2.6), (2.7), сделать подстановки $t_k = e^{2\pi i g_k/\omega_2}$ и повторить всю схему рассуждений, приведенную выше, с заменой $\Gamma(z; p, q)$ на модифицированную эллиптическую гамма-функцию $G(u; \omega)$. Так же, как и в случае с модифицированным эллиптическим бета-интегралом, мы опять получим V -функцию, но с другой параметризацией. Эта процедура оказывается эквивалентной применению модулярного преобразования $(\omega_2, \omega_3) \rightarrow (-\omega_3, \omega_2)$ к решениям, описанным выше. На самом деле, потенциал $\mathcal{A}(e^{2\pi i g_1/\omega_2}, \dots, e^{2\pi i g_8/\omega_2}, q; p)$ инвариантен относительно этого преобразования, а $U(t_1, \dots, t_8; p, q)$ переходит в $U(e^{-2\pi i g_1/\omega_3}, \dots, e^{-2\pi i g_8/\omega_3}; \tilde{p}, \tilde{r})$. Последняя функция дает таким образом новое решение эллиптического гипергеометрического уравнения, корректно определенное при $|q| = 1$. Очевидно, что эта функция удовлетворяет также и партнеру уравнения (5.8), получающемуся из него перестановкой ω_1 и ω_2 . Пример аналогичной ситуации с двумя уравнениями для одной функции на q -гипергеометрическом уровне приведен в [60].

Различные формальные вырождения V -функции к q -гипергеометрическим интегралам типа Меллина–Барнса или Эйлера кратко описаны в [31], [58]. Подробный и строгий анализ процедуры вырождения проведен в [28], [61]. Необходимо отметить [58], что эллиптическое гипергеометрическое уравнение является как частный случай уравнения на собственные значения для одночастичного гамильтониана квантовой модели, предложенной ван Диеженом [62] и детально изученной Комори и Хиками [63]. Эта модель типа Калоджеро–Сазерленда является обобщением систем Руджинарса [64] и Иноземцева [65].

6. Цепочки преобразований симметрии для функций

Преобразования симметрии для обычных и q -гипергеометрических рядов строятся с помощью цепочек Бэйли [1], [66]. Эта техника была обобщена на эллиптический уровень в [52], [67]. Изложим кратко это обобщение.

По определению две последовательности чисел $\alpha_n(a, k)$ и $\beta_n(a, k)$ образуют эллиптическую пару Бэйли по отношению к параметрам a и k , если

$$\beta_n(a, k) = \sum_{0 \leq m \leq n} M_{nm}(a, k) \alpha_m(a, k), \quad (6.1)$$

где

$$M_{nm}(a, k) = \frac{\theta(k/a)_{n-m} \theta(k)_{n+m}}{\theta(q)_{n-m} \theta(aq)_{n+m}} \frac{\theta(aq^{2m}; p)}{\theta(a; p)} a^{n-m}. \quad (6.2)$$

В матричном виде $\beta(a, k) = M(a, k) \alpha(a, k)$, где α и β обозначают столбцы, образованные α_n и β_n .

Определим диагональную матрицу

$$D_{nm}(a; b, c) = D_m(a; b, c)\delta_{nm}, \quad D_m(a; b, c) = \frac{\theta(b, c)_m}{\theta(aq/b, aq/c)_m} \left(\frac{aq}{bc} \right)^m. \quad (6.3)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha(a, t)$ и $\beta(a, t)$ образуют эллиптическую пару Бэйли по отношению к параметрам a и t . Тогда величины

$$\begin{aligned} \alpha'(a, k) &= D(a; b, c)\alpha(a, t), & \beta'(a, k) &= K(t, k, b, c)\beta(a, t), \\ K(t, k, b, c) &:= D\left(k; \frac{qt}{b}, \frac{qt}{c}\right)M(t, k)D(t; b, c), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $qat = kbc$ и b, c – два произвольных новых параметра, образуют новую эллиптическую пару Бэйли по отношению к a и k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подстановка (6.4) и соотношения $\beta = M\alpha$ в требуемое равенство $\beta' = M\alpha'$ приводит к матричному тождеству

$$M(a, k)D(a; b, c)M(t, a) = D\left(k; \frac{qt}{b}, \frac{qt}{c}\right)M(t, k)D(t; b, c). \quad (6.5)$$

После подстановки явного вида матриц можно увидеть, что оно эквивалентно формуле суммирования Френкеля–Тураева (3.8).

Поскольку $M_{nm}(a, a) = \delta_{nm}$ и $D_{nm}(bc/q; b, c) = \delta_{nm}$, полагая $t = k$ в (6.5), находим $M(a, k)M(k, a) = 1$. Таким образом, обращение матрицы M достигается перестановкой параметров a и k (для случая $p = 0$ этот факт был установлен в [68]; более детальное обсуждение подобных обращений матриц дается в [53], [56], [69]). Поэтому $\tilde{\alpha}(a, k) = \beta(k, a)$ и $\tilde{\beta}(a, k) = \alpha(k, a)$ определяют новые пары Бэйли, к которым можно применить преобразования (6.4). Описанные правила составления новых пар Бэйли порождают двоичное дерево тождеств для различных произведений матриц M и D , эквивалентных некоторым нетривиальным тождествам для (многократных) эллиптических гипергеометрических рядов.

Из матричного соотношения $M(a, f)M(f, a) = 1$ находим простейшие пары Бэйли $\alpha_n^{(i)}(a, f) = M_{ni}(f, a)$ и $\beta_n^{(i)}(a, f) = \delta_{ni}$. Положим $\alpha'(a, t) = D(a; d, e) \times M(f, a)$ и $\beta'(a, t) = K(f, t, d, e)$, где $qaf = tde$ и подразумевается, что α' и β' являются матрицами, столбцы которых образуют пары Бэйли. Тогда равенство $\beta'(a, t) = M(a, t)\alpha'(a, t)$ эквивалентно (6.5). Соотношение $\beta''(a, k) = M(a, k) \times \alpha''(a, k)$ с $\alpha''(a, k) = D(a; b, c)\alpha'(a, t)$ и $\beta''(a, k) = K(t, k, b, c)\beta'(a, t)$, где $qat = kbc$, приводит к тождеству

$$\begin{aligned} {}_{12}V_{11}(a; b, c, d, e, kq^n, q^{-n}, af^{-1}; q, p) &= \frac{\theta(qa, k/t, qt/b, qt/c)_n}{\theta(k/a, qt, kb/t, kc/t)_n} \\ &\times {}_{12}V_{11}\left(t; b, c, \frac{td}{a}, \frac{te}{a}, kq^n, q^{-n}, tf^{-1}; q, p\right), \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $f = kbcd/(aq)^2$. Это соотношение представляет собой эллиптический аналог преобразования Бэйли для обрывающихся ${}_{10}\varphi_9$ -рядов [3], впервые доказанный в [8] другим способом. Существует также четырехчленное преобразование

Бэйли для необрывающихся $_{10}\varphi_9$ -рядов [3]. Его эллиптическим обобщением является преобразование V -функции (5.8) (записанное в интегральной форме, поскольку его аналог в виде бесконечных рядов не имеет корректного определения).

Интегральные аналоги цепочек Бэйли были открыты в работе [30], где с помощью этой техники построен ряд преобразований симметрии для эллиптических гипергеометрических интегралов. Функции $\alpha(z, t)$ и $\beta(z, t)$ образуют по определению эллиптическую интегральную пару Бэйли по отношению к параметру t , если они связаны соотношением

$$\beta(w, t) = \kappa \int_{\mathbb{T}} \Gamma(tw^{\pm 1}z^{\pm 1}; p, q) \alpha(z, t) \frac{dz}{z}. \quad (6.7)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\alpha(z, t)$ и $\beta(z, t)$ образуют эллиптическую интегральную пару Бэйли по отношению к параметру t , $|t| < 1$. Возьмем параметры w, u, s , удовлетворяющие условиям $w \in \mathbb{T}$ и $|s|, |u| < 1$, $|pq| < |t^2 s^2 u|$. Тогда функции

$$\begin{aligned} \alpha'(w, st) &= \frac{\Gamma(tuw^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(ts^2uw^{\pm 1}; p, q)} \alpha(w, t), \\ \beta'(w, st) &= \kappa \frac{\Gamma(t^2s^2, t^2suw^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(s^2, t^2, suw^{\pm 1}; p, q)} \int_{\mathbb{T}} \frac{\Gamma(sw^{\pm 1}x^{\pm 1}, ux^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(x^{\pm 2}, t^2s^2ux^{\pm 1}; p, q)} \beta(x, t) \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

определяют новую интегральную пару Бэйли по отношению к параметру st , а функции

$$\begin{aligned} \alpha'(w, t) &= \kappa \frac{\Gamma(s^2t^2, uw^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(s^2, t^2, w^{\pm 2}, t^2s^2uw^{\pm 1}; p, q)} \int_{\mathbb{T}} \frac{\Gamma(t^2sux^{\pm 1}, sw^{\pm 1}x^{\pm 1}p, q)}{\Gamma(sux^{\pm 1}; p, q)} \alpha(x, st) \frac{dx}{x}, \\ \beta'(w, t) &= \frac{\Gamma(tuw^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(ts^2uw^{\pm 1}; p, q)} \beta(w, st) \end{aligned}$$

определяют новую интегральную пару Бэйли по отношению к параметру t .

Для доказательства первого утверждения достаточно подставить соотношение (6.7) в определение $\beta'(w, st)$, поменять порядок интегрирования и воспользоваться эллиптическим бета-интегралом (3.1). По такой же схеме доказывается и второе утверждение.

В работе [36] показано, что при определенных ограничениях интегральное преобразование $\alpha(x, t) \rightarrow \beta(x, t)$ имеет очень простое обращение. Пусть $p, q, t \in \mathbb{C}$ таковы, что $|p|, |q| < |t|^2 < 1$. Для фиксированного $w \in \mathbb{T}$ обозначим через C_w контур внутри кольца $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |t| - \epsilon < |z| < |t|^{-1} + \epsilon\}$ для бесконечно малого положительного ϵ такого, что точки $t^{-1}w^{\pm 1}$ лежат внутри C_w . Пусть $f(z, t)$ – голоморфная функция на A , удовлетворяющая $f(z, t) = f(z^{-1}, t)$. Определим интегральное преобразование

$$g(w, t) = \kappa \int_{C_w} \delta(z, w; t^{-1}) f(z, t) \frac{dz}{z}, \quad (6.8)$$

где

$$\delta(z, w; t^{-1}) = \frac{\Gamma(t^{-1}w^{\pm 1}z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(t^2, z^{\pm 2}; p, q)}.$$

Тогда при $|t| < |z| < |t|^{-1}$ верно

$$f(z, t) = \kappa \int_{\mathbb{T}} \delta(w, z; t) g(w, t) \frac{dw}{w}. \quad (6.9)$$

Это соотношение совпадает по сути с определением эллиптических интегральных пар Бэйли. Можно показать, что указанные выше два способа построения цепочек интегральных пар Бэйли связаны друг с другом приведенным обращением интегрального преобразования (6.8).

С помощью теоремы 5 можно порождать бесконечные последовательности пар Бэйли, стартуя от некоторой начальной пары. Простейшую пару можно построить с помощью эллиптического бета-интеграла (3.1). Каждое новое применение указанных выше подстановок вводит два новых параметра. Равенство (6.7), примененное к возникающим новым парам Бэйли, приводит к бинарному дереву тождеств для многократных эллиптических гипергеометрических интегралов со многими параметрами.

В качестве иллюстрации приведем цепочку нетривиальных соотношений для интегралов

$$I^{(m)}(t_1, \dots, t_{2m+6}) = \kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{j=1}^{2m+6} \Gamma(t_j z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz}{z}, \quad \prod_{j=1}^{2m+6} t_j = (pq)^{m+1}, \quad (6.10)$$

где $|t_j| < 1$. С помощью эллиптического бета-интеграла (3.1) легко убедиться в справедливости рекурсии

$$\begin{aligned} I^{(m+1)}(t_1, \dots, t_{2m+8}) &= \frac{\prod_{2m+5 \leq k < l \leq 2m+8} \Gamma(t_k t_l; p, q)}{\Gamma(\rho_m^2; p, q)} \\ &\times \kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{k=2m+5}^{2m+8} \Gamma(\rho_m^{-1} t_k w^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(w^{\pm 2}; p, q)} I^{(m)}(t_1, \dots, t_{2m+4}, \rho_m w, \rho_m w^{-1}) \frac{dw}{w}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

где $\rho_m^2 = \prod_{k=2m+5}^{2m+8} t_k / (pq)$. Это равенство дает конкретную реализацию пар Бэйли $\alpha \sim I^{(m)}$ и $\beta \sim I^{(m+1)}$ после переобозначения параметров. При $m = 0$ подстановка явного выражения для $I^{(0)}$ (3.1) в правую часть (6.11) приводит к тождеству (5.2). Другое важное следствие рекурсии (6.11) рассматривается в следующем разделе. В общем случае равенство (6.11) порождает m -кратное интегральное представление для $I^{(m)}$, аналогичное эйлеровскому представлению для $_{m+1}F_m$ -функций.

7. Биортогональные функции гипергеометрического типа

7.1. Дискретные биортогональные функции с непрерывной мерой.

Обозначим ряд $\mathcal{E}(\mathbf{t}) := {}_{12}V_{11}(t_0^2; t_0 t_1, \dots, t_0 t_7; q, p)$ с условиями балансировки $\prod_{m=0}^7 t_m = q^2$ и обрыва $t_0 t_k = q^{-n}$ для некоторого k . Смежные с $\mathcal{E}(\mathbf{t})$ функции, получающиеся заменой параметров t_i и t_k на $t_i q$ и $t_k q^{-1}$, будем обозначать $\mathcal{E}(t_i^+, t_k^-)$. Тогда с помощью формулы сложения для тэта-функций нетрудно

проверить равенство [9], [46]

$$\mathcal{E}(\mathbf{t}) - \mathcal{E}(t_6^-, t_7^+) = \frac{\theta(qt_0^2, q^2t_0^2, qt_7/t_6, t_6t_7/q; p)}{\theta(qt_0/t_6, q^2t_0/t_6, t_0/t_7, t_7/qt_0; p)} \prod_{r=1}^5 \frac{\theta(t_0t_r; p)}{\theta(qt_0/t_r; p)} \mathcal{E}(t_0^+, t_6^-). \quad (7.1)$$

Подстановка эллиптического аналога преобразования Бэйли и его итераций в (7.1) позволяет построить множество других формул подобного типа. Одна из них имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(t_0t_7; p)}{\theta(t_6/(qt_0), t_6/(q^2t_0), t_6/t_7; p)} \prod_{r=1}^5 \theta\left(\frac{t_r t_6}{q}; p\right) \mathcal{E}(t_0^+, t_6^-) \\ & + \frac{\theta(t_0t_6; p)}{\theta(t_7/(qt_0), t_7/(q^2t_0), t_7/t_6; p)} \prod_{r=1}^5 \theta\left(\frac{t_r t_7}{q}; p\right) \mathcal{E}(t_0^+, t_7^-) \\ & = \frac{1}{\theta(qt_0^2, q^2t_0^2; p)} \prod_{r=1}^5 \theta\left(\frac{qt_0}{t_r}; p\right) \mathcal{E}(\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Заменим в (7.1) параметр t_6 на qt_6 , а t_7 на t_7/q и подставим $\mathcal{E}(t_0^+, t_7^-)$ из получающегося равенства и $\mathcal{E}(t_0^+, t_6^-)$ из (7.1) в (7.2). Это приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(t_0t_7, t_0/t_7, qt_0/t_7; p)}{\theta(qt_7/t_6, t_7/t_6; p)} \prod_{r=1}^5 \theta\left(\frac{q}{t_6t_r}; p\right) (\mathcal{E}(t_6^-, t_7^+) - \mathcal{E}(\mathbf{t})) \\ & + \frac{\theta(t_0t_6, t_0/t_6, qt_0/t_6; p)}{\theta(qt_6/t_7, t_6/t_7; p)} \prod_{r=1}^5 \theta\left(\frac{q}{t_7t_r}; p\right) (\mathcal{E}(t_6^+, t_7^-) - \mathcal{E}(\mathbf{t})) \\ & + \theta\left(\frac{q}{t_6t_7}; p\right) \prod_{r=1}^5 \theta(t_0t_r; p) \mathcal{E}(\mathbf{t}) = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Эти соотношения аналогичны уравнениям (5.6), (5.7) и (5.8) для V -функции и могут быть получены из них анализом вычетов для определенной последовательности полюсов подынтегральной функции. Заменим в (7.3) $\mathcal{E}$ -функцию на

$$R_n(x; q, p) = {}_{12}V_{11}\left(\frac{\varepsilon_6}{\varepsilon_8}; \frac{q}{\varepsilon_1\varepsilon_8}, \frac{q}{\varepsilon_2\varepsilon_8}, \frac{q}{\varepsilon_3\varepsilon_8}, q^{-n}, \frac{Aq^{n-1}}{\varepsilon_8}, \frac{\varepsilon_6}{x}, \varepsilon_6x; q, p\right), \quad (7.4)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ и $A = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_6\varepsilon_8$, и обозначим $q^{-n} = pq/(\varepsilon_4\varepsilon_8)$, $Aq^{n-1}/\varepsilon_8 = pq/(\varepsilon_5\varepsilon_8)$. Тогда после переобозначения параметров $t_0^2 = \varepsilon_6/\varepsilon_8$, $\dots$, $t_0t_7 = \varepsilon_6x$ мы получим уравнение (5.10) с $\varepsilon_7 = \varepsilon_8/q$ и с дискретными значениями одного из параметров. Таким образом, $R_n(x; q, p)$ определяет частное решение эллиптического гипергеометрического уравнения, обладающее свойством $R_n(px; q, p) = R_n(x; q, p)$. (Обозначения работы [11], где изучалась эта функция, переходят в наши после замен $t_{0,1,2} \rightarrow \varepsilon_{1,2,3}$, $t_3 \rightarrow \varepsilon_6$, $t_4 \rightarrow \varepsilon_8$, $\mu \rightarrow \varepsilon_4\varepsilon_8/(pq)$ и $A\mu/(qt_4) \rightarrow pq/(\varepsilon_5\varepsilon_8)$.)

Параметры $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6$ входят в (5.10) симметричным образом. В силу условия балансировки $\prod_{k=1}^8 \varepsilon_k = p^2q^2$ функция $R_n(x; q, p)$ инвариантна относительно замен $\varepsilon_k \rightarrow p\varepsilon_k$, $k = 1, \dots, 5$. Это обеспечивает симметричность (7.4)

по $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$, и любой из этих параметров можно использовать для обрыва ряда. Перестановка одного из параметров $\varepsilon_{1,2,3,5}$ с ε_6 и использование преобразования Бэйли для обрывающихся ${}_{12}V_{11}$ -рядов приводят к $R_n(x; q, p)$ с точностью до некоторого множителя, не зависящего от x .

Отождествим теперь параметры в уравнении (7.3) другим способом:

$$\begin{aligned} t_0^2 &= \frac{\varepsilon_6}{\varepsilon_8}, & t_0 t_{1,2,3} &= \frac{q}{\varepsilon_{1,2,3} \varepsilon_8}, & t_0 t_4 &= \frac{\varepsilon_6}{x}, \\ t_0 t_5 &= \varepsilon_6 x, & t_0 t_6 &= q^{-n}, & t_0 t_7 &= \frac{A}{\varepsilon_8} q^{n-1}. \end{aligned}$$

Это приводит к трехчленному рекуррентному соотношению по индексу n :

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(Aq^{n-1}/\varepsilon_8, \varepsilon_6 q^{2-n}/A, \varepsilon_6 q^{1-n}/A; p)}{\theta(Aq^{2n-1}/\varepsilon_8, Aq^{2n}/\varepsilon_8; p)} \prod_{r=1}^3 \theta(\varepsilon_r \varepsilon_6 q^n; p) \theta\left(\frac{q^{n+1} x^{\pm 1}}{\varepsilon_8}; p\right) (R_{n+1} - R_n) \\ & + \frac{\theta(q^{-n}, \varepsilon_6 q^n/\varepsilon_8, \varepsilon_6 q^{1+n}/\varepsilon_8; p)}{\theta(q^{1-2n}\varepsilon_8/A, q^{2-2n}\varepsilon_8/A; p)} \\ & \quad \times \prod_{r=1}^3 \theta\left(\frac{\varepsilon_r \varepsilon_6 \varepsilon_8 q^{1-n}}{A}; p\right) \theta\left(\frac{q^{2-n} x^{\pm 1}}{A}; p\right) (R_{n-1} - R_n) \\ & + \theta\left(\frac{\varepsilon_6 q^n}{A}, \varepsilon_6 x^{\pm 1}; p\right) \prod_{r=1}^3 \theta\left(\frac{q}{\varepsilon_r \varepsilon_8}; p\right) R_n = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

с начальными условиями $R_{-1} = 0$ и $R_0 = 1$.

Введем функции

$$z(x) = \frac{\theta(x\xi^{\pm 1}; p)}{\theta(x\eta^{\pm 1}; p)}, \quad \alpha_n = z\left(\frac{q^n}{\varepsilon_8}\right), \quad \beta_n = z(Aq^{n-1}),$$

где ξ и η – произвольные калибровочные параметры, $\xi \neq \eta^{\pm 1} p^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда соотношение (7.5) может быть переписано в более структурированном виде

$$\begin{aligned} & (z(x) - \alpha_{n+1}) \rho\left(\frac{Aq^{n-1}}{\varepsilon_8}\right) (R_{n+1}(x; q, p) - R_n(x; q, p)) \\ & + (z(x) - \beta_{n-1}) \rho(q^{-n}) (R_{n-1}(x; q, p) - R_n(x; q, p)) \\ & + \delta(z(x) - z(\varepsilon_6)) R_n(x; q, p) = 0, \end{aligned} \quad (7.6)$$

где

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{\theta(t, \varepsilon_6/(\varepsilon_8 t), q\varepsilon_6/(\varepsilon_8 t), qt/(\varepsilon_1 \varepsilon_2), qt/(\varepsilon_2 \varepsilon_3), qt/(\varepsilon_1 \varepsilon_3), q^2 t \eta^{\pm 1}/A; p)}{\theta(qt^2 \varepsilon_8/A, q^2 t^2 \varepsilon_8/A; p)}, \\ \delta &= \theta\left(\frac{q^2 \varepsilon_6}{A}, \frac{q}{\varepsilon_1 \varepsilon_8}, \frac{q}{\varepsilon_2 \varepsilon_8}, \frac{q}{\varepsilon_3 \varepsilon_8}, \varepsilon_6 \eta^{\pm 1}; p\right). \end{aligned}$$

Начальные условия $R_{-1} = 0$ и $R_0 = 1$ гарантируют, что $R_n(x; q, p)$ являются рациональными функциями $z(x)$ с полюсами в точках $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (т. е. вся зависимость от x входит в R_n только через переменную $z(x)$).

Предположим, что ϕ_λ является решением абстрактной обобщенной спектральной задачи $\mathcal{D}_1\phi_\lambda = \lambda\mathcal{D}_2\phi_\lambda$ с некоторыми операторами $\mathcal{D}_{1,2}$. Пусть задано также некоторое скалярное произведение $\langle \psi | \phi \rangle$, которое определяет формальные сопряженные операторы $\mathcal{D}_{1,2}^T$ по обычному правилу $\langle \mathcal{D}_{1,2}^T\psi | \phi \rangle = \langle \psi | \mathcal{D}_{1,2}\phi \rangle$. Пусть ψ_λ – решения дуальной обобщенной задачи на собственные значения $\mathcal{D}_1^T\psi_\lambda = \lambda\mathcal{D}_2^T\psi_\lambda$. Тогда $0 = \langle \psi_\mu | (\mathcal{D}_1 - \lambda\mathcal{D}_2)\phi_\lambda \rangle = (\mu - \lambda)\langle \mathcal{D}_2^T\psi_\mu | \phi_\lambda \rangle$, т. е. функция $\mathcal{D}_2^T\psi_\mu$ ортогональна ϕ_λ при $\mu \neq \lambda$. Следствия этого хорошо известно в линейной алгебре факта детально исследованы Жедановым [70] в случае, когда $\mathcal{D}_{1,2}$ являются матрицами Якоби (т. е. трехдиагональными матрицами). В частности, было показано, что такие обобщенные задачи на собственные значения эквивалентны теории биортогональных рациональных функций, обобщающих ортогональные многочлены. Они связаны также с рекуррентным соотношением типа R_{II} , изучавшимся в [71], и с соотношениями ортогональности, появляющимися в теории многоточечной аппроксимации Паде [72], [73]. Рекуррентное соотношение (7.6) попадает в этот класс задач, так что существует линейный функционал $\mathcal{L}$ с условием $\mathcal{L}\{T_m(x; q, p)R_n(x; q, p)\} = h_n\delta_{nm}$ для некоторых рациональных функций T_m и нормировочных постоянных h_n .

Эллиптическое гипергеометрическое уравнение для R_n -функций может быть записано в виде обобщенной задачи на собственные значения [11]:

$$\mathcal{D}(\varepsilon'_4, \varepsilon'_5)R_n = \lambda_n\mathcal{D}(\varepsilon''_4, \varepsilon''_5)R_n,$$

где

$$\mathcal{D}(\varepsilon_4, \varepsilon_5) = A(x)(T_{q,x} - 1) + A(x^{-1})(T_{q,x}^{-1} - 1) + \nu, \quad T_{q,x}f(x) = f(qx),$$

обозначает оператор, с помощью которого можно переписать равенство (5.10) в виде $\mathcal{D}(\varepsilon_4, \varepsilon_5)f(x) = 0$. Штрихованные параметры произвольны при ограничении $\varepsilon'_4\varepsilon'_5 = \varepsilon''_4\varepsilon''_5 = \varepsilon_4\varepsilon_5$, а остальные параметры остаются неизменными (поэтому зависимость от них не указывается). Спектральная переменная

$$\lambda_n = \frac{\theta(\varepsilon_4/\varepsilon'_4, \varepsilon_4/\varepsilon'_5; p)}{\theta(\varepsilon_4/\varepsilon''_4, \varepsilon_4/\varepsilon''_5; p)}$$

дискретна, так как $\varepsilon_4 = pq^{n+1}/\varepsilon_8$. Если взять в качестве функционала $\mathcal{L}$ свертку, ядро которой совпадает с ядром эллиптического бета-интеграла,

$$\mathcal{L}\{\phi(x)\psi(x)\} = \kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{j=1,2,3,6,8} \Gamma(\varepsilon_j x^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(x^{\pm 2}, Ax^{\pm 1}; p, q)} \phi(x)\psi(x) \frac{dx}{x},$$

то функции

$$T_n(x; q, p) = {}_{12}V_{11}\left(\frac{A\varepsilon_6}{q}; \frac{A}{\varepsilon_1}, \frac{A}{\varepsilon_2}, \frac{A}{\varepsilon_3}, \varepsilon_6 x, \frac{\varepsilon_6}{x}, q^{-n}, \frac{Aq^{n-1}}{\varepsilon_8}; q, p\right) \quad (7.7)$$

служат аналогом $\mathcal{D}_2^T\psi_\mu$ для $R_n(x; q, p)$. Функции $T_n(x; q, p)$ являются рациональными функциями $z(x)$ с полюсами в точках $\beta_1, \dots, \beta_n$ и получаются из $R_n(x; q, p)$ после замены параметра $\varepsilon_8 \rightarrow pq/A$ (при этом зависимость от p в параметрах исчезает из-за эллиптичности ${}_{12}V_{11}$ -ряда по ним).

Обозначим $R_{nm}(x) := R_n(x; q, p)R_m(x; p, q)$ и $T_{nm}(x) := T_n(x; q, p)T_m(x; p, q)$, где все ${}_{12}V_{11}$ -ряды одновременно обрываются благодаря модифицированному условию обрыва $\varepsilon_4\varepsilon_8 = p^{m+1}q^{n+1}$, $n, m = 0, 1, \dots$. Так как $R_m(qx; p, q) = R_m(x; p, q)$, функции R_{nm} являются решениями уже не одной, а двух обобщенных задач на собственные значения, отличающихся перестановкой p и q . Поэтому соотношения ортогональности в нашем случае оказываются более сложными, чем для биортогональных рациональных функций.

ТЕОРЕМА 6. *Функции $R_{nm}(x)$ и $T_{nm}(x)$ удовлетворяют следующему соотношению двухиндексной биортогональности:*

$$\kappa \int_{C_{mn,kl}} T_{nl}(x) R_{mk}(x) \frac{\prod_{j \in S} \Gamma(\varepsilon_j x^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(x^{\pm 2}, Ax^{\pm 1}; p, q)} \frac{dx}{x} = h_{nl} \delta_{mn} \delta_{kl}, \quad (7.8)$$

где $S = \{1, 2, 3, 6, 8\}$, $C_{mn,kl}$ обозначает контур, отделяющий последовательности точек $\varepsilon_j p^a q^b$ ($j = 1, 2, 3, 6$), $\varepsilon_8 p^{a-k} q^{b-m}$, $p^{a+1-l} q^{b+1-n}/A$, $a, b = 0, 1, 2, \dots$, от их $x \rightarrow x^{-1}$ партнеров, а нормировочные постоянные имеют вид

$$h_{nl} = \frac{\prod_{j < k, j, k \in S} \Gamma(\varepsilon_j \varepsilon_k; p, q)}{\prod_{j \in S} \Gamma(A \varepsilon_j^{-1}; p, q)} h_n(q, p) \cdot h_l(p, q),$$

$$h_n(q, p) = \frac{\theta(A/(q\varepsilon_8); p) \theta(q, q\varepsilon_6/\varepsilon_8, \varepsilon_1\varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_3, \varepsilon_2\varepsilon_3, A\varepsilon_6)_n q^{-n}}{\theta(Aq^{2n}/(q\varepsilon_8); p) \theta(1/(\varepsilon_6\varepsilon_8), \varepsilon_1\varepsilon_6, \varepsilon_2\varepsilon_6, \varepsilon_3\varepsilon_6, A/(q\varepsilon_6), A/(q\varepsilon_8))_n}.$$

Прямое доказательство этого утверждения путем непосредственного вычисления интеграла в левой части с помощью формулы (3.1) и суммы Френкеля–Тураева дано в работе [11]. Возникновение таких двухиндексных соотношений ортогональности для функций одной переменной – новое явление в теории специальных функций. Отметим, что $R_{nm}(x)$ и $T_{nm}(x)$ являются мероморфными функциями $x \in \mathbb{C}^*$ с существенными особенностями при $x = 0, \infty$; только при $k = l = 0$ или $n = m = 0$ они становятся рациональными функциями некоторого аргумента, зависящего от x . При $k = l = 0$ можно перейти к пределу $p \rightarrow 0$ при фиксированных параметрах и получить функции $R_n(x; q, 0)$ и $T_n(x; q, 0)$, которые совпадают с семейством непрерывных ${}_{10}\varphi_9$ -биортогональных рациональных функций Рахмана [39]. Дальнейшее вырождение этих функций приводит к многочленам Аски–Вильсона [41]. Дополнительное ограничение на один из параметров в $R_n(x; q, p)$ и $T_n(x; q, p)$ приводит к конечномерной системе биортогональных рациональных функций дискретного аргумента [9], [74], которые обобщают функции Вильсона [75]. Элементарный подход к анализу этих функций, связанных с эллиптическими $6j$ -символами [8], предложен Розенгреном в [76]. Некоторые свойства функций $R_n(x; q, p)$ изучены в недавней работе [48].

Можно построить соотношение, аналогичное (7.8), на основе модифицированного эллиптического бета-интеграла (3.10) [31]. Для этого необходимо воспользоваться параметризацией базисных переменных через квазипериоды $\omega_{1,2,3}$ и перейти к функциям $r_n(u; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = R_n(e^{2\pi i u/\omega_2}, e^{2\pi i \omega_1/\omega_2}, e^{2\pi i \omega_3/\omega_2})$, где также сделана подстановка $\varepsilon_j = e^{2\pi i g_j/\omega_2}$. Аналогичным образом необходимо переобозначить $T_n(x; q, p)$ через $s_n(u; \omega_1, \omega_2, \omega_3)$, а $h_n(q, p)$ через $h_n(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Произведения

$$r_{nm}(u) = r_n(u; \omega_1, \omega_2, \omega_3) r_m(u; \omega_2, \omega_1, \omega_3)$$

и

$$s_{nm}(u) = s_n(u; \omega_1, \omega_2, \omega_3) s_m(u; \omega_2, \omega_1, \omega_3)$$

инвариантны относительно перестановок $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$, $n \leftrightarrow m$. Тогда для специально подобранного контура $\tilde{C}_{mn,kl}$ имеем

$$\tilde{\kappa} \int_{\tilde{C}_{mn,kl}} s_{nl}(u) r_{mk}(u) \frac{\prod_{j \in S} G(g_j \pm u; \omega)}{G(\pm 2u, \mathcal{A} \pm u; \omega)} \frac{du}{\omega_2} = \tilde{h}_{nl} \delta_{mn} \delta_{kl}, \quad (7.9)$$

где $\mathcal{A} = \sum_{j \in S} g_j$ и

$$\tilde{h}_{nl} = \frac{\prod_{j < m, j, m \in S} G(g_j + g_m; \omega)}{\prod_{j \in S} G(\mathcal{A} - g_j; \omega)} h_n(\omega_1, \omega_2, \omega_3) h_l(\omega_2, \omega_1, \omega_3).$$

В отличие от предыдущего случая, предельный переход на q -гипергеометрический уровень $\text{Im}(\omega_3/\omega_2), \text{Im}(\omega_3/\omega_1) \rightarrow +\infty$ (т.е. $p, r \rightarrow 0$) корректно определен и сохраняет двухиндексную структуру соотношений биортогональности. В частности, при этом $r_{nm}(u)$ -функция вырождается в произведение двух q -гипергеометрических рядов

$$\begin{aligned} r_{nm}(u; \omega_1, \omega_2) &= {}_{10}W_9(e^{2\pi i(g_6 - g_8)/\omega_2}; e^{2\pi i(\omega_1 - g_1 - g_8)/\omega_2}, \dots, e^{2\pi i(g_6 + u)/\omega_2}; q, q) \\ &\times {}_{10}W_9(e^{2\pi i(g_6 - g_8)/\omega_1}; e^{2\pi i(\omega_2 - g_1 - g_8)/\omega_1}, \dots, e^{2\pi i(g_6 + u)/\omega_1}; \tilde{q}^{-1}, \tilde{q}^{-1}), \end{aligned}$$

базисные переменные которых связаны модулярным преобразованием, а нормировка меры задается интегралом (3.13).

7.2. Обрывающаяся цепная дробь. В работе [46] вычислена обрывающаяся цепная дробь, связанная с рациональными функциями $R_n(x; q, p)$. Пусть U_n и V_n – числовые последовательности, удовлетворяющие трехчленному рекуррентному соотношению

$$\psi_{n+1} = \xi_n \psi_n + \eta_n \psi_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.10)$$

с некоторыми коэффициентами ξ_n и η_n и начальным условиям $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ и $V_0 = 1$, $V_1 = \xi_0$. Известно, что их отношение связано с конечной цепной дробью

$$\frac{U_n}{V_n} = \frac{1}{\xi_0 + \frac{\eta_1}{\xi_1 + \frac{\eta_2}{\xi_2 + \dots + \frac{\eta_{n-1}}{\xi_{n-1}}}}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.11)$$

Определим многочлены $z(x)$ n -й степени:

$$P_n(z(x)) = \kappa_n \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k) R_n(x; q, p), \quad \kappa_n = \prod_{j=0}^{n-1} \rho(aq^{j-1}),$$

и положим $P_0(z(x)) = 1$. Заменяя $R_n(x; q, p)$ на $P_n(z(x))$ в (7.6), получаем следующее трехчленное рекуррентное соотношение:

$$P_{n+1}(z) + (v_n - \rho_n z) P_n(z) + u_n (z - \alpha_n) (z - \beta_{n-1}) P_{n-1}(z) = 0 \quad (7.12)$$

с начальными условиями $P_{-1} = 0$, $P_0 = 1$ и рекуррентными коэффициентами

$$\begin{aligned} u_n &= \rho\left(\frac{1}{q^n}\right)\rho\left(\frac{Aq^{n-2}}{\varepsilon_8}\right), & \rho_n &= \rho\left(\frac{Aq^{n-1}}{\varepsilon_8}\right) + \rho\left(\frac{1}{q^n}\right) - \delta, \\ v_n &= \alpha_{n+1}\rho\left(\frac{Aq^{n-1}}{\varepsilon_8}\right) + \beta_{n-1}\rho\left(\frac{1}{q^n}\right) - \delta z(\varepsilon_6). \end{aligned} \quad (7.13)$$

В этом случае $V_n = P_n(z)$, а $U_n = P_{n-1}^{(1)}(z)$ – ассоциированные многочлены, имеющие степень $n - 1$ по z .

Предположим, что многочлен $P_{N+1}(z)$ имеет только простые нули, т. е.

$$P_{N+1}(z_s) = 0, \quad z_s \equiv z_s^{(N+1)}, \quad s = 0, 1, \dots, N, \quad z_s \neq z_{s'} \text{ при } s \neq s'.$$

Тогда соответствующая цепная дробь может быть разложена в простую дробь (как рациональная функция z)

$$\frac{P_N^{(1)}(z)}{P_{N+1}(z)} = \sum_{s=0}^N \frac{g_s}{z - z_s}, \quad g_s = \frac{P_N^{(1)}(z_s)}{P'_{N+1}(z_s)}. \quad (7.14)$$

Казоратиан любых двух решений U_n и V_n для (7.10) удовлетворяет соотношению

$$U_{n+1}V_n - U_nV_{n+1} = (-1)^n \eta_1 \cdots \eta_n (U_1V_0 - U_0V_1),$$

которое дает

$$P_n(z)P_n^{(1)}(z) - P_{n+1}(z)P_{n-1}^{(1)}(z) = h_n A_n(z)B_n(z), \quad (7.15)$$

где $h_n = u_1 u_2 \cdots u_n$ и

$$A_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i), \quad B_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - \beta_{i-1}).$$

Зафиксировав $n = N$ и положив $z = z_s$, $s = 0, 1, \dots, N$, в (7.15), можно выразить $P_N^{(1)}(z_s)$ через $P_N(z_s)$, h_N , $A_N(z_s)$ и $B_N(z_s)$. Это приводит к следующему удобному для вычислений выражению для вычетов полюсов g_s в (7.14):

$$g_s = \frac{h_N A_N(z_s) B_N(z_s)}{P'_{N+1}(z_s) P_N(z_s)}. \quad (7.16)$$

В пределе

$$\varepsilon_3 \varepsilon_6 = q^{-N+\epsilon}, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (7.17)$$

получаем, что $u_{N+1} \rightarrow 0$, и цепная дробь обрывается автоматически. Оказывается, что эта дробь вычисляется в замкнутом виде по формуле (7.14). При $\epsilon \rightarrow 0$ рациональная функция $R_{N+1}(x; q, p)$ расходится, так как эллиптический символ Похгаммера $\theta(\varepsilon_3 \varepsilon_6)_{N+1}$ в знаменателе последнего коэффициента ${}_{12}V_{11}$ -ряда стремится к нулю. Но одновременно имеем $\kappa_{N+1} \rightarrow 0$, так что многочлен $P_{N+1}(z)$ принимает конечное значение, и его нули находятся в явном виде: $z_s = z(\varepsilon_6 q^s)$, $s = 0, 1, \dots, N$. При этом оказывается, что многочлен $P_N(z_s)$ вычисляется в замкнутом виде по формуле суммирования Френкеля–Тураева.

Остальные величины, определяющие вычеты g_s , находятся достаточно легко, хотя и имеют громоздкие выражения.

Предположим, что выполнены условия простоты нулей z_s и другие ограничения на параметры, гарантирующие $u_k \neq 0$ при $k = 1, \dots, N$, описание которых мы пропускаем. Тогда обрывающаяся эллиптическая гипергеометрическая цепная дробь имеет следующее явное представление:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_0 z - v_0 - \frac{u_1(z - \alpha_1)(z - \beta_0)}{\rho_1 z - v_1 - \dots - \frac{u_N(z - \alpha_N)(z - \beta_{N-1})}{\rho_N z - v_N}}} \\ &= \frac{1}{(z(\varepsilon_6) - z(x))\delta} {}_{12}V_{11} \left(\frac{q\varepsilon_6}{\varepsilon_8}; q, \varepsilon_6\varepsilon_1, \varepsilon_6\varepsilon_2, \frac{qx}{\varepsilon_8}, \frac{q}{\varepsilon_8 x}, q^{-N}, \frac{\varepsilon_6 q^{N+2}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_8}; q, p \right), \end{aligned} \quad (7.18)$$

где в выражения для всех рекуррентных коэффициентов, включая δ , необходимо подставить $\varepsilon_3 = q^{-N}/\varepsilon_6$ и $z(x) = \theta(x\xi^{\pm 1}; p)/\theta(x\eta^{\pm 1}; p)$. В [46] этот результат был представлен в другой (аддитивной) системе обозначений.

Эта формула описывает наиболее общую обрывающуюся цепную дробь гипергеометрического типа, найденную к настоящему времени. При фиксированных параметрах в пределе $p \rightarrow 0$ получается обрывающаяся цепная дробь Гупты–Массона [77] (см. следствие 3.3), описываемая совершенно уравновешенным сбалансированным ${}_{10}\varphi_9$ -рядом. Дальнейшая спецификация параметров приводит к цепной дроби Ватсона, которая в свою очередь является q -аналогом известной цепной дроби Рамануджана (см. детали в [78]).

7.3. Непрерывная биортогональность V -функции. Описанные выше соотношения (7.8) соответствуют дискретным значениям одного из параметров в эллиптическом гипергеометрическом уравнении. В работе [79] показано, что V -функция с общим набором непрерывных параметров обладает также соотношениями биортогональности, характерными для непрерывных спектров.

Рассмотрим случай $m = 2$ в рекурсии (6.11). После задания ограничений на параметры $t_5 t_7 = t_6 t_8 = pq$ интеграл в левой части явно вычисляется. Тогда после ряда переобозначений и использования преобразования (5.2) возникает равенство

$$\phi(x; c, d \mid \xi; s) = \kappa \int_{\mathbb{T}} R(c, d, a, b; x, w \mid s) \phi(w; a, b \mid \xi; s) \frac{dw}{w}, \quad (7.19)$$

где базисные векторы имеют вид

$$\phi(w; a, b \mid \xi; s) = \Gamma \left(sa\xi^{\pm 1}, sb\xi^{\pm 1}, \sqrt{\frac{pq}{ab}} w^{\pm 1} \xi^{\pm 1}; p, q \right) \quad (7.20)$$

и

$$\begin{aligned} R(c, d, a, b; x, w \mid s) &= \left(\Gamma \left(\frac{pq}{ab}, \frac{ab}{pq}, w^{\pm 2}; p, q \right) \right)^{-1} \\ &\times V \left(sc, sd, \sqrt{\frac{pq}{cd}} x, \varepsilon \sqrt{\frac{pq}{cd}} x^{-1}, \frac{pq}{as}, \frac{pq}{bs}, \sqrt{\frac{ab}{pq}} w, \sqrt{\frac{ab}{pq}} w^{-1} \right). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Здесь параметры a, b, c, d, s и x, ξ произвольны, но их выбор должен быть согласован с условием, что фигурирующие контуры интегрирования разделяют сходящиеся к нулю и уходящие на бесконечность последовательности полюсов подынтегральных выражений. Переменная ξ входит только в базисные векторы $\phi(w; a, b \mid \xi; s)$, и ядро R может рассматриваться как “матрица вращения” с непрерывными индексами x и w , позволяющая менять произвольным образом параметры a и b . Равенство (7.21) является интегральным обобщением соотношения, использованного в [76] Розенгреном для вывода свойств эллиптических $6j$ -символов.

Обозначая $w = e^{i\theta}$, $y = \cos \theta$ и пользуясь равенством

$$\int_{\mathbb{T}} f(\cos \theta) \frac{dw}{iw} = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta) d\theta = 2 \int_{-1}^1 f(y) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

можно записать

$$\phi(x; c, d \mid \xi; s) = 2i\kappa \int_{-1}^1 R(c, d, a, b; x, e^{i\theta} \mid s) \phi(e^{i\theta}; a, b \mid \xi; s) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}. \quad (7.22)$$

В пределе $c \rightarrow a$ и $d \rightarrow b$ возникает следующее соотношение в смысле обобщенных функций:

$$\lim_{c \rightarrow a, d \rightarrow b} R(c, d, a, b; e^{i\varphi}, e^{i\theta}) = \frac{2\pi\sqrt{1-y^2}}{(p; p)_{\infty}(q; q)_{\infty}} \delta(v - y), \quad (7.23)$$

где $v = \cos \varphi$.

Двукратное использование (7.19) с различными параметрами очевидным образом приводит к свойству самовоспроизведения для ядра

$$\kappa \int_{\mathbb{T}} R(a, b, c, d; x, w \mid s) R(c, d, e, f; w, z \mid s) \frac{dw}{w} = R(a, b, e, f; x, z \mid s) \quad (7.24)$$

и соотношению биортогональности

$$\int_{-1}^1 R(a, b, c, d; e^{i\varphi}, e^{i\theta} \mid s) R(c, d, a, b; e^{i\theta}, e^{i\varphi'} \mid s) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\sqrt{1-v^2}}{(2i\kappa)^2} \delta(v - v'), \quad (7.25)$$

где $v = \cos \varphi$ и $v' = \cos \varphi'$. Подстановка выражения для R -функций (7.21) в (7.25) приводит к равенству

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{1}{\Gamma(e^{\pm 2i\theta}; p, q)} V\left(sa, sb, \sqrt{\frac{pq}{ab}} e^{i\varphi}, \sqrt{\frac{pq}{ab}} e^{-i\varphi}, \frac{pq}{c}, \frac{pq}{d}, \sqrt{\frac{cd}{\rho}} e^{i\theta}, \sqrt{\frac{cd}{\rho}} e^{-i\theta}\right) \\ & \times V\left(sc, sd, \sqrt{\frac{pq}{cd}} e^{i\theta}, \sqrt{\frac{pq}{cd}} e^{-i\theta}, \frac{pq}{as}, \frac{pq}{bs}, \sqrt{\frac{ab}{pq}} e^{i\varphi'}, \sqrt{\frac{ab}{pq}} e^{-i\varphi'}\right) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ & = \Gamma\left(\frac{ab}{pq}, \frac{pq}{ab}, \frac{cd}{pq}, \frac{pq}{cd}, e^{\pm 2i\varphi}; p, q\right) \frac{\sqrt{1-v^2}}{(2i\kappa)^2} \delta(v - v'). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Параметры v и v' могут рассматриваться как непрерывные спектральные переменные в операторной формулировке эллиптического гипергеометрического уравнения. Поэтому соотношение (7.26) должно вытекать из этого уравнения, но точная связь между ними еще не установлена.

8. Связь с алгеброй Складина

В [34] Рэйнс ввел интересный конечно-разностный оператор, связанный с системой корней BC_n . При $n = 1$ он может быть представлен в виде

$$D(a, b, c, d; p; q) = \frac{\theta(az, bz, cz, dz; p)}{z\theta(z^2; p)} T_{z, q}^{1/2} + \frac{\theta(az^{-1}, bz^{-1}, cz^{-1}, dz^{-1}; p)}{z^{-1}\theta(z^{-2}; p)} T_{z, q}^{-1/2}, \quad (8.1)$$

где $T_{z, q}^{\pm 1/2} f(z) = f(q^{\pm 1/2} z)$ – оператор q -сдвига и a, b, c, d – произвольные параметры. Позднее Рэйнс также заметил [35], [80], что этот оператор эквивалентен общей линейной комбинации четырех образующих алгебры Складина $S_0, \dots, S_3$ [81], [82].

Определяющие соотношения алгебры Складина имеют вид

$$\begin{aligned} S_\alpha S_\beta - S_\beta S_\alpha &= i(S_0 S_\gamma + S_\gamma S_0), \\ S_0 S_\alpha - S_\alpha S_0 &= iJ_{\beta\gamma}(S_\beta S_\gamma + S_\gamma S_\beta), \end{aligned} \quad (8.2)$$

где $J_{\beta\gamma}$ – структурные постоянные алгебры, а (α, β, γ) – произвольная циклическая перестановка $(1, 2, 3)$. В [82] найдено представление S_a в виде разностных операторов:

$$S_a = i^{\delta_{a,2}} \frac{\theta_{a+1}(\eta | \tau)}{\theta_1(2u | \tau)} (\theta_{a+1}(2u - 2g | \tau) e^{\eta \partial_u} - \theta_{a+1}(-2u - 2g | \tau) e^{-\eta \partial_u}),$$

где $e^{\pm \eta \partial_u} f(u) = f(u \pm \eta)$, и при условии квантования $g = \ell \eta$, $\ell = 0, 1/2, 1, \dots$, описано их действие на пространстве четных тэта-функций порядка 4ℓ . Комбинация образующих

$$\begin{aligned} 2\Delta(a_1, a_2, a_3, a_4) &:= \frac{\prod_{j=1}^3 \theta_1(a_j + a_4 + 2g)}{\theta_1(\eta)} S_0 - \frac{\prod_{j=1}^3 \theta_1(a_j + a_4 + 2g + \frac{1}{2})}{\theta_1(\eta + \frac{1}{2})} S_1 \\ &\quad - i e^{\pi i(\frac{\tau}{2} + 2a_4 + 2g - \eta)} \frac{\prod_{j=1}^3 \theta_1(a_j + a_4 + 2g + \frac{1+\tau}{2})}{\theta_1(\eta + \frac{1+\tau}{2})} S_2 \\ &\quad + e^{\pi i(\frac{\tau}{2} + 2a_4 + 2g - \eta)} \frac{\prod_{j=1}^3 \theta_1(a_j + a_4 + 2g + \frac{\tau}{2})}{\theta_1(\eta + \frac{\tau}{2})} S_3 \end{aligned}$$

с нормировкой $\sum_{j=1}^4 a_j = -4g$ представима в виде [80]

$$\Delta(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{\prod_{j=1}^4 \theta_1(a_j + u)}{\theta_1(2u)} e^{\eta \partial_u} + \frac{\prod_{j=1}^4 \theta_1(a_j - u)}{\theta_1(-2u)} e^{-\eta \partial_u}.$$

При переходе к мультипликативной системе обозначений

$$(a, b, c, d) := e^{2\pi i a_{1,2,3,4}}, \quad \rho := abcd = e^{-8\pi i g}, \quad z := e^{2\pi i u}, \quad q := e^{4\pi i \eta}$$

возникает указанный выше оператор (8.1):

$$\Delta(a_1, a_2, a_3, a_4) = (ip^{1/8}(p; p)_\infty)^3 e^{4\pi i g} D(a, b, c, d; p; q).$$

Стандартная задача на собственные значения $D\psi = \lambda\psi$ оказывается очень сложной, так как представляет собой разностный аналог уравнения Гойна [79]. С одной стороны, известно, что задача на собственные значения для одночастичного гамильтониана модели Иноземцева [65] эквивалентна уравнению Гойна. С другой стороны, классические уравнения движения для этого гамильтониана с модулярным параметром τ , рассматриваемым как переменная времени, приводят к уравнению Пенлеве VI [83]. Сам D -оператор оказывается связанным с моделью ван Диежена [62], [79]. Все это и связь с эллиптическими гипергеометрическими функциями, описанная ниже, демонстрируют некоторую математическую универсальность оператора (8.1).

Рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения вида

$$\begin{aligned} D(a, b, c, d; p; q) f(z; w; q^{1/2}a, q^{1/2}b; \rho) \\ = \lambda(w) D(a, b, c', d'; p; q) f(z; w; q^{1/2}a, q^{1/2}b; \rho), \end{aligned} \quad (8.3)$$

где $cd = c'd'$. Это уравнение решается в явном виде. Используя параметризацию

$$\lambda(w) = \frac{\theta(w\sqrt{c/d}, w\sqrt{d/c}; p)}{\theta(w\sqrt{c'/d'}, w\sqrt{d'/c'}; p)},$$

при $|q| < 1$ получаем [79]

$$f(z; w; a, b; \rho) = \Gamma\left(\frac{pq}{a} z^{\pm 1}, \frac{pq}{b} z^{\pm 1}, \sqrt{\frac{ab}{\rho}} w^{\pm 1} z^{\pm 1}; p, q\right), \quad (8.4)$$

с точностью до умножения на произвольную функцию $\varphi(z)$, $\varphi(qz) = \varphi(z)$. Очевидно, что функция (8.4) совпадает с базисным вектором (7.20) после переобозначения параметров.

Для инвариантных относительно преобразования $z \rightarrow z^{-1}$ функций, $\psi(z) = \psi(z^{-1})$, определим скалярное произведение

$$\langle \chi(z), \psi(z) \rangle = \kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\chi(z)\psi(z)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz}{z}. \quad (8.5)$$

Тогда формально сопряженный к D оператор имеет вид

$$D^*(a, b, c, d; p; q) = \frac{cd}{q^{1/2}} D\left(\frac{pq^{1/2}}{a}, \frac{pq^{1/2}}{b}, \frac{q^{1/2}}{c}, \frac{q^{1/2}}{d}; p; q\right).$$

Дуальная задача

$$D^*(a, b, c, d; p; q) g(z; v; a, b; \rho) = \lambda(v) D^*(a, b, c', d'; p; q) g(z; v; a, b; \rho) \quad (8.6)$$

имеет решение

$$g(z; v; a, b; \rho) = \Gamma\left(az^{\pm 1}, bz^{\pm 1}, \sqrt{\frac{\rho}{ab}} v^{\pm 1} z^{\pm 1}; p, q\right), \quad (8.7)$$

также определенное с точностью до умножения на произвольную функцию $\varphi(z)$, $\varphi(qz) = \varphi(z)$. Теперь нетрудно заметить, что скалярное произведение

решений (8.4) и (8.7) приводит к V -функции:

$$\begin{aligned} & \langle g(z; v; a, b; e), f(z; w; c, d; e) \rangle \\ &= V\left(a, b, \sqrt{\frac{e}{ab}} v, \sqrt{\frac{e}{ab}} v^{-1} \frac{pq}{c}, \frac{pq}{d}, \sqrt{\frac{cd}{e}} w, \sqrt{\frac{cd}{e}} w^{-1}; p, q\right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Таким образом, эллиптический аналог гипергеометрической функции Гаусса оказывается напрямую связан с обобщенной спектральной задачей для линейной комбинации генераторов алгебры Складина. Необходимо отметить, что наше скалярное произведение (8.5) отличается от инвариантной меры Складина [82]. В [80], используя эту меру, Розенгрэн построил интегральное представление для эллиптических $6j$ -символов и доказал гипотезу Складина о воспроизводящем ядре для представлений в пространстве тэта-функций.

Неоднозначности в выборе функций f и g можно фиксировать требованием, чтобы эти функции удовлетворяли одновременно и уравнениям, полученным из (8.3) и (8.6) перестановкой p и q (так как равенства $\varphi(qz) = \varphi(pz) = \varphi(z)$ приводят к $\varphi(z) = \text{const}$). Это означает, что мы вводим в рассмотрение вторую копию алгебры Складина, полученную из первой перестановкой τ и 2η :

$$\tilde{S}_a = i^{\delta_{a,2}} \frac{\theta_{a+1}\left(\frac{\tau}{2} \mid 2\eta\right)}{\theta_1(2u \mid 2\eta)} \left(\theta_{a+1}(2u - 2g \mid 2\eta) e^{\frac{\tau}{2}\partial_u} - \theta_{a+1}(-2u - 2g \mid 2\eta) e^{-\frac{\tau}{2}\partial_u} \right).$$

При этом для этих двух алгебр возникают следующие кросс-коммутиационные соотношения:

$$\begin{aligned} S_a \tilde{S}_b &= \tilde{S}_b S_a, & a, b \in \{0, 3\} \quad \text{или} \quad a, b \in \{1, 2\}, \\ S_a \tilde{S}_b &= -\tilde{S}_b S_a, & a \in \{0, 3\}, b \in \{1, 2\} \quad \text{или} \quad a \in \{1, 2\}, b \in \{0, 3\}. \end{aligned}$$

Можно подставить в уравнения (8.3) и (8.6) параметризацию $z = e^{2\pi i u/\omega_2}$, $2\eta = \omega_1/\omega_2$, $\tau = \omega_3/\omega_2$ и построить их решения, корректно определенные при $|q| = 1$, с помощью модифицированной эллиптической гамма-функции $G(u; \omega)$. В этом случае однозначности решений можно добиться требованием, чтобы они одновременно удовлетворяли уравнениям, полученным из первоначальных перестановкой ω_1 и ω_2 . Это приводит к другой копии алгебры Складина, получающейся из первой заменами $\eta \rightarrow 1/(4\eta)$, $u \rightarrow u/(2\eta)$, $\tau \rightarrow \tau/(2\eta)$:

$$\tilde{S}_a = i^{\delta_{a,2}} \frac{\theta_{a+1}\left(\frac{1}{4\eta} \mid \frac{\tau}{2\eta}\right)}{\theta_1\left(\frac{u}{\eta} \mid \frac{\tau}{2\eta}\right)} \left(\theta_{a+1}\left(\frac{u-g}{\eta} \mid \frac{\tau}{2\eta}\right) e^{\frac{1}{2}\partial_u} - \theta_{a+1}\left(\frac{-u-g}{\eta} \mid \frac{\tau}{2\eta}\right) e^{-\frac{1}{2}\partial_u} \right).$$

В этом случае часть генераторов S_a и $\tilde{S}_a$ также антикоммутируют друг с другом.

Описанные прямые произведения пар алгебр Складина могут рассматриваться как эллиптические аналоги модулярного дубля Фаддеева $U_q(sl_2) \otimes U_{q^{-1}}(sl_2)$ [17], [84]. Этот дубль можно получить из второго случая в пределе $\text{Im}(\tau) \rightarrow +\infty$ (в первом случае такой предел не определен) [79].

9. Разложения на простые дроби и определители

В доказательствах многих тождеств для обычных и q -гипергеометрических рядов и интегралов используются разложения на простые дроби различных рациональных функций, заданных в виде отношений двух многочленов. На эллиптическом уровне эти функции заменяются на отношения произведений тэта-функций и ищутся разложения на суммы отношений тэта-функций с минимальным числом полюсов. Если разложение на простые дроби для произвольной рациональной функции – стандартная процедура, то в случае тэта-функций это не так. Первое такое известное соотношение связано с тождеством, приведенным в [85] в виде упражнения.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $2n$ переменных $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}^*$ удовлетворяют ограничению $\prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n b_k$ и $a_j/a_k \neq p^k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $j \neq k$. Тогда справедливо следующее соотношение для тэта-функций:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\prod_{j=1}^n \theta(a_k/b_j; p)}{\prod_{j=1, j \neq k}^n \theta(a_k/a_j; p)} = 0. \quad (9.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяем в (9.1) n на $n+1$, обозначим $a_{n+1} = t$ и подставим $b_{n+1} = a_1 \cdots a_n t / (b_1 \cdots b_n)$. Выделив $(n+1)$ -й член из суммы, это соотношение можно переписать в виде [86]

$$\prod_{k=1}^n \frac{\theta(t/b_k; p)}{\theta(t/a_k; p)} = \sum_{r=1}^n \frac{\theta(ta_1 \cdots a_n / (a_r b_1 \cdots b_n); p)}{\theta(t/a_r, a_1 \cdots a_n / (b_1 \cdots b_n); p)} \frac{\prod_{j=1}^n \theta(a_r/b_j; p)}{\prod_{j=1, j \neq r}^n \theta(a_r/a_j; p)} \quad (9.2)$$

и интерпретировать как разложение на простую дробь по тэта-функциям. Тогда доказательство этого тождества достаточно элементарно. При $n = 2$ оно сводится к формуле сложения (A.5). По индукции следует, что левую часть можно разложить в сумму

$$\sum_{r=1}^n c_r \frac{\theta(ta_1 \cdots a_n / (a_r b_1 \cdots b_n); p)}{\theta(t/a_r; p)},$$

коэффициенты c_r в которой легко находятся умножением на $\theta(t/a_r; p)$ и выбором $t = a_r$.

ТЕОРЕМА 8 [87]. Пусть $2n$ переменных $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}^*$ удовлетворяют соотношениям $a_j a_k, a_j/a_k \neq p^k$, $k \in \mathbb{Z}$, при $j \neq k$. Тогда справедливо следующее тождество для тэта-функций:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k \prod_{j=1}^{n-2} \theta(a_k b_j^{\pm 1}; p)}{\prod_{j=1, j \neq k}^n \theta(a_k a_j^{\pm 1}; p)} = 0. \quad (9.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После замен $n \rightarrow n+1$ и $a_{n+1} \rightarrow t$ в (9.3) и выделения $(n+1)$ -го члена из суммы возникает разложение на простую дробь вида

$$\frac{\prod_{j=1}^{n-1} \theta(t b_j^{\pm 1}; p)}{\prod_{j=1}^n \theta(t a_j^{\pm 1}; p)} = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{j=1}^{n-1} \theta(a_k b_j^{\pm 1}; p)}{\theta(t a_k^{\pm 1}; p) \prod_{j=1, j \neq k}^n \theta(a_k a_j^{\pm 1}; p)},$$

которое легко доказывается по рекурсии.

Эти разложения на “простые” дроби для тэта-функций использовались в работах [33], [36], [86] для доказательства некоторых точных формул суммирования и интегрирования для эллиптических гипергеометрических функций. Приведем также другое разложение, использованное недавно в [59]:

$$\frac{\prod_{j=1}^{n+2} \theta(v_j z; p)}{z \theta(z^2; p) \prod_{i=1}^n \theta(u_i z^{-1}; p)} + (z \rightarrow z^{-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{j=1}^{n+2} \theta(u_i v_j; p)}{u_i \theta(u_i z^{\pm 1}; p) \prod_{k=1, k \neq i}^n \theta(u_k u_i^{-1}; p)},$$

где $\prod_{i=1}^n u_i \prod_{j=1}^{n+2} v_j = p^{n-1}$.

Эллиптический аналог определителя Коши имеет вид

$$\begin{aligned} & \det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\frac{1}{a_i^{-1} \theta(a_i z_j^{\pm 1}; p)} \right) \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} a_i^{-1} \theta(a_i a_j^{\pm 1}; p) \prod_{1 \leq i < j \leq n} z_i^{-1} \theta(z_i z_j^{\pm 1}; p)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} a_i^{-1} \theta(a_i z_j^{\pm 1}; p)}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Определитель Фробениуса имеет вид

$$\det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\frac{\theta(t a_i b_j; p)}{\theta(t, a_i b_j; p)} \right) = \frac{\theta(t \prod_{i=1}^n a_i b_i; p)}{\theta(t; p)} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} a_j b_j \theta(a_i/a_j, b_i/b_j; p)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} \theta(a_i b_j; p)}. \quad (9.5)$$

В [53] Варнаар предложил новый определитель для тэта-функций

$$\begin{aligned} & \det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\frac{\theta(a x_i, a c/x_i)_{n-j}}{\theta(b x_i, b c/x_i)_{n-j}} \right) \\ &= a^{\binom{n}{2}} q^{\binom{n}{3}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} x_j \theta(x_i x_j^{-1}, c x_i^{-1} x_j^{-1}; p) \prod_{i=1}^n \frac{\theta(b/a, a b c q^{2n-2i})_{i-1}}{\theta(b x_i, b c/x_i)_{n-1}}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

где $\theta(a)_n = \prod_{j=0}^{n-1} \theta(a q^j; p)$. При $p \rightarrow 0$ он сводится к определителю Кратенталера [88].

Формулы (9.4)–(9.6) использовались в [11], [34], [53], [89]–[91] и ряде других работ как вспомогательные средства для доказательства необходимых эллиптических гипергеометрических тождеств. Разложения на простые дроби и определители эквивалентны друг другу до некоторой степени. Например, при разложении определителя (9.5) по последней строке и вычислении каждого члена по той же самой формуле (9.5) меньшей размерности $n - 1$ возникает тождество, эквивалентное (9.2). Поэтому формула (9.5) следует из (9.2) по индукции по n , и наоборот. Подобным же образом, формула (9.4) эквивалентна (9.3) [91]. Приложения определителей на уровне q -гипергеометрических функций описаны, например, в [20]. В статье [92] Розенгрэн и Шлоссер систематически рассмотрели определители тэта-функций на корневых системах (в частности, в ней приведен подробный список литературы на эту тему) и построили ряд новых точно вычисляемых случаев, которые мы пропускаем для краткости. Приложения эллиптических определителей к некоторым проблемам теории чисел, комбинаторного анализа и статистической механики описаны в [93], [94].

10. Эллиптические бета-интегралы на корневых системах

10.1. Интегралы для системы корней C_n . Известны два различных обобщения эллиптического бета-интеграла (3.1) на многократные интегралы для системы корней C_n (или BC_n), предложенные ван Диеженом и автором в [32], [33]. Опишем сначала многопараметрический интеграл типа I.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{T}$ и комплексные параметры $t_1, \dots, t_{2n+4}$ и p, q удовлетворяют ограничениям $|p|, |q|, |t_j| < 1$ и $\prod_{j=1}^{2n+4} t_j = pq$. Тогда

$$\begin{aligned} \kappa_n \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{\Gamma(z_j^{\pm 1} z_k^{\pm 1}; p, q)} \prod_{j=1}^n \frac{\prod_{m=1}^{2n+4} \Gamma(t_m z_j^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z_j^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n} \\ = \prod_{1 \leq m < s \leq 2n+4} \Gamma(t_m t_s; p, q), \quad \kappa_n = \frac{(p; p)_\infty^n (q; q)_\infty^n}{(4\pi i)^n n!}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \rho(z, t; C_n) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\Gamma(z_i^{\pm 1} z_j^{\pm 1}; p, q)} \prod_{i=1}^n \frac{\prod_{m=1}^{2n+3} \Gamma(t_m z_i^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z_i^{\pm 2}; A z_i^{\pm 1}; p, q)} \\ &\quad \times \frac{\prod_{m=1}^{2n+3} \Gamma(A t_m^{-1}; p, q)}{\prod_{1 \leq m < s \leq 2n+3} \Gamma(t_m t_s; p, q)}, \end{aligned} \quad (10.2)$$

где $A = \prod_{m=1}^{2n+3} t_m$. Для всех z_i в точках

$$\mathcal{P} = \{t_m q^a p^b, A^{-1} q^{a+1} p^{b+1}\}_{m=1, \dots, 2n+3, a, b=0, 1, \dots},$$

сходящихся к нулю, находятся полюсы функции (10.2). Координаты полюсов, уходящих в бесконечность, образуют множество $\mathcal{P}^{-1}$. Тогда утверждение теоремы можно переписать в виде

$$\int_{C^n} \rho(z, t; C_n) \frac{dz}{z} = \frac{(4\pi i)^n n!}{(q; q)_\infty^n (p; p)_\infty^n}, \quad \frac{dz}{z} := \prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{z_j}, \quad (10.3)$$

где контур C является произвольной деформацией $\mathbb{T}$, разделяющей $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^{-1}$.

Ядро интеграла $\rho(z, t; C_n)$ удовлетворяет уравнению, аналогичному (3.4):

$$\rho(z, q t_1, t_2, \dots, t_{2n+3}; C_n) - \rho(z, t; C_n) = \sum_{i=1}^n (g_i(z_1, \dots, q^{-1} z_i, \dots, z_n, t) - g_i(z, t)), \quad (10.4)$$

где

$$g_i(z, t) = \rho(z, t; C_n) \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\theta(t_1 z_j^{\pm 1}; p)}{\theta(z_i z_j^{\pm 1}; p)} \frac{\prod_{m=1}^{2n+3} \theta(t_m z_i; p)}{\prod_{m=2}^{2n+3} \theta(t_1 t_m; p)} \frac{\theta(t_1 A; p)}{\theta(z_i^2, A z_i; p)} \frac{t_1}{z_i}. \quad (10.5)$$

Разделив уравнение (10.4) на $\rho(z, t; C_n)$, мы получаем

$$\prod_{i=1}^n \frac{\theta(t_1 z_i^{\pm 1}; p)}{\theta(A z_i^{\pm 1}; p)} \prod_{m=2}^{2n+3} \frac{\theta(At_m^{-1}; p)}{\theta(t_1 t_m; p)} - 1 = \frac{t_1 \theta(t_1 A; p)}{\prod_{m=2}^{2n+3} \theta(t_1 t_m; p)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i \theta(z_i^2; p)} \\ \times \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\theta(t_1 z_j^{\pm 1}; p)}{\theta(z_i z_j^{\pm 1}; p)} \left(z_i^{2n+2} \frac{\prod_{m=1}^{2n+3} \theta(t_m z_i^{-1}; p)}{\theta(A z_i^{-1}; p)} - \frac{\prod_{m=1}^{2n+3} \theta(t_m z_i; p)}{\theta(A z_i; p)} \right). \quad (10.6)$$

Обе части этого равенства инвариантны относительно преобразования $z_1 \rightarrow p z_1$ и имеют одинаковые множества полюсов (особенности в точках $z_1 = z_j, z_j^{-1}$, $j = 2, \dots, n$, и $z_1 = \pm p^{k/2}$, $k \in \mathbb{Z}$, в правой части сокращаются) и вычетов в них. Поэтому функции в обеих частях равенства (10.6) отличаются только аддитивной постоянной, не зависящей от z_1 . Эта постоянная равна нулю, что следует из тривиальной проверки равенства (10.6) при $z_1 = t_1$.

Интегрируя (10.4) по переменным $z \in C^n$, получаем

$$I(qt_1, t_2, \dots, t_{2n+3}) - I(t) = \sum_{i=1}^n \left(\int_{C^{i-1} \times (q^{-1}C) \times C^{n-i}} - \int_{C^n} \right) g_i(z, t) \frac{dz}{z}, \quad (10.7)$$

где $I(t) = \int_{C^n} \rho(z, t; C_n) \frac{dz}{z}$ и $q^{-1}C$ обозначает контур C , растянутый относительно нулевой точки.

Полюсы функции (10.5) по переменным z_i сходятся к нулю по точкам $z_i = t_m q^a p^b$, $A^{-1} q^a p^{b+1}$ и уходят на бесконечность при $z_i = t_m^{-1} q^{-1-a} p^{-b}$, $A q^{-a} p^{-b-1}$, где $m = 1, \dots, 2n+3$, $a, b = 0, 1, 2, \dots$. При $|t_m| < 1$ и $|p| < |A|$ область $1 \leq |z_i| \leq |q|^{-1}$ не содержит полюсов, так что можно положить $C = \mathbb{T}$, деформировать $q^{-1}\mathbb{T}$ в $\mathbb{T}$ в (10.7) и получить равенство $I(qt_1, t_2, \dots, t_{2n+3}) = I(t)$.

Повторяя почти дословно процедуру аналитического продолжения, использовавшуюся в случае $n = 1$, получаем, что I есть постоянная, зависящая только от p и q . Ее значение находится переходом к пределам $t_j t_{j+n} \rightarrow 1$, $j = 1, \dots, n$, аналогично случаю $n = 1$, что дает правую часть (10.3).

Формула (10.1) предложена и частично обоснована в [33] и полностью доказана различными способами в [34], [43], [59]. В специальном пределе $p \rightarrow 0$ она сводится к одной из формул интегрирования Густафсона [95].

Система корней C_n состоит из множества векторов из $\mathbb{R}^n$ вида $X(C_n) = \{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j, i < j\}_{i,j=1,\dots,n}$, где e_i — ортонормированный базис $\mathbb{R}^n$. Обозначая $z_i = \exp(e_i)$, мы видим, что знаменатель ядра интеграла (10.1) содержит произведение по корням C_n вида

$$\prod_{\alpha \in X(C_n)} \Gamma(e^\alpha; p, q) = \prod_{i=1}^n \Gamma(z_i^{\pm 2}; p, q) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \Gamma(z_i^{\pm 1} z_j^{\pm 1}; p, q).$$

Система корней BC_n содержит дополнительно векторы $\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$, но общие закономерности появления этих векторов в ядрах интегралов еще не установлены. Группа Вейля этих систем $S_n \times \mathbb{Z}_2^n$ является симметрией ядра интеграла.

Эллиптический C_n -бета-интеграл типа II строится с помощью формулы (10.1) чисто алгебраическим способом [33].

ТЕОРЕМА 10. Пусть комплексные параметры t, t_m ($m = 1, \dots, 6$), p и q удовлетворяют условиям $|p|, |q|, |t|, |t_m| < 1$ и $t^{2n-2} \prod_{m=1}^6 t_m = pq$. Тогда

$$\begin{aligned} \kappa_n \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\Gamma(t z_j^{\pm 1} z_k^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z_j^{\pm 1} z_k^{\pm 1}; p, q)} \prod_{j=1}^n \frac{\prod_{m=1}^6 \Gamma(t_m z_j^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z_j^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n} \\ = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\Gamma(t^j; p, q)}{\Gamma(t; p, q)} \prod_{1 \leq m < s \leq 6} \Gamma(t^{j-1} t_m t_s; p, q) \right). \end{aligned} \quad (10.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим интеграл в левой части (10.8) через $I_n(t, t_1, \dots, t_5)$ и рассмотрим $(2n-1)$ -кратный интеграл

$$\begin{aligned} \kappa_n \kappa_{n-1} \int_{\mathbb{T}^{2n-1}} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{\Gamma(z_j^{\pm 1} z_k^{\pm 1}; p, q)} \prod_{j=1}^n \frac{\prod_{r=0}^5 \Gamma(t_r z_j^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z_j^{\pm 2}; p, q)} \\ \times \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n-1}} \Gamma(t^{1/2} z_j^{\pm 1} w_k^{\pm 1}; p, q) \prod_{1 \leq j < k \leq n-1} \frac{1}{\Gamma(w_j^{\pm 1} w_k^{\pm 1}; p, q)} \\ \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma(w_j^{\pm 1} t^{n-3/2} \prod_{s=1}^5 t_s; p, q)}{\Gamma(w_j^{\pm 2}, w_j^{\pm 1} t^{2n-3/2} \prod_{s=1}^5 t_s; p, q)} \frac{dw_1}{w_1} \dots \frac{dw_{n-1}}{w_{n-1}} \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n} \end{aligned} \quad (10.9)$$

с p, q, t и t_r , $r = 0, \dots, 5$, лежащими внутри единичного круга, такими, что $t^{n-1} \prod_{r=0}^5 t_r = pq$. Интегрирование по переменным w_j с помощью формулы (10.1) приводит выражение (10.9) к виду $\Gamma^n(t; p, q) \Gamma^{-1}(t^n; p, q) I_n(t, t_1, \dots, t_5)$ (в котором подразумевается, что $t_6 = pq t^{2-2n} / \prod_{j=1}^5 t_j$). В силу ограниченности подынтегральной функции на контуре интегрирования можно поменять порядок интегрирования. Тогда интегрирование по z_k -переменным с помощью формулы (10.1) переводит выражение (10.9) в

$$\Gamma^{n-1}(t; p, q) \prod_{0 \leq r < s \leq 5} \Gamma(t_r t_s; p, q) I_{n-1}(t, t^{1/2} t_1, \dots, t^{1/2} t_5).$$

В результате возникает рекуррентное соотношение, связывающее интегралы разных размерностей n :

$$I_n(t, t_1, \dots, t_5) = \frac{\Gamma(t^n; p, q)}{\Gamma(t; p, q)} \prod_{0 \leq r < s \leq 5} \Gamma(t_r t_s; p, q) I_{n-1}(t, t^{1/2} t_1, \dots, t^{1/2} t_5).$$

Пользуясь известным начальным условием (3.1) при $n = 1$, из рекурсии находим (10.8).

Если выразить t_6 через другие параметры и устранить множители pq в аргументах эллиптических гамма-функций с помощью формулы отражения для $\Gamma(z; p, q)$, то легко перейти к пределу $p \rightarrow 0$ при фиксированных параметрах. Это приводит к многократному q -бета-интегралу Густафсона [96]. Ряд дальнейших предельных переходов по параметрам приводит к интегралу Сельбер-

га – фундаментально важному интегралу, имеющему большое количество приложений в математической физике [97]:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{1 \leq j \leq n} x_j^{\alpha-1} (1-x_j)^{\beta-1} \prod_{1 \leq j < k \leq n} |x_j - x_k|^{2\gamma} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \prod_{1 \leq j \leq n} \frac{\Gamma(\alpha + (j-1)\gamma) \Gamma(\beta + (j-1)\gamma) \Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta + (n+j-2)\gamma) \Gamma(1+\gamma)}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

где $\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0$ и $\operatorname{Re}(\gamma) > -\min(1/n, \operatorname{Re}(\alpha)/(n-1), \operatorname{Re}(\beta)/(n-1))$.

Поэтому формула (10.8) представляет собой эллиптический аналог интеграла Сельберга. Она может также интерпретироваться как эллиптическое обобщение BC_n -тождеств Макдональда–Морриса для постоянных членов [98]. Приведенное доказательство заимствовано из работы [33]. Оно моделирует доказательство интеграла Сельберга, предложенное Андерсоном [99], и представляет собой обобщение метода, использованного Густафсоном в [96] для доказательства соответствующего q -бета-интеграла.

10.2. Интегралы для системы корней A_n . Различные эллиптические бета-интегралы на корневой системе A_n были предложены в работах [11], [36]. По аналогии с C_n -случаями формулы интегрирования, зависящие от $2n+3$ параметров, будем относить к типу I. Точно вычисляемые интегралы с меньшим числом параметров, которые выводятся с помощью интегралов типа I, будем относить к типу II. Перечислим эти формулы, опуская их доказательства.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $|p|, |q| < 1$ и $2n+4$ параметра t_m, s_m , $m = 1, \dots, n+2$, удовлетворяют ограничениям $|t_m|, |s_m| < 1$ и $ST = pq$, где $S = \prod_{m=1}^{n+2} s_m$ и $T = \prod_{m=1}^{n+2} t_m$. Тогда

$$\begin{aligned} & \kappa_n^A \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1 \leq j < k \leq n+1} \frac{1}{\Gamma(z_j z_k^{-1}, z_j^{-1} z_k; p, q)} \prod_{j=1}^{n+1} \prod_{m=1}^{n+2} \Gamma(s_m z_j, t_m z_j^{-1}; p, q) \frac{dz}{z} \\ &= \prod_{m=1}^{n+2} \Gamma(S s_m^{-1}, T t_m^{-1}; p, q) \prod_{k,m=1}^{n+2} \Gamma(s_k t_m; p, q), \end{aligned} \quad (10.11)$$

где $z_1 z_2 \cdots z_{n+1} = 1$ и

$$\kappa_n^A = \frac{(p; p)_\infty (q; q)_\infty}{(2\pi i)^n (n+1)!}.$$

В этом интеграле типа I мы имеем разделение $2n+4$ параметров (однородных в C_n -случае) с фиксированным произведением на две однородные группы по $n+2$ элемента. Эта формула интегрирования была предложена и частично обоснована в [11], различные полные доказательства даны в [34], [43]. В простейшем пределе $p \rightarrow 0$ возникает один из интегралов Густафсона [95].

Система корней A_n состоит из векторов $X(A_n) = \{e_i - e_j, i \neq j\}|_{i,j=1,\dots,n+1}$, где e_i – ортонормированный базис $\mathbb{R}^{n+1}$. Эти векторы лежат в гиперповерхности, ортогональной вектору $E = \sum_{i=1}^{n+1} e_i$. Полагая $z_i = \exp(e_i - E/(n+1))$,

получаем $z_1 \cdots z_{n+1} = 1$. Знаменатель ядра интеграла (10.11) содержит произведение вида

$$\prod_{\alpha \in X(A_n)} \Gamma(e^\alpha; p, q) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \Gamma\left(\frac{z_i}{z_j}, \frac{z_j}{z_i}; p, q\right).$$

Полное ядро интеграла инвариантно относительно A_n -группы Вейля S_{n+1} .

Существует дополнительный независимый A_n -интеграл типа I [36].

ТЕОРЕМА 12. Пусть $|p|, |q| < 1$ и $2n + 3$ параметра t_k , $k = 1, \dots, n$, и s_m , $m = 1, \dots, n + 3$, удовлетворяют ограничениям $|t_k| < 1$, $|s_m| < 1$ и $|pq| < |St_k|$, где $S = \prod_{m=1}^{n+3} s_m$. Тогда справедлива следующая явная формула интегрирования:

$$\begin{aligned} \kappa_n^A \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \frac{\Gamma(S z_i^{-1} z_j^{-1}; p, q)}{\Gamma(z_i z_j^{-1}, z_i^{-1} z_j; p, q)} \\ \times \prod_{j=1}^{n+1} \frac{\prod_{k=1}^n \Gamma(t_k z_j; p, q) \prod_{m=1}^{n+3} \Gamma(s_m z_j^{-1}; p, q)}{\prod_{k=1}^n \Gamma(St_k z_j^{-1}; p, q)} \frac{dz}{z} \\ = \prod_{k=1}^n \prod_{m=1}^{n+3} \frac{\Gamma(t_k s_m; p, q)}{\Gamma(St_k s_m^{-1}; p, q)} \prod_{1 \leq l < m \leq n+3} \Gamma(S s_l^{-1} s_m^{-1}; p, q), \end{aligned} \quad (10.12)$$

где $z_1 \cdots z_{n+1} = 1$.

Здесь мы имеем разделение $2n + 3$ независимых параметров на две однородные группы с n и $n + 3$ элементами. В пределе $p \rightarrow 0$ возникает q -бета-интеграл, который не рассматривался в литературе до вывода эллиптического случая, так же, как и его чисто гипергеометрическое вырождение, получающееся в пределе $q \rightarrow 1$.

Имеется несколько A_n -эллиптических бета-интегралов типа II [11]. Обозначим

$$\begin{aligned} I^{\text{II}}(\mathbf{t}, \mathbf{s}; p, q; A_n) = \kappa_n^A \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \frac{\Gamma(t z_i z_j; p, q)}{\Gamma(z_i z_j^{-1}, z_i^{-1} z_j; p, q)} \\ \times \prod_{j=1}^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} \Gamma(t_k z_j^{-1}; p, q) \prod_{i=1}^4 \Gamma(s_i z_j; p, q) \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n}, \end{aligned} \quad (10.13)$$

где $|t_k|, |s_i| < 1$, $k = 1, \dots, n + 1$, $i = 1, \dots, 4$, и

$$t^{n-1} \prod_{k=1}^{n+1} t_k \prod_{i=1}^4 s_i = pq, \quad \prod_{j=1}^{n+1} z_j = 1.$$

ТЕОРЕМА 13. При указанных ограничениях на параметры справедливы следующие A_n -формулы интегрирования. Для нечетных n имеем

$$\begin{aligned} I^{\text{II}}(\mathbf{t}, \mathbf{s}; p, q; A_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq n+1} \Gamma(tt_j t_k; p, q) \prod_{k=1}^{n+1} \prod_{i=1}^4 \Gamma(t_k s_i; p, q) \\ \times \frac{\Gamma(t^{\frac{n+1}{2}}, A; p, q)}{\Gamma(t^{\frac{n+1}{2}} A; p, q)} \prod_{1 \leq i < m \leq 4} \Gamma(t^{\frac{n-1}{2}} s_i s_m; p, q), \end{aligned} \quad (10.14)$$

где $A = \prod_{k=1}^{n+1} t_k$; для четных n

$$I^{\Pi}(\mathbf{t}, \mathbf{s}; p, q; A_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq n+1} \Gamma(tt_j t_k; p, q) \prod_{k=1}^{n+1} \prod_{i=1}^4 \Gamma(t_k s_i; p, q) \times \Gamma(A; p, q) \prod_{i=1}^4 \frac{\Gamma(t^{\frac{n}{2}} s_i; p, q)}{\Gamma(t^{\frac{n}{2}} A s_i; p, q)}. \quad (10.15)$$

Эти формулы содержат только $n+5$ свободных параметров. Они могут быть выведены непосредственно из эллиптических бета-интегралов типа I (10.1) и (10.11) [11]. В простейшем пределе $p \rightarrow 0$ они сводятся к q -бета-интегралам Густафсона–Ракха [100].

Для описания другого A_n -интеграла типа II необходимы десять комплексных параметров $p, q, t, s, t_1, t_2, t_3, s_1, s_2, s_3$ с ограничениями $(ts)^{n-1} \prod_{k=1}^3 t_k s_k = pq$ и $|p|, |q|, |t|, |s|, |t_k|, |s_k| < 1$. Определим теперь интеграл

$$I^{\Pi}(\mathbf{t}, \mathbf{s}; p, q; A_n) = \kappa_n^A \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \frac{\Gamma(t z_i z_j, s z_i^{-1} z_j^{-1}; p, q)}{\Gamma(z_i z_j^{-1}, z_i^{-1} z_j; p, q)} \prod_{j=1}^{n+1} \prod_{k=1}^3 \Gamma(t_k z_j, s_k z_j^{-1}; p, q) \frac{dz}{z}. \quad (10.16)$$

ТЕОРЕМА 14. При указанных ограничениях на параметры справедливы следующие формулы интегрирования для корневой системы A_n . Для нечетных n выполнено

$$I^{\Pi}(\mathbf{t}, \mathbf{s}; p, q; A_n) = \Gamma\left(t^{\frac{n+1}{2}}, s^{\frac{n+1}{2}}; p, q\right) \prod_{1 \leq i < k \leq 3} \Gamma\left(t^{\frac{n-1}{2}} t_i t_k, s^{\frac{n-1}{2}} s_i s_k; p, q\right) \times \prod_{j=1}^{(n+1)/2} \prod_{i,k=1}^3 \Gamma((ts)^{j-1} t_i s_k; p, q) \times \prod_{j=1}^{(n-1)/2} \left(\Gamma((ts)^j; p, q) \prod_{1 \leq i < k \leq 3} \Gamma(t^{j-1} s^j t_i t_k, t^j s^{j-1} s_i s_k; p, q) \right); \quad (10.17)$$

для четных n

$$I^{\Pi}(\mathbf{t}, \mathbf{s}; p, q; A_n) = \prod_{i=1}^3 \Gamma\left(t^{\frac{n}{2}} t_i, s^{\frac{n}{2}} s_i; p, q\right) \Gamma\left(t^{\frac{n}{2}-1} t_1 t_2 t_3, s^{\frac{n}{2}-1} s_1 s_2 s_3; p, q\right) \times \prod_{j=1}^{n/2} \left(\Gamma((ts)^j; p, q) \prod_{i,k=1}^3 \Gamma((ts)^{j-1} t_i s_k; p, q) \times \prod_{1 \leq i < k \leq 3} \Gamma(t^{j-1} s^j t_i t_k, t^j s^{j-1} s_i s_k; p, q) \right). \quad (10.18)$$

Эти формулы могут быть выведены непосредственно из C_n -эллиптических бета-интегралов типа I и II и A_n -интеграла типа I (10.11) [11]. В простейшем пределе $p \rightarrow 0$ они сводятся к q -гипергеометрическим интегралам Густафсона [96].

11. Некоторые формулы суммирования многократных рядов

Известно несколько формул суммирования многократных эллиптических гипергеометрических рядов, представляющих собой многомерные аналоги суммы Френкеля–Тураева [11], [34], [53], [86], [90], [101], [102]. Для некоторых из них была установлена прямая связь с суммами вычетов полюсов ядер соответствующих эллиптических бета-интегралов на корневых системах. Опишем некоторые из этих формул без доказательств.

ТЕОРЕМА 15. Пусть $|p| < 1$ и параметр $q \in \mathbb{C}$ не равен целой степени p . Тогда имеет место формула суммирования

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{0 \leq \lambda_j \leq N_j \\ j=1, \dots, n}} q^{\sum_{j=1}^n j \lambda_j} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\theta(t_j t_k q^{\lambda_j + \lambda_k}, t_j t_k^{-1} q^{\lambda_j - \lambda_k}; p)}{\theta(t_j t_k, t_j t_k^{-1}; p)} \\
 & \quad \times \prod_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{\theta(t_j^2 q^{2\lambda_j}; p)}{\theta(t_j^2; p)} \prod_{0 \leq r \leq 2n+3} \frac{\theta(t_j t_r)_{\lambda_j}}{\theta(q t_j t_r^{-1})_{\lambda_j}} \right) \\
 & = \theta(q a^{-1} b^{-1}, q a^{-1} c^{-1}, q b^{-1} c^{-1})_{N_1 + \dots + N_n} \\
 & \quad \times \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\theta(q t_j t_k)_{N_j} \theta(q t_j t_k)_{N_k}}{\theta(q t_j t_k)_{N_j + N_k}} \\
 & \quad \times \prod_{1 \leq j \leq n} \frac{\theta(q t_j^2)_{N_j}}{\theta(q t_j a^{-1}, q t_j b^{-1}, q t_j c^{-1}, q^{1+N_1+\dots+N_n-N_j} t_j^{-1} a^{-1} b^{-1} c^{-1})_{N_j}}, \tag{11.1}
 \end{aligned}$$

где $\theta(a)_\lambda = \Gamma(a q^\lambda; p, q) / \Gamma(a; p, q)$ и

$$\begin{aligned}
 q^{-1} \prod_{r=0}^{2n+3} t_r &= 1 \quad (\text{условие балансировки}), \\
 q^{N_j} t_j t_{n+j} &= 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{условие обрыва}),
 \end{aligned}$$

с $N_j = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, n$, $u a = t_{2n+1}$, $b = t_{2n+2}$, $c = t_{2n+3}$.

Эта формула выведена в [101] из C_n -эллиптического бета-интеграла типа I (еще недоказанного на тот момент). Ее первое рекурсивное доказательство получено в [86]. В пределе $p \rightarrow 0$ она вырождается в многомерную $s\varphi_7$ -сумму, найденную в [103].

ТЕОРЕМА 16. Пусть $N = 0, 1, 2, \dots$ и параметры $p, q, t, t_0, \dots, t_5 \in \mathbb{C}$ удовлетворяют ограничениям $|p| < 1$ и

$$\begin{aligned}
 q^{-1} t^{2n-2} \prod_{r=0}^5 t_r &= 1 \quad (\text{условие балансировки}), \\
 q^N t^{n-1} t_0 t_4 &= 1 \quad (\text{условие обрыва}).
 \end{aligned} \tag{11.2}$$

Тогда имеет место формула суммирования для многократного эллиптического гипергеометрического ряда

$$\begin{aligned}
 & \sum_{0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq N} q^{\sum_{j=1}^m \lambda_j} t^{2 \sum_{j=1}^m (n-j) \lambda_j} \prod_{1 \leq j < k \leq m} \left(\frac{\theta(\tau_k \tau_j q^{\lambda_k + \lambda_j}, \tau_k \tau_j^{-1} q^{\lambda_k - \lambda_j}; p)}{\theta(\tau_k \tau_j, \tau_k \tau_j^{-1}; p)} \right) \\
 & \times \frac{\theta(t \tau_k \tau_j)_{\lambda_k + \lambda_j}}{\theta(q t^{-1} \tau_k \tau_j)_{\lambda_k + \lambda_j}} \frac{\theta(t \tau_k \tau_j^{-1})_{\lambda_k - \lambda_j}}{\theta(q t^{-1} \tau_k \tau_j^{-1})_{\lambda_k - \lambda_j}} \\
 & \times \prod_{j=1}^m \left(\frac{\theta(\tau_j^2 q^{2\lambda_j}; p)}{\theta(\tau_j^2; p)} \prod_{r=0}^5 \frac{\theta(t_r \tau_j)_{\lambda_j}}{\theta(q t_r^{-1} \tau_j)_{\lambda_j}} \right) \\
 & = \prod_{j=1}^n \frac{\theta(q t^{n+j-2} t_0^2)_N \prod_{1 \leq r < s \leq 3} \theta(q t^{1-j} t_r^{-1} t_s^{-1})_N}{\theta(q t^{2-n-j} \prod_{r=0}^3 t_r^{-1})_N \prod_{r=1}^3 \theta(q t^{j-1} t_0 t_r^{-1})_N}. \quad (11.3)
 \end{aligned}$$

Здесь используются обозначения $\tau_j = t_0 t^{j-1}$, $j = 1, \dots, n$.

Эта формула суммирования была предложена Варнааром [53]. Она следует из C_n -эллиптического бета-интеграла типа II [32] и впервые была доказана рекурсивно в работе [45].

Для системы корней A_n эллиптическая гипергеометрическая сумма типа I имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{0 \leq \lambda_j \leq N_j \\ j=1, \dots, n}} q^{\sum_{j=1}^n j \lambda_j} \prod_{j=1}^n \frac{\theta(t_j q^{\lambda_j + |\lambda|}; p)}{\theta(t_j; p)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\theta(t_i t_j^{-1} q^{\lambda_i - \lambda_j}; p)}{\theta(t_i t_j^{-1}; p)} \\
 & \times \prod_{i,j=1}^n \frac{\theta(t_i t_j^{-1} q^{-N_j})_{\lambda_i}}{\theta(q t_i t_j^{-1})_{\lambda_i}} \prod_{j=1}^n \frac{\theta(t_j)_{|\lambda|}}{\theta(t_j q^{1+N_j})_{|\lambda|}} \frac{\theta(b, c)_{|\lambda|}}{\theta(q/d, q/e)_{|\lambda|}} \prod_{j=1}^n \frac{\theta(dt_j, et_j)_{\lambda_j}}{\theta(t_j q/b, t_j q/c)_{\lambda_j}} \\
 & = \frac{\theta(q/(bd), q/(cd))_{|N|}}{\theta(q/d, q/(bcd))_{|N|}} \prod_{j=1}^n \frac{\theta(t_j q, t_j q/(bc))_{N_j}}{\theta(t_j q/b, t_j q/c)_{N_j}}, \quad (11.4)
 \end{aligned}$$

где

$$|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \quad |N| = N_1 + \dots + N_n, \quad bcde = q^{1+|N|}.$$

Эта формула доказана рекурсивно в [86]. Она вытекает также из анализа вычетов для интеграла типа I (10.11) [11] и при $p \rightarrow 0$ редуцируется в многократную ${}_8\varphi_7$ -сумму Милна [104].

Опуская ряд других установленных формул суммирования многократных эллиптических гипергеометрических рядов, приведем гипотезу из [11].

ГИПОТЕЗА. Пусть $|p| < 1$, $N = 0, 1, 2, \dots$ и n параметров $t_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяют условию балансировки

$$\prod_{k=1}^n t_k = q^{-N}.$$

Тогда справедлива следующая формула суммирования:

$$\sum_{\substack{\lambda_k=0,\dots,N \\ \lambda_1+\dots+\lambda_n=N}} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \theta(tt_j t_j)_{\lambda_i+\lambda_j} \prod_{i=1}^n \prod_{j=n+1}^{n+3} \theta(tt_i t_j)_{\lambda_i} \prod_{i,j=1}^n \theta(t_i t_j^{-1})_{-\lambda_j}}{\prod_{i,j=1; i \neq j}^n \theta(t_i t_j^{-1})_{\lambda_i-\lambda_j} \prod_{j=1}^n \theta(t^{n+1} t_j^{-1} \prod_{k=1}^{n+3} t_k)_{-\lambda_j}} = \begin{cases} \frac{\theta(1)_{-N}}{\theta(t^{n/2})_{-N} \prod_{n+1 \leq i < j \leq n+3} \theta(t^{(n+2)/2} t_i t_j)_{-N}}, & n \text{ четно,} \\ \frac{\theta(1)_{-N}}{\prod_{i=n+1}^{n+3} \theta(t^{(n+1)/2} t_i)_{-N} \theta(t^{(n+3)/2} \prod_{i=n+1}^{n+3} t_i)_{-N}}, & n \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (11.5)$$

Предполагается, что эта формула связана с суммами вычетов для A_n -интеграла (10.13). При $p \rightarrow 0$ возникает формула суммирования для многократного $s\varphi_7$ -ряда Густафсона–Ракха [100].

12. Преобразования симметрии для многократных интегралов

Общие эллиптические гипергеометрические интегралы типа I для системы корней C_n имеют вид

$$I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) = \kappa_n \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\Gamma(z_i^{\pm 1} z_j^{\pm 1}; p, q)} \prod_{j=1}^n \frac{\prod_{i=1}^{2n+2m+4} \Gamma(t_i z_j^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z_j^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz_j}{z_j},$$

где $|t_j| < 1$,

$$\prod_{j=1}^{2n+2m+4} t_j = (pq)^{m+1}, \quad \kappa_n = \frac{(p; p)_{\infty}^n (q; q)_{\infty}^n}{(4\pi i)^n n!}.$$

При $n = 0$ мы полагаем $I_0^{(m)} = 1$. Интеграл $I_1^{(1)}$ совпадает с V -функцией, а $I_n^{(0)}$ – с эллиптическим бета-интегралом (10.1). При вырождении $I_n^{(m)}$ -функций до уровня обычного бета-интеграла они сводятся к интегралам Диксона [28], [105]. В [34] Рэйнс доказал следующую формулу преобразования:

$$I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) = \prod_{1 \leq r < s \leq 2n+2m+4} \Gamma(t_r t_s; p, q) I_m^{(n)}\left(\frac{\sqrt{pq}}{t_1}, \dots, \frac{\sqrt{pq}}{t_{2n+2m+4}}\right). \quad (12.1)$$

Она является прямым обобщением третьего преобразования симметрии для V -функции, описанного в (5.4).

В [59] найдено следующее представление в виде определителя:

$$I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{a_j \theta(a_i a_j^{\pm 1}; p) b_j \theta(b_i b_j^{\pm 1}; q)} \times \det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\kappa \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{r=1}^{2n+2m+4} \Gamma(t_r z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \prod_{k \neq i} \theta(a_k z^{\pm 1}; p) \prod_{k \neq j} \theta(b_k z^{\pm 1}; q) \frac{dz}{z} \right), \quad (12.2)$$

где a_j, b_j – произвольные параметры. При выборе $a_i = t_j, b_j = t_{n+j}, j = 1, \dots, n$, возникает определитель матрицы

$$T_q(t_i)^{-1} T_p(t_{n+j})^{-1} I_1^{(m+n-1)}(qt_1, \dots, qt_n, pt_{n+1}, \dots, pt_{2n}, t_{2n+1}, \dots, t_{2n+2m+4}),$$

где $T_q(t_k)$ – оператор q -сдвига, $T_q(t_k)f(t_k) = f(qt_k)$. Таким образом, при $m = 0$ мы получаем точно вычисляемый определитель однократных эллиптических гипергеометрических интегралов.

Для доказательства (12.2) необходимо записать

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\Gamma(z_i^{\pm 1} z_j^{\pm 1}; p, q)} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} z_i^{-1} \theta(z_i z_j^{\pm 1}; p) \prod_{1 \leq i < j \leq n} z_i^{-1} \theta(z_i z_j^{\pm 1}; q)$$

и связать оба множителя в правой части с эллиптическим аналогом определителя Коши (9.4). Использование формулы Гейне

$$\frac{1}{n!} \int \prod_{1 \leq i, j \leq n} \phi_i(z_j) \prod_{1 \leq i, j \leq n} \psi_i(z_j) \prod_{1 \leq i \leq n} d\mu(z_i) = \det_{1 \leq i, j \leq n} \int \phi_i(z) \psi_j(z) d\mu(z)$$

с $\phi_i(z_j) = a_i / \theta(a_i z_j^{\pm 1}; p)$ и $\psi_i(z_j) = b_i / \theta(b_i z_j^{\pm 1}; q)$ дает необходимый результат.

Имеет место $(n+2)$ -членное рекуррентное соотношение [33], [59]

$$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{t_i}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n+2} \theta(t_i t_j^{\pm 1}; p)} T_q(t_i) I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) = 0, \quad (12.3)$$

где $\prod_{j=1}^{2n+2m+4} t_j = (pq)^m p$. Действительно, если мы запишем такое же рекуррентное соотношение для ядра интеграла $I_n^{(m)}$, то оно сведется к тождеству (9.3) после выделения общего множителя. Интегрируя последнее соотношение по подходящим контурам, мы получим (12.3).

Представление в виде определителя позволяет вывести другое $(m+2)$ -членное рекуррентное соотношение

$$\sum_{k=1}^{m+2} \frac{\prod_{m+3 \leq i \leq 2n+2m+4} \theta(t_i t_k / q; p)}{t_k \prod_{1 \leq i \leq m+2; i \neq k} \theta(t_i / t_k; p)} T_q(t_k)^{-1} I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{2n+2m+4}) = 0, \quad (12.4)$$

где $t_1 \cdots t_{2m+2n+4} = (pq)^{m+1} q$. Отметим, что преобразование (12.1) переводит уравнение (12.3) в (12.4) и наоборот. Поэтому анализ совместных решений этих уравнений предоставляет альтернативный способ доказательства преобразования (12.1) [59].

Рассмотрим преобразования симметрии для других многомерных интегралов. Для девяти параметров $t, t_1, \dots, t_8 \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих ограничениям $|t|, |t_j| < 1$ и $t^{2n-2} \prod_{j=1}^8 t_j = p^2 q^2$, определим интеграл

$$I(t_1, \dots, t_8; t; p, q) = \prod_{1 \leq j < k \leq 8} \Gamma(t_j t_k; p, q, t) \times \kappa_n \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\Gamma(t z_j^{\pm 1} z_k^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z_j^{\pm 1} z_k^{\pm 1}; p, q)} \prod_{j=1}^n \frac{\prod_{k=1}^8 \Gamma(t_k z_j^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z_j^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz_j}{z_j}. \quad (12.5)$$

Здесь

$$\Gamma(z; p, q, t) = \prod_{j,k,l=0}^{\infty} (1 - zt^j p^k q^l) (1 - z^{-1} t^{j+1} p^{k+1} q^{l+1})$$

есть эллиптическая гамма-функция более высокого уровня, связанная с гамма-функцией Барнса $\Gamma_4(u; \omega)$ и удовлетворяющая уравнению

$$\Gamma(tz; p, q, t) = \Gamma(z; p, q) \Gamma(z; p, q, t).$$

Функция (12.5) обобщает V -функцию на интегралы типа II для системы корней BC_n . В [34] Рэйнс доказал следующую формулу преобразования симметрии:

$$I(t_1, \dots, t_8; t; p, q) = I(s_1, \dots, s_8; t; p, q),$$

где

$$\begin{cases} s_j = \rho^{-1} t_j, & j = 1, 2, 3, 4; \\ s_j = \rho t_j, & j = 5, 6, 7, 8; \end{cases} \quad \rho = \sqrt{\frac{t_1 t_2 t_3 t_4}{p q t^{1-n}}} = \sqrt{\frac{p q t^{1-n}}{t_5 t_6 t_7 t_8}}, \quad |t|, |t_j|, |s_j| < 1.$$

Она описывает обобщение ключевого соотношения для E_7 -группы (5.2), т. е. интеграл (12.5) инвариантен относительно всех преобразований этой группы. Как показано в [58], функция $I(t_1, \dots, t_8; t; p, q)$ возникает в квантовой многочастичной модели [62] при определенном ограничении на параметры (условии балансировки) в качестве нормировки специальной собственной функции гамильтониана.

Определим общие эллиптические гипергеометрические интегралы типа I на системе корней A_n :

$$\begin{aligned} I_n^{(m)}(s_1, \dots, s_{n+m+2}; t_1, \dots, t_{n+m+2}; A) \\ = \kappa_n^A \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1 \leq j < k \leq n+1} \frac{1}{\Gamma(z_j z_k^{-1}, z_j^{-1} z_k; p, q)} \prod_{j=1}^{n+1} \prod_{l=1}^{n+m+2} \Gamma(s_l z_j^{-1}, t_l z_j; p, q) \frac{dz}{z}, \end{aligned}$$

где $|t_j|, |s_j| < 1$,

$$\prod_{j=1}^{n+1} z_j = 1, \quad \prod_{l=1}^{n+m+2} s_l t_l = (pq)^{m+1}$$

и полагается $I_0^{(m)} = \prod_{l=1}^{m+2} \Gamma(s_l, t_l; p, q)$. Используя результат точного вычисления $I_n^{(0)}$ -интеграла (10.11), можно вывести следующее рекурсивное соотношение для $I_n^{(m)}$ -интегралов по индексу m :

$$\begin{aligned} I_n^{(m+1)}(s_1, \dots, s_{n+m+3}; t_1, \dots, t_{n+m+3}; A) \\ = \frac{\kappa_n^A}{\Gamma(v^{n+1}; p, q)} \prod_{l=1}^{n+2} \frac{\Gamma(t_{n+m+3} s_l; p, q)}{\Gamma(v^{-n-1} t_{n+m+3} s_l; p, q)} \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{1 \leq j < k \leq n+1} \frac{1}{\Gamma(w_j w_k^{-1}, w_j^{-1} w_k; p, q)} \end{aligned}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n+1} \Gamma(v^{-n} t_{n+m+3} w_j; p, q) \prod_{l=1}^{n+2} \Gamma(v^{-1} s_l w_j^{-1}; p, q) \\ \times I_n^{(m)}(v w_1, \dots, v w_{n+1}, s_{n+3}, \dots, s_{n+m+3}; t_1, \dots, t_{n+m+2}; A) \frac{dw_1}{w_1} \dots \frac{dw_n}{w_n},$$

где

$$v^{n+1} = \frac{t_{n+m+3}}{pq} \prod_{k=1}^{n+2} s_k = \frac{(pq)^{m+1}}{\prod_{k=1}^{n+m+2} t_k \prod_{l=n+3}^{n+m+3} s_l}.$$

При $m = 0$ $I_n^{(0)}$ -интеграл в правой части вычисляется и дает преобразование симметрии [11]

$$I_n^{(1)}(s_1, \dots, s_{n+3}; t_1, \dots, t_{n+3}; A) = \prod_{k=1}^{n+2} \Gamma\left(t_{n+3} s_k, \frac{\prod_{i=1}^{n+2} s_i}{s_k}, s_{n+3} t_k, \frac{\prod_{i=1}^{n+2} t_i}{t_k}; p, q\right) \\ \times I_n^{(1)}(v^{-1} s_1, \dots, v^{-1} s_{n+2}, v^n s_{n+3}; v t_1, \dots, v t_{n+2}, v^{-n} t_{n+3}; A),$$

где $\prod_{k=1}^{n+3} t_k s_k = (pq)^2$ и

$$v^{n+1} = \frac{t_{n+3}}{pq} \prod_{k=1}^{n+2} s_k = \frac{pq}{s_{n+3} \prod_{k=1}^{n+2} t_k}.$$

Поскольку левая часть этого соотношения симметрична по параметрам t_k или s_k , такая же $(S_{n+3} \times S_{n+3})$ -симметрия справедлива и для правой части, что приводит к дополнительным нетривиальным преобразованиям [34]. Удобно обозначить

$$I(v) = \prod_{k=1}^{n+2} \Gamma(v^{-n-1} s_{n+3} s_k, v^{n+1} t_{n+3} t_k; p, q) \\ \times I_n^{(1)}(v s_1, \dots, v s_{n+2}, v^{-n} t_{n+3}; v^{-1} t_1, \dots, v^{-1} t_{n+2}, v^n s_{n+3}; A),$$

где все аргументы $I_n^{(1)}$ лежат внутри единичной окружности, $\prod_{k=1}^{n+3} t_k = \prod_{k=1}^{n+3} s_k = pq$ и v – произвольный свободный параметр (общее число свободных параметров равно $2n + 5$). Тогда полученное соотношение может быть переписано в виде $I(v) = I(v^{-1})$.

Другой тип преобразования для $I_n^{(m)}$ -интегралов найден Рэйнсом [34]. Обозначим $T = \prod_{j=1}^{n+m+2} t_j$, $S = \prod_{j=1}^{n+m+2} s_j$, так что $ST = (pq)^{m+1}$, и пусть все $|t_k|, |s_k|, |T^{1/(m+1)}/t_k|, |S^{1/(m+1)}/s_k| < 1$. Тогда справедливо следующее преобразование симметрии:

$$I_n^{(m)}(t_1, \dots, t_{n+m+2}; s_1, \dots, s_{n+m+2}; A) = \prod_{j,k=1}^{n+m+2} \Gamma(t_j s_k; p, q) \\ \times I_m^{(n)}\left(\frac{T^{1/(m+1)}}{t_1}, \dots, \frac{T^{1/(m+1)}}{t_{n+m+2}}; \frac{S^{1/(m+1)}}{s_1}, \dots, \frac{S^{1/(m+1)}}{s_{n+m+2}}; A\right). \quad (12.6)$$

Это соотношение обобщает преобразование (5.3), но естественные аналоги других E_7 -отражений отсутствуют. Таким образом, симметрии V -функции,

порожденные различными элементами группы Вейля для исключительной системы корней E_7 , имеют многомерные аналоги. Однако различные отражения обобщаются на разные интегралы, ядра которых обладают симметриями по переменным интегрирования, связанными с различными корневыми системами.

13. Заключение

Несмотря на достаточно большой объем, многие проблемы рассмотрены в этом обзоре только фрагментарно, значительная часть утверждений приведена без доказательств, а ряд интересных вопросов вообще не затронут. Перечислим некоторые пропущенные достижения теории эллиптических гипергеометрических функций и укажем несколько открытых важных проблем.

Предположим, что существует конечно-разностный оператор первого порядка, переводящий одни рациональные функции в другие с меньшим числом полюсов (“понижающий” оператор). В работе [106] показано, что это возможно только при условии, что полюсы этих рациональных функций параметризуются общей эллиптической функцией второго порядка, а сама проблема связана с отображением Понселе.

Описание связи между биортогональными рациональными функциями и аппроксимацией Паде с предписанными нулями и полюсами [70], [106], [107] нами пропущено. Так, в работе [107] показано, что ${}_{12}V_{11}$ -эллиптический гипергеометрический ряд появляется в интерполяционных таблицах Паде для некоторых функций.

Естественно ожидать, что многократные эллиптические бета-интегралы определяют меру в соотношениях биортогональности для некоторых функций многих переменных, обобщающих одномерные соотношения (7.8). Первую систему таких многомерных функций, основанную на эллиптическом аналоге интеграла Сельберга (10.8), построил Рэйнс [34], [35] с помощью повышающих и понижающих операторов. В определенных пределах эти функции вырождаются в ортогональные многочлены Макдональда [98], Корнвиндера [108] или интерполирующие многочлены Окунькова [109] (о связи с последними упомянутыми многочленами см. также [102]). Результаты работ [34], [35] представляют собой наиболее передовые достижения теории эллиптических гипергеометрических функций многих переменных. Другой тип обобщения многочленов Макдональда на тэта-функциональный уровень предложен в [110].

Имеется красивая геометрическая интерпретация некоторых эллиптических гипергеометрических функций в терминах динамики на алгебраических поверхностях. В [111] Сакаи дал классификацию дискретных уравнений Пенлеве, связанных с аффинными группами Вейля. На вершине этой схемы лежит эллиптическое уравнение Пенлеве, связанное с системой корней $\hat{E}_8$. В работе [112] это уравнение детально изучено и найдена его редукция к эллиптическому гипергеометрическому уравнению. Соответственно было указано, что эллиптический гипергеометрический ряд ${}_{12}V_{11}$ определяет частное решение эллиптического уравнения Пенлеве. Аналогичную роль играют общее решение

эллиптического гипергеометрического уравнения [31], [58] и BC_n -эллиптический гипергеометрический интеграл типа II при специальных значениях параметров [91].

Подход Похгаммера и Хорна к функциям гипергеометрического типа [1], [2], которым мы воспользовались в случае функций одной переменной, еще не обобщен на эллиптические гипергеометрические функции многих переменных. Для этого необходимо научиться решать системы разностных уравнений первого порядка для ядер многократных рядов и интегралов с коэффициентами, являющимися эллиптическими функциями по всем переменным суммирования или интегрирования [10], [11]. Эта задача весьма сложна, и все примеры, рассмотренные выше, построены, исходя из других конструктивных соображений. На этом пути возникает общая задача классификации всех типов эллиптических бета-интегралов и их многопараметрических расширений на функции более высокого порядка. В частности, ожидается, что существуют эллиптические обобщения многократных q -бета-интегралов для исключительных систем корней [113]. Отметим также, что все рассмотренные выше многократные интегралы являются интегралами по полициклам при подходящих ограничениях на параметры. Интересно было бы рассмотреть интегралы по более сложным областям комплексных переменных интегрирования.

В работе [9] рассмотрена некоторая нелинейная дискретная интегрируемая система и предложена автомоделная редукция соответствующих уравнений, приводящая к эллиптическим решениям со многими параметрами. При этом была построена система дискретных биортогональных функций, выражающихся через ${}_{12}V_{11}$ -ряды. Биортогональные функции, описанные в п. 7.1, представляют собой только частный случай этих более общих функций, связанных с комбинациями нескольких ${}_{12}V_{11}$ -рядов и содержащих три дополнительных параметра. Подробный анализ свойств этих функций еще не проведен. Среди открытых проблем, связанных с общим решением эллиптического гипергеометрического уравнения, упомянем поиск явного вида необрывающейся эллиптической гипергеометрической цепной дроби и построение эллиптических аналогов ассоциированных многочленов Аски–Вильсона [114].

Различные обобщения интегрального преобразования (6.9) на многомерные интегралы на корневых системах предложены в [36], но часть соответствующих формул обращения еще не доказана. Проблема сходимости бесконечных эллиптических гипергеометрических рядов требует глубокого анализа. Необходимо понять, в каком смысле могут существовать такие функции. На данный момент совершенно не ясно, каковы эллиптические аналоги теоретико-числовых свойств обычных гипергеометрических функций. Необходимо также выяснить, можно ли построить нетривиальные функции гипергеометрического типа для римановых поверхностей более высокого рода (простейший пример функций такого типа приведен в [115]).

В заключение можно констатировать, что основные структурные элементы теории обычных и q -гипергеометрических функций имеют свои естественные эллиптические аналоги. Более того, различные “старые” гипергеометрические понятия приобретают новый смысл, связанный со свойствами эллиптических функций. В настоящее время известно достаточно большое число примене-

ний эллиптических гипергеометрических функций в математической физике: в точно решаемых моделях статистической механики, связанных с эллиптическими решениями уравнения Янга–Бакстера [8] и алгеброй Складина [35], [79], [80], [116], в интегрируемых нелинейных цепочках с дискретным временем [9], в релятивистских квантовых многочастичных моделях типа Калоджеро–Сазерленда [58] и в нелинейных дискретных уравнениях типа Пенлеве [91], [112]. Естественно ожидать, что со временем количество таких приложений будет расти и, кроме того, найдутся новые концептуальные пересечения с другими разделами математики.

Я глубоко признателен своим соавторам О. Варнаару, Я. Ф. ван Диежену, А. С. Жеданову и Э. М. Рэйнссу за плодотворное сотрудничество и многочисленные стимулирующие дискуссии. В процессе работы над теорией эллиптических гипергеометрических функций были полезными обсуждения различных проблем с Х. Розенгреном, С. Руджинарсом и М. Шлоссером, внесшими свой существенный вклад в развитие этой теории, а также с Р. Аски, В. В. Зудилиным, К. Кратенталером, А. Левиным, Ю. И. Маниным, В. Б. Приезжевым, Д. Цагиром и Дж. Е. Эндрюсом. Этот обзор частично основан на докторской диссертации автора [31] и лекционных записках вводного курса, прочитанного в Независимом московском университете осенью 2005 г. Некоторые представленные результаты были получены во время визитов в Институт математики имени Макса Планка (Бонн), руководству которого я признателен за гостеприимство. Данная работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 08-01-00392.

Приложение А. Эллиптические функции и тэта-функции Якоби

Периоды некоторой периодической функции называются примитивными, если их линейные комбинации с целыми коэффициентами дают все периоды этой функции. Хорошо известно, что нетривиальные мероморфные периодические функции не могут иметь больше двух примитивных периодов [117]. Функции действительной переменной могут иметь только один примитивный период. Эти утверждения использовались при выводе выражения (2.21) и построении эллиптических аналогов функции Мейера. Мероморфные функции $f(u)$ с двумя примитивными периодами называются эллиптическими функциями, т. е. существуют $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0$, и $f(u + \omega_1) = f(u + \omega_2) = f(u)$.

Примитивные периоды эллиптической функции $f(u)$ образуют параллелограммы периодов и $f(u)$ определяется своими значениями внутри них и на паре смежных ребер. Назовем фундаментальной областью D внутренность одного из этих параллелограммов, выбранного так, что на его границе ∂D нет точек дивизора $f(u)$. Очевидно, что $f(u)$ (как мероморфная функция) имеет конечное число нулей и полюсов в D .

Интеграл $(2\pi i)^{-1} \int_{\partial D} \frac{f'(u)}{f(u)} du$ определяет число нулей в области D для целых функций и разность числа нулей и полюсов для мероморфных функций. Из-за периодичности этот интеграл равен нулю для эллиптических функций, т. е. для них число нулей в D равно числу полюсов. Это число нулей s (или полюсов) называется порядком эллиптической функции. Равенство

$f(u) = C$, где C – произвольная наперед заданная постоянная, выполняется в D ровно s раз (т.е. $f(u)$ есть s -листная функция). Это следует из того, что у эллиптической функции $f(u) - C$ имеется s полюсов в D и ровно s нулей соответственно.

Сумма вычетов полюсов $f(u)$ в D равна нулю, что следует из равенства $\int_{\partial D} f(u) du = 0$. Поэтому не существует эллиптических функций порядка $s = 1$, а эллиптическая функция нулевого порядка есть постоянная (теорема Лиувилля). Это дает способ доказательства тождеств для эллиптических функций – если разность функций $f_1(u) - f_2(u)$ (или отношение $f_1(u)/f_2(u)$) эллиптична и содержит не более одного полюса в фундаментальной области, то $f_1(u) - f_2(u) = \text{const}$ (или $f_1(u)/f_2(u) = \text{const}$).

Хорошо известная эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(u | \omega_1, \omega_2)$ [117] имеет в фундаментальной области один полюс второго порядка, т.е. $s = 2$. Пара $(x, y) = (\wp(u), \wp'(u))$ определяет униформизацию эллиптической кривой $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$. Эллиптические функции образуют дифференциальное поле, и любые две эллиптические функции $f(u)$ и $g(u)$ связаны алгебраическим соотношением $P(f, g) = 0$, где $P(f, g)$ – некоторый многочлен своих аргументов. При выборе $g(u) = f'(u)$ видно, что любая эллиптическая функция удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка $P(f, f') = 0$. Взяв $g(u) = f(u + y)$, получаем $P(f, g) = \sum_{k=0}^N p_k(f(u), y) \times f(u + y)^k = 0$, где $p_k(f(u), y)$ – некоторые многочлены по $f(u)$ с коэффициентами, зависящими от y . Переставив u и y , получаем, что $p_k(f(y), u) = p_k(f(u), y)$ суть симметричные многочлены $f(u)$ и $f(y)$ с постоянными коэффициентами. Поэтому условие $P(f, g) = 0$ переписывается в виде $Q(f(u), f(y), f(u + y)) = 0$, где Q – некоторый многочлен трех аргументов. При выполнении такого соотношения говорят, что функция $f(u)$ обладает алгебраической теоремой сложения. Вейерштрасс показал, что мероморфная функция $f(u)$, обладающая такой теоремой сложения, является либо эллиптической функцией, либо ее вырождением к тригонометрическим или рациональным функциям.

Для более явного представления эллиптических функций необходимы тэта-функции. Произвольные целые функции $f(u)$ называются (эллиптическими) тэта-функциями, если

$$f(u + \omega_1) = e^{au+b} f(u), \quad f(u + \omega_2) = e^{cu+d} f(u) \quad (\text{A.1})$$

для некоторых $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $\text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0$. Заменой u на $\omega_2 u$ и умножением $f(u)$ на $e^{\alpha u^2 + \beta u}$ с подобранными постоянными α и β можно добиться равенств

$$f(u + 1) = f(u), \quad f(u + \tau) = e^{au+b} f(u).$$

В этом приложении мы используем параметризацию $\tau = \omega_1/\omega_2$ и обозначаем $q = e^{2\pi i \tau}$ (в отличие от основного текста обзора, где $\tau = \omega_3/\omega_2$ и $p = e^{2\pi i \tau}$). При $a \neq 0$ параметр b можно устранить сдвигом $u \rightarrow u - b/a$. Для параллелограмма D с вершинами $(0, 1, 1 + \tau, \tau)$ находим $\int_{\partial D} \frac{f'(u)}{f(u)} du = -a$. Поэтому $a = -2\pi i s$, где величина $s = 0, 1, 2, \dots$ определяет число нулей $f(u)$ в D . Ключевая характеристика тэта-функции s называется ее порядком.

Периодичность $f(u+1) = f(u)$ позволяет разложить $f(u)$ в ряд Фурье $f(u) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{2\pi i j u}$. Подставляя его во второе уравнение с $a = -2\pi i s$ и решая возникающее рекуррентное соотношение на коэффициенты c_j , находим

$$f(u) = \sum_{l=0}^{s-1} c_l z^l \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{sk(k-1)/2} (q^l z^s)^k, \quad z = e^{2\pi i u}.$$

Коэффициенты $c_0, \dots, c_{s-1}$ произвольны, т. е. тэта-функции порядка s образуют s -мерное векторное пространство.

Если восстановить произвольные множители квазипериодичности, то тэта-функция без нулей равна $e^{P_2(u)}$, где $P_2(u)$ – некоторый многочлен второй степени. Тэта-функции первого порядка с одним нулем в фундаментальном параллелограмме квазипериодов называются тэта-функциями Якоби, а функции с $s > 1$ называются тэта-функциями высшего уровня. При $s = 1$ удобно работать с четырьмя тэта-функциями с характеристиками

$$\theta_{ab}(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\pi i \tau (k+a/2)^2} e^{2\pi i (k+a/2)(u+b/2)},$$

в которых переменные a и b принимают значения 0 или 1. Стандартные тэта-функции Якоби определяются так [12]:

$$\begin{aligned} \theta_1(u \mid \tau) &= \theta_1(u) = -\theta_{11}(u), \\ \theta_2(u \mid \tau) &= \theta_2(u) = \theta_{10}(u) = \theta_1\left(u + \frac{1}{2}\right), \\ \theta_3(u \mid \tau) &= \theta_3(u) = \theta_{00}(u) = e^{\pi i \tau / 4 + \pi i u} \theta_1\left(u + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right), \\ \theta_4(u \mid \tau) &= \theta_4(u) = \theta_{01}(u) = -i e^{\pi i \tau / 4 + \pi i u} \theta_1\left(u + \frac{\tau}{2}\right). \end{aligned}$$

Отметим, что все они имеют вид $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k$ с $h(k) = c_{k+1}/c_k = q^k u$ для некоторой постоянной u . Поскольку $h(k)$ рациональна по q^k , тэта-функции Якоби представляют собой специальный класс q -гипергеометрических функций.

$\theta_1(u)$ -функция нечетна, $\theta_1(-u) = -\theta_1(u)$, и подчиняется условиям квазипериодичности

$$\theta_1(u+1) = -\theta_1(u), \quad \theta_1(u+\tau) = -e^{-\pi i \tau - 2\pi i u} \theta_1(u).$$

Она связана с укороченной тэта-функцией $\theta(z; q) = (z; q)_{\infty} (qz^{-1}; q)_{\infty}$ тождеством тройного произведения Якоби

$$\theta_1(u) = i q^{1/8} e^{-\pi i u} (q; q)_{\infty} \theta(e^{2\pi i u}; q). \quad (\text{A.2})$$

Трансформационные свойства θ_1 -функции относительно $PSL(2, \mathbb{Z})$ -группы модулярных преобразований $\tau \rightarrow (a\tau + b)/(c\tau + d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = 1$, определяются соотношениями [118]

$$\theta_1(u \mid \tau + 1) = e^{\pi i / 4} \theta_1(u \mid \tau), \quad \theta_1\left(\frac{u}{\tau} \mid \frac{-1}{\tau}\right) = -i \sqrt{-i\tau} e^{\pi i u^2 / \tau} \theta_1(u \mid \tau). \quad (\text{A.3})$$

Удобно использовать обозначения

$$\theta_a(u_1, \dots, u_k) := \theta_a(u_1) \cdots \theta_a(u_k) \quad \text{и} \quad \theta_a(x \pm y) := \theta_a(x + y, x - y).$$

Тогда формула удвоения аргумента имеет вид

$$\theta_1(2u) = \frac{iq^{1/8}}{(q; q)_\infty^3} \theta_1\left(u, u + \frac{1}{2}, u + \frac{\tau}{2}, u - \frac{1+\tau}{2}\right).$$

Теорема сложения для тэта-функций, называемая иногда соотношением Римана, использует произведения четырех тэта-функций

$$\theta_1(u \pm a, v \pm b) - \theta_1(u \pm b, v \pm a) = \theta_1(a \pm b, u \pm v) \quad (\text{A.4})$$

или

$$\theta(xw^{\pm 1}, yz^{\pm 1}; p) - \theta(xz^{\pm 1}, yw^{\pm 1}; p) = yw^{-1} \theta(xy^{\pm 1}, wz^{\pm 1}; p). \quad (\text{A.5})$$

Доказательство этого равенства элементарно. Отношение выражений, стоящих в его левой и правой частях, есть ограниченная функция $x \in \mathbb{C}^*$ (оно инвариантно относительно замены $x \rightarrow px$ и не содержит полюсов в кольце $|p| \leq |x| \leq 1$). По теореме Лиувилля это отношение не зависит от x , а при $x = w$ оно равно 1.

Любая тэта-функция s -го порядка $f(u)$ с квазипериодами ω_1, ω_2 и координатами нулей в фундаментальной области $a_1, \dots, a_s$ может быть представлена в виде

$$f(u) = e^{P_2(u)} \prod_{k=1}^s \theta_1\left(\frac{u - a_k}{\omega_2} \mid \frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \quad (\text{A.6})$$

где $P_2(u)$ – некоторый многочлен u второго порядка. На самом деле, функция

$$g(u) = \prod_{k=1}^s \theta_1\left(\frac{u - a_k}{\omega_2} \mid \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$$

является тэта-функцией s -го порядка с теми же нулями в параллелограмме квазипериодов ω_1 и ω_2 , что и функция $f(u)$. Поэтому отношение $f(u)/g(u)$ является целой функцией без нулей и полюсов, точнее, тэта-функцией нулевого порядка, т. е. $e^{P_2(u)}$. В [118] предложена последовательная теория форм Якоби – функций, обладающих трансформационными свойствами, схожими со свойствами функций (A.6). Отметим, что все векторы $f_j(u)$, $j = 1, \dots, s$, любого базиса пространства тэта-функций s -го порядка представимы в указанном виде с матрицей нулей a_{jk} , удовлетворяющей ряду ограничений (например, $\sum_{k=1}^s a_{jk} = \text{const}$).

Назовем мероморфными тэта-функциями отношения тэта-функций произвольного конечного порядка. Легко видеть, что они определяют мероморфные решения уравнений (A.1). Для этого обозначим через $a_1, \dots, a_n$ координаты нулей, а через $b_1, \dots, b_m$ координаты полюсов соответствующей функции $f(u)$ в фундаментальной области. Тогда отношение

$$\frac{f(u) \prod_{k=1}^m \theta_1\left(\frac{u - b_k}{\omega_2} \mid \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\prod_{k=1}^n \theta_1\left(\frac{u - a_k}{\omega_2} \mid \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}$$

является целой функцией без нулей, удовлетворяющей уравнениям $f(u + \omega_1) = e^{a'u + b'} f(u)$ и $f(u + \omega_2) = e^{c'u + d'}$ с некоторыми a' , b' , c' , d' , т. е. тэта-функцией нулевого порядка $e^{P_2(u)}$.

Любая эллиптическая функция $f(u)$ конечного порядка s с периодами ω_1, ω_2 может быть представлена в виде

$$f(u) = C \prod_{k=1}^s \frac{\theta_1\left(\frac{u-a_k}{\omega_2} \mid \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\theta_1\left(\frac{u-b_k}{\omega_2} \mid \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}, \quad (\text{A.7})$$

где C – некоторая постоянная, а a_k и b_k обозначают координаты некоторых нулей и полюсов $f(u)$, конгруэнтных нулям и полюсам в фундаментальном параллелограмме периодов. При этом должно выполняться следующее ограничение на a_k и b_k :

$$a_1 + \dots + a_s = b_1 + \dots + b_s \pmod{\omega_2}. \quad (\text{A.8})$$

Это утверждение следует из того, что обе части равенства (A.7) мероморфны и дважды периодичны. Поэтому их отношение будет ограниченной целой функцией, т. е. постоянной. Линейное ограничение на значения a_k и b_k (A.8), которое мы называем условием балансировки, возникает из условия сокращения множителей квазипериодичности θ_1 -функций, порожденных сдвигом $u \rightarrow u + \omega_1$.

Подставляя выражение (A.2) в (A.7) и обозначая $z = e^{2\pi i u / \omega_2}$, $t_k = e^{-2\pi i a_k / \omega_2}$, $w_k = e^{-2\pi i b_k / \omega_2}$, получаем

$$f(u) = \pm C \prod_{k=1}^s \frac{\theta(t_k z; q)}{\theta(w_k z; q)}, \quad \prod_{k=1}^s t_k = \prod_{k=1}^s w_k, \quad (\text{A.9})$$

где неоднозначность в выборе знака возникла из-за множителя $e^{-\pi i u}$ в (A.2).

Список литературы

- [1] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions*, Encyclopedia Math. Appl., **71**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [2] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах, “Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа”, *УМН*, **47:4** (1992), 3–82; англ. пер.: I. M. Gel'fand, M. I. Graev, V. S. Retakh, “General hypergeometric systems of equations and series of hypergeometric type”, *Russian Math. Surveys*, **47:4** (1992), 1–88.
- [3] G. Gasper, M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, 2nd ed., Encyclopedia Math. Appl., **96**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [4] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантовый метод обратной задачи. I”, *ТМФ*, **40:2** (1979), 194–220; англ. пер.: E. K. Sklyanin, L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, “Quantum inverse problem method. I”, *Theoret. Math. Phys.*, **40:2** (1979), 688–706.
- [5] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга”, *УМН*, **34:5** (1979), 13–63; англ. пер.: L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, “The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model”, *Russian Math. Surveys*, **34:5** (1979), 11–68.

- [6] R. J. Baxter, “Partition function of the eight-vertex lattice model”, *Ann. Physics*, **70**:1 (1972), 193–228.
- [7] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa, M. Okado, “Exactly solvable SOS models, II. Proof of the star-triangle relation and combinatorial identities”, *Conformal field theory and solvable lattice models* (Kyoto, 1986), Adv. Stud. Pure Math., **16**, Academic Press, Boston, MA, 1988, 17–122.
- [8] I. B. Frenkel, V. G. Turaev, “Elliptic solutions of the Yang–Baxter equation and modular hypergeometric functions”, *The Arnold–Gelfand mathematical seminars*, Birkhäuser, Boston, MA, 1997, 171–204.
- [9] V. P. Spiridonov, A. S. Zhedanov, “Spectral transformation chains and some new biorthogonal rational functions”, *Comm. Math. Phys.*, **210**:1 (2000), 49–83.
- [10] V. P. Spiridonov, “Theta hypergeometric series”, *Asymptotic combinatorics with application to mathematical physics* (St. Petersburg, 2001), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **77**, Kluwer, Dordrecht, 2002, 307–327; [arXiv:math/0303204](#).
- [11] V. P. Spiridonov, “Theta hypergeometric integrals”, *Алгебра и анализ*, **15**:6 (2003), 161–215; англ. изд.: V. P. Spiridonov, “Theta hypergeometric integrals”, *St. Petersburg Math. J.*, **15**:6 (2004), 929–967; [arXiv:math/0303205](#).
- [12] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Ч. I: Функции Лежандра*, Наука, М., 1965; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. I, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
- [13] E. W. Barnes, “On the theory of the multiple gamma function”, *Cambr. Trans.*, **19** (1904), 374–425.
- [14] F. H. Jackson, “The basic gamma-function and the elliptic functions”, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, **76**:508 (1905), 127–144.
- [15] T. Shintani, “On a Kronecker limit formula for real quadratic field”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **24**:1 (1977), 167–199.
- [16] N. Kurokawa, “Multiple sine functions and Selberg zeta functions”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **67**:3 (1991), 61–64.
- [17] L. D. Faddeev, “Discrete Heisenberg–Weyl group and modular group”, *Lett. Math. Phys.*, **34**:3 (1995), 249–254.
- [18] S. N. M. Ruijsenaars, “First order analytic difference equations and integrable quantum systems”, *J. Math. Phys.*, **38**:2 (1997), 1069–1146.
- [19] M. Jimbo, T. Miwa, “Quantum KZ equation with $|q| = 1$ and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime”, *J. Phys. A*, **29**:12 (1996), 2923–2958.
- [20] V. Tarasov, A. Varchenko, “Geometry of q -hypergeometric functions, quantum affine algebras and elliptic quantum groups”, *Astérisque*, 1997, № 246, 1–135; [arXiv:q-alg/9703044](#).
- [21] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, A. Yu. Volkov, “Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. I: Algebraic approach and duality”, *Commun. Math. Phys.*, **219**:1 (2001), 199–219.
- [22] B. Ponsot, J. Teschner, “Clebsch–Gordan and Racah–Wigner coefficients for a continuous series of representations of $U_q(sl(2, \mathbb{R}))$ ”, *Comm. Math. Phys.*, **224**:3 (2001), 613–655.
- [23] S. Kharchev, D. Lebedev, M. Semenov-Tian-Shansky, “Unitary representations of $U_q(sl(2, \mathbb{R}))$, the modular double and the multiparticle q -deformed Toda chains”, *Comm. Math. Phys.*, **225**:3 (2002), 573–609.
- [24] A. Yu. Volkov, “Noncommutative hypergeometry”, *Comm. Math. Phys.*, **258**:2 (2005), 257–273.
- [25] G. Felder, A. Varchenko, “The elliptic gamma function and $SL(3, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^3$ ”, *Adv. Math.*, **156**:1 (2000), 44–76.

- [26] E. Friedman, S. Ruijsenaars, “Shintani–Barnes zeta and gamma functions”, *Adv. Math.*, **187**:2 (2004), 362–395.
- [27] A. Narukawa, “The modular properties and the integral representations of the multiple elliptic gamma functions”, *Adv. Math.*, **189**:2 (2004), 247–267.
- [28] E. M. Rains, “Limits of elliptic hypergeometric integrals”, *Ramanujan J.*, to appear; [arXiv: math/0607093](#), 2006.
- [29] В. П. Спиридонов, “Об эллиптической бета-функции”, *УМН*, **56**:1 (2001), 181–182; англ. пер.: V. P. Spiridonov, “On the elliptic beta function”, *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 185–186.
- [30] В. П. Спиридонов, “Дерево Бэйли для интегралов”, *ТМФ*, **139**:1 (2004), 104–111; англ. пер.: V. P. Spiridonov, “A Bailey tree for integrals”, *Theoret. and Math. Phys.*, **139**:1 (2004), 536–541.
- [31] В. П. Спиридонов, *Эллиптические гипергеометрические функции*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, ЛТФ ОИЯИ, Дубна, 2004.
- [32] J. F. van Diejen, V. P. Spiridonov, “An elliptic Macdonald–Morris conjecture and multiple modular hypergeometric sums”, *Math. Res. Lett.*, **7**:5–6 (2000), 729–746.
- [33] J. F. van Diejen, V. P. Spiridonov, “Elliptic Selberg integrals”, *Internat. Math. Res. Notices*, 2001, № 20, 1083–1110.
- [34] E. M. Rains, “Transformations of elliptic hypergeometric integrals”, *Ann. of Math.* (to appear); [arXiv: math/0309252](#).
- [35] E. M. Rains, “ BC_n -symmetric Abelian functions”, *Duke Math. J.*, **135**:1 (2006), 99–180.
- [36] V. P. Spiridonov, S. O. Warnaar, “Inversions of integral operators and elliptic beta integrals on root systems”, *Adv. Math.*, **207**:1 (2006), 91–132.
- [37] S. N. M. Ruijsenaars, “On Barnes’ multiple zeta and gamma functions”, *Adv. Math.*, **156**:1 (2000), 107–132.
- [38] J. F. van Diejen, V. P. Spiridonov, “Unit circle elliptic beta integrals”, *Ramanujan J.*, **10**:2 (2005), 187–204.
- [39] M. Rahman, “An integral representation of a $_{10}\phi_9$ and continuous bi-orthogonal $_{10}\phi_9$ rational functions”, *Canad. J. Math.*, **38**:3 (1986), 605–618.
- [40] B. Nassrallah, M. Rahman, “Projection formulas, a reproducing kernel and a generating function for q -Wilson polynomials”, *SIAM J. Math. Anal.*, **16**:1 (1985), 186–197.
- [41] R. Askey, J. Wilson, “Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **54**:319 (1985).
- [42] R. Askey, “Beta integrals in Ramanujan’s papers, his unpublished work and further examples”, *Ramanujan revisited* (Urbana-Champaign, IL, 1987), Academic Press, Boston, MA, 1988, 561–590.
- [43] V. P. Spiridonov, “Short proofs of the elliptic beta integrals”, *Ramanujan J.*, **13**:1–3 (2007), 265–283; [arXiv: math/0408369](#).
- [44] H. S. Wilf, D. Zeilberger, “An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and “ q ”) multisum/integral identities”, *Invent. Math.*, **108**:3 (1992), 575–633.
- [45] H. Rosengren, “A proof of a multivariable elliptic summation formula conjectured by Warnaar”, *q -series with applications to combinatorics, number theory, and physics* (Urbana, IL, 2000), Contemp. Math., **291**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 193–202; [arXiv: math/0101073](#).
- [46] V. P. Spiridonov, A. S. Zhedanov, “To the theory of biorthogonal rational functions”, *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku*, 2003, № 1302, 172–192.
- [47] M. Schlosser, “Elliptic enumeration of nonintersecting lattice paths”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **114**:3 (2007), 505–521.

- [48] M. Schlosser, *A Taylor expansion theorem for an elliptic extension of the Askey–Wilson operator*, [arXiv: 0803.2329](#).
- [49] W. Chu, C. Jia, “Abel’s method on summation by parts and theta hypergeometric series”, *J. Combin. Theory Ser. A* (to appear).
- [50] J. V. Stokman, “Hyperbolic beta integrals”, *Adv. Math.*, **190**:1 (2005), 119–160.
- [51] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.
- [52] V. P. Spiridonov, “An elliptic incarnation of the Bailey chain”, *Int. Math. Res. Not.*, 2002, № 37, 1945–1977.
- [53] S. O. Warnaar, “Summation and transformation formulas for elliptic hypergeometric series”, *Constr. Approx.*, **18**:4 (2002), 479–502.
- [54] S. O. Warnaar, “Summation formulae for elliptic hypergeometric series”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**:2 (2005), 519–527.
- [55] G. Gasper, M. Schlosser, “Summation, transformation, and expansion formulas for multibasic theta hypergeometric series”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, **11**:1 (2005), 67–84; [arXiv: math/0505215](#).
- [56] H. Rosengren, M. Schlosser, “On Warnaar’s elliptic matrix inversion and Karlsson–Minton-type elliptic hypergeometric series”, *J. Comput. Appl. Math.*, **178**:1–2 (2005), 377–391.
- [57] A. Zhedanov, *Elliptic polynomials orthogonal on the unit circle with a dense point spectrum*, [arXiv: 0711.4696](#).
- [58] В. П. Спиридонов, “Эллиптические гипергеометрические функции и модели типа Калоджеро–Сазерленда”, *ТМФ*, **150**:2 (2007), 311–324; англ. пер: V. P. Spiridonov, “Elliptic hypergeometric functions and Calogero–Sutherland-type models”, *Theoret. Math. Phys.*, **150**:2 (2007), 266–277.
- [59] E. M. Rains, V. P. Spiridonov, *Determinants of elliptic hypergeometric integrals*, [arXiv: 0712.4253](#).
- [60] S. N. M. Ruijsenaars, “Generalized hypergeometric function satisfying four analytic difference equations of Askey–Wilson type”, *Comm. Math. Phys.*, **206**:3 (1999), 639–690.
- [61] F. J. van de Bult, E. M. Rains, J. V. Stokman, “Properties of generalized univariate hypergeometric functions”, *Comm. Math. Phys.*, **275**:1 (2007), 37–95; [arXiv: math/0607250](#).
- [62] J. F. van Diejen, “Integrability of difference Calogero–Moser systems”, *J. Math. Phys.*, **35**:6 (1994), 2983–3004.
- [63] Y. Komori, K. Hikami, “Quantum integrability of the generalized elliptic Ruijsenaars models”, *J. Phys. A*, **30**:12 (1997), 4341–4364.
- [64] S. N. M. Ruijsenaars, “Complete integrability of relativistic Calogero–Moser systems and elliptic function identities”, *Comm. Math. Phys.*, **110**:2 (1987), 191–213.
- [65] V. I. Inozemtsev, “Lax representation with spectral parameter on a torus for integrable particle systems”, *Lett. Math. Phys.*, **17**:1 (1989), 11–17.
- [66] G. E. Andrews, “Bailey’s transform, lemma, chains and tree”, *Special functions 2000: current perspective and future directions* (Tempe, AZ), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **30**, Kluwer, Dordrecht, 2001, 1–22.
- [67] S. O. Warnaar, “Extensions of the well-poised and elliptic well-poised Bailey lemma”, *Indag. Math. (N.S.)*, **14**:3–4 (2003), 571–588.
- [68] D. M. Bressoud, “A matrix inverse”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **88**:3 (1983), 446–448.
- [69] X. R. Ma, “An extension of Warnaar’s matrix inversion”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**:11 (2005), 3179–3189.

- [70] A. Zhedanov, “Biorthogonal rational functions and the generalized eigenvalue problem”, *J. Approx. Theory*, **101**:2 (1999), 303–329.
- [71] M. E. H. Ismail, D. R. Masson, “Generalized orthogonality and continued fractions”, *J. Approx. Theory*, **83**:1 (1995), 1–40.
- [72] А. А. Гончар, “О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций”, *Матем. сб.*, **105**:2 (1978), 147–163; англ. пер.: A. A. Gonchar, “On the speed of rational approximation of some analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **34**:2 (1978), 131–145.
- [73] А. А. Гончар, Г. Лопес Лагомасино, “О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **105**:4 (1978), 512–525; англ. пер.: A. A. Gonchar, G. López Lagomasino, “On Markov’s theorem for multipoint Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **34**:4 (1978), 449–459.
- [74] V. P. Spiridonov, A. S. Zhedanov, “Classical biorthogonal rational functions on elliptic grids”, *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.*, **22**:2 (2000), 70–76.
- [75] J. A. Wilson, “Orthogonal functions from Gram determinants”, *SIAM J. Math. Anal.*, **22**:4 (1991), 1147–1155.
- [76] H. Rosengren, “An elementary approach to $6j$ -symbols (classical, quantum, rational, trigonometric, and elliptic)”, *Ramanujan J.*, **13**:1–3 (2007), 131–166.
- [77] D. P. Gupta, D. R. Masson, “Contiguous relations, continued fractions and orthogonality”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**:2 (1998), 769–808.
- [78] D. P. Gupta, D. R. Masson, “Watson’s basic analogue of Ramanujan’s entry 40 and its generalization”, *SIAM J. Math. Anal.*, **25**:2 (1994), 429–440.
- [79] В. П. Спиридонов, “Непрерывная биортогональность эллиптической гипергеометрической функции”, *Алгебра и анализ* (в печати); [arXiv: 0801.4137](https://arxiv.org/abs/0801.4137).
- [80] H. Rosengren, “Sklyanin invariant integration”, *Int. Math. Res. Not.*, 2004, № 60, 3207–3232; [arXiv: math/0405072](https://arxiv.org/abs/math/0405072).
- [81] Е. К. Склянин, “О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера”, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 27–34; англ. пер.: E. K. Sklyanin, “Some algebraic structures connected with the Yang–Baxter equation”, *Funct. Anal. Appl.*, **16**:4 (1982), 263–270.
- [82] Е. К. Склянин, “О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга–Бакстера. Представления квантовой алгебры”, *Функц. анализ и его прил.*, **17**:4 (1983), 34–48; англ. пер.: E. K. Sklyanin, “Some algebraic structures connected with the Yang–Baxter equation. Representations of quantum algebras”, *Funct. Anal. Appl.*, **17**:4 (1983), 273–284.
- [83] Yu. I. Manin, “Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of P^2 ”, *Geometry of differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **186**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 131–151.
- [84] L. D. Faddeev, “Modular double of a quantum group”, *Conférence Moshé Flato*, vol. I (Dijon, 1999), Math. Phys. Stud., **21**, Kluwer, Dordrecht, 2000, 149–156.
- [85] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа, Ч. 2: Трансцендентные функции*, М., 1963; пер. с англ.: E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1915.
- [86] H. Rosengren, “Elliptic hypergeometric series on root systems”, *Adv. Math.*, **181**:2 (2004), 417–447.
- [87] R. A. Gustafson, “Multilateral summation theorems for ordinary and basic hypergeometric series in $U(n)$ ”, *SIAM J. Math. Anal.*, **18**:6 (1987), 1576–1596.
- [88] C. Krattenthaler, “The major counting of nonintersecting lattice paths and generating functions for tableaux”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **115**:552 (1995).
- [89] Y. Kajihara, M. Noumi, “Multiple elliptic hypergeometric series. An approach from the Cauchy determinant”, *Indag. Math. (N.S.)*, **14**:3–4 (2003), 395–421.

- [90] H. Rosengren, M. Schlosser, “Summations and transformations for multiple basic and elliptic hypergeometric series by determinant evaluations”, *Indag. Math. (N.S.)*, **14**:3–4 (2003), 483–513.
- [91] E. M. Rains, “Recurrences for elliptic hypergeometric integrals”, *Rokko Lect. Math.*, **18** (2005), 183–199; [arXiv: math/0504285](#).
- [92] H. Rosengren, M. Schlosser, “Elliptic determinant evaluations and the Macdonald identities for affine root systems”, *Compos. Math.*, **142**:4 (2006), 937–961.
- [93] H. Rosengren, “Sums of triangular numbers from the Frobenius determinant”, *Adv. Math.*, **208**:2 (2007), 935–961.
- [94] H. Rosengren, *An Izergin–Korepin-type identity for the 8VSOS model, with applications to alternating sign matrices*, [arXiv: 0801.1229](#).
- [95] R. A. Gustafson, “Some q -beta and Mellin–Barnes integrals with many parameters associated to the classical groups”, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**:2 (1992), 525–551.
- [96] R. A. Gustafson, “Some q -beta integrals on $SU(n)$ and $Sp(n)$ that generalize the Askey–Wilson and Nassrallah–Rahman integrals”, *SIAM J. Math. Anal.*, **25**:2 (1994), 441–449.
- [97] P. J. Forrester, S. O. Warnaar, “The importance of the Selberg integral”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, to appear; [arXiv: 0710.3981](#).
- [98] I. G. Macdonald, “Constant term identities, orthogonal polynomials, and affine Hecke algebras”, *Doc. Math.*, **I** (1998), 303–317.
- [99] G. W. Anderson, “A short proof of Selberg’s generalized beta formula”, *Forum Math.*, **3**:4 (1991), 415–417.
- [100] R. A. Gustafson, M. A. Rakha, “ q -Beta integrals and multivariate basic hypergeometric series associated to root systems of type A_m ”, *Ann. Comb.*, **4**:3–4 (2000), 347–373.
- [101] J. F. van Diejen, V. P. Spiridonov, “Modular hypergeometric residue sums of elliptic Selberg integrals”, *Lett. Math. Phys.*, **58**:3 (2001), 223–238.
- [102] H. Coskun, R. A. Gustafson, “Well-poised Macdonald functions W_λ and Jackson coefficients ω_λ on BC_n ”, *Jack, Hall–Littlewood and Macdonald polynomials*, Contemp. Math., **417**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 127–155.
- [103] R. Y. Denis, R. A. Gustafson, “An $SU(n)$ q -beta integral transformation and multiple hypergeometric series identities”, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**:2 (1992), 552–561.
- [104] S. C. Milne, “Multiple q -series and $U(n)$ generalizations of Ramanujan’s ${}_1\Psi_1$ sum”, *Ramanujan revisited* (Urbana-Champaign, IL, 1987), Academic Press, Boston, MA, 1988, 473–524.
- [105] A. L. Dixon, “Generalisations of Legendre’s formula $KE' - (K - E)K' = \frac{1}{2}\pi$ ”, *Proc. London Math. Soc.*, **2**:1 (1905), 206–224.
- [106] V. P. Spiridonov, A. S. Zhedanov, “Elliptic grids, rational functions, and the Padé interpolation”, *Ramanujan J.*, **13**:1–3 (2007), 285–310.
- [107] A. Zhedanov, “Padé interpolation table and biorthogonal rational functions”, *Rokko Lect. Math.*, **18** (2005), 323–363.
- [108] T. H. Koornwinder, “Askey–Wilson polynomials for root systems of type BC ”, *Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications* (Tampa, FL, 1991), Contemp. Math., **138**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 189–204.
- [109] A. Okounkov, “ BC -type interpolation Macdonald polynomials and binomial formula for Koornwinder polynomials”, *Transform. Groups*, **3**:2 (1998), 181–207.
- [110] G. Felder, A. Varchenko, “Hypergeometric theta functions and elliptic Macdonald polynomials”, *Int. Math. Res. Not.*, 2004, № 21, 1037–1055.

- [111] H. Sakai, “Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations”, *Comm. Math. Phys.*, **220**:1 (2001), 165–229.
- [112] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta, Y. Yamada, “ ${}_{10}E_9$ solution to the elliptic Painlevé equation”, *J. Phys. A*, **36**:17 (2003), L263–L272.
- [113] M. Ito, “Askey–Wilson type integrals associated with root systems”, *Ramanujan J.*, **12**:1 (2006), 131–151.
- [114] M. E. H. Ismail, M. Rahman, “The associated Askey–Wilson polynomials”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **328**:1 (1991), 201–237.
- [115] V. P. Spiridonov, “A multiparameter summation formula for Riemann theta functions”, *Jack, Hall–Littlewood and Macdonald polynomials*, *Contemp. Math.*, **417**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 345–353.
- [116] H. Konno, “The vertex-face correspondence and the elliptic $6j$ -symbols”, *Lett. Math. Phys.*, **72**:3 (2005), 243–258; [arXiv:math/0503725](#).
- [117] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970; англ. пер.: N. I. Akhiezer, *Elements of the theory of elliptic functions*, *Transl. Math. Monogr.*, **79**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.
- [118] M. Eichler, D. Zagier, *The theory of Jacobi forms*, *Progr. Math.*, **55**, Birkhäuser, Boston, MA, 1985.

В. П. Спиридонов (V. P. Spiridonov)

Лаборатория теоретической физики ОИЯИ, Дубна

E-mail: spiridon@theor.jinr.ru

Поступила в редакцию

09.04.2008