Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гайфуллин, Реализация циклов асферичными многообразиями, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 3, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:31:50

Реализация циклов асферичными многообразиями

А. А. Гайфуллин

В конце 1940-х годов Н. Стиррод поставил следующую проблему, известную как проблема о реализации циклов: существуют ли для данного класса гомологий $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ ориентированное многообразие N^n и отображение $f: N^n \rightarrow X$ такие, что $f_*[N^n] = z$? Знаменитая теорема Р. Тома утверждает, что с некоторой кратностью каждый целочисленный класс гомологий реализуем по Стирроду. Классической является задача о реализации циклов образами сфер, т.е. задача об изучении образа гомоморфизма Гуревича. В такой постановке не каждый класс гомологий реализуем с некоторой кратностью. Представляет интерес задача о нахождении класса $\mathcal{M}_n$ гладких n -мерных многообразий, достаточного для реализации с некоторой кратностью всех целочисленных n -мерных классов гомологий любого пространства X . Центральным результатом настоящей заметки является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть M^n – многообразие изоспектральных вещественных симметрических трехдиагональных $(n+1) \times (n+1)$ -матриц и X – произвольное линейно связное топологическое пространство. Для любого класса гомологий $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ существуют связное конечноелистное накрытие $p: \hat{M}^n \rightarrow M^n$ и отображение $f: \hat{M}^n \rightarrow X$ такие, что $f_*[\hat{M}^n] = qz$ для некоторого целого числа q .

К. Томеи [1] доказал, что M^n – асферичное гладкое ориентируемое многообразие. (Многообразие называется *асферичным*, если оно имеет гомотопический тип $K(\pi, 1)$.) Группа $\pi_1(M^n)$ была вычислена М. Дэвисом [2]. Он доказал, что она изоморфна свободной от кручения подгруппе конечного индекса группы Кокстера

$$W = \langle s_1, \dots, s_n, r_1, \dots, r_n \mid s_i^2 = r_i^2 = 1, s_i s_j = s_j s_i \text{ при } |i - j| > 1, \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, r_i r_j = r_j r_i, s_i r_j = r_j s_i \text{ при } i \neq j \rangle.$$

СЛЕДСТВИЕ. Каждый целочисленный класс гомологий любого линейно связного пространства может быть с некоторой кратностью реализован образом ориентированного асферичного гладкого многообразия, фундаментальная группа которого изоморфна свободной от кручения подгруппе конечного индекса группы W .

Положим $[n+1] = \{1, 2, \dots, n+1\}$. Пусть $\mathcal{S}$ – множество всех непустых собственных подмножеств $\omega \subset [n+1]$. Пермутаэдром Π^n называется выпуклая оболочка точек, полученных всевозможными перестановками координат точки $(1, 2, \dots, n+1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Пермутаэдр является n -мерным простым выпуклым многогранником. Его гиперграни F_ω находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами $\omega \in \mathcal{S}$. Гиперграни F_{ω_1} и F_{ω_2} пересекаются тогда и только тогда, когда $\omega_1 \subset \omega_2$ или $\omega_2 \subset \omega_1$. Каждая грань пермутаэдра Π^n имеет вид $F_{\omega_1} \cap \dots \cap F_{\omega_k}$, где $\emptyset \subsetneq \omega_1 \subsetneq \dots \subsetneq \omega_k \subsetneq [n+1]$; ее барицентр мы обозначим через $b_{\omega_1, \dots, \omega_k}(\Pi^n)$.

К. Томеи [1] построил разбиение многообразия M^n на 2^n пермутаэдров, имеющее вид $M^n = (\mathbb{Z}_2^n \times \Pi^n) / \sim$, где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлениями $(g, x) \sim (e_{|\omega|} g, x)$, если $x \in F_\omega$. Здесь $e_1, \dots, e_n$ – образующие группы $\mathbb{Z}_2^n$. Пусть $[g, x]$ – класс эквивалентности пары (g, x) . Дадим явную конструкцию разбиения многообразия $\hat{M}^n$ на пермутаэдры, накрывающего разбиение многообразия M^n . Каждый класс гомологий линейно связного пространства может быть реализован образом сильно связного ориентированного псевдомногообразия Z^n (см. определение в [3; § 24]). Поэтому нам достаточно доказать теорему в случае $X = Z^n$ и $z = [Z^n]$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-72551-НЦНИЛ-а) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-1824.2008.1).

Перейдя к первому барицентрическому подразделению комплекса Z^n , мы можем считать, что его вершины окрашены в цвета из множества $[n+1]$ правильным образом, т.е. так, что вершины, соединенные ребром, окрашены в разные цвета. Обозначим через $\mu(\sigma)$ множество цветов вершин симплекса σ . Для n -мерного симплекса σ обозначим через $b_\omega(\sigma)$ барицентр грани $\tau \subset \sigma$ такой, что $\mu(\tau) = \omega$.

Обозначим через U множество n -мерных симплексов комплекса Z^n . Из наличия правильной раскраски вершин следует, что множество U может быть разбито на две части $U_+ \sqcup U_-$ так, что симплексы, имеющие общую гипергрань, лежат в разных частях. Для любого $\omega \in \mathcal{S}$ обозначим через $\mathcal{P}_\omega$ множество инволюций $\Lambda: U \rightarrow U$ таких, что $\Lambda(U_\pm) = U_\mp$ и $\mu(\sigma \cap \Lambda(\sigma)) \supset \omega$ для любого симплекса $\sigma \in U$. Множества $\mathcal{P}_\omega$ непусты. Определим гомоморфизм $\eta: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ на образующих по формуле $\eta(e_i) = -1$. Определим множество V и инволюции $\Phi_\omega: V \rightarrow V$ по формулам

$$V = \left(U_+ \times \prod_{\omega \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_\omega \times \eta^{-1}(1) \right) \cup \left(U_- \times \prod_{\omega \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_\omega \times \eta^{-1}(-1) \right) \subset U \times \prod_{\omega \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_\omega \times \mathbb{Z}_2^n,$$

$$\Phi_\omega(\sigma, (\Lambda_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{S}}, g) = (\Lambda_\omega(\sigma), (\tilde{\Lambda}_\gamma)_{\gamma \in \mathcal{S}}, e_{|\omega|}g),$$

где $\tilde{\Lambda}_\gamma = \Lambda_\omega \circ \Lambda_\gamma \circ \Lambda_\omega$, если $\gamma \subset \omega$, и $\tilde{\Lambda}_\gamma = \Lambda_\gamma$, если $\gamma \not\subset \omega$.

Положим $\hat{M}^n = V \times \Pi^n / \sim$, где отношение эквивалентности $\sim$ порождено отождествлениями $(v, x) \sim (\Phi_\omega(v), x)$, если $x \in F_\omega$.

Проекция $p: \hat{M}^n \rightarrow M^n$ определяется по формуле $p([\sigma, (\Lambda_\omega)_{\omega \in \mathcal{S}}, g, x]) = [g, x]$. Отображение p корректно определено и является конечнолистным накрытием. Таким образом, $\hat{M}^n$ – гладкое ориентированное многообразие.

Пусть K – триангуляция многообразия $\hat{M}^n$, являющаяся барицентрическим подразделением построенного разбиения на пермутаэдры. Определим отображение $f: \hat{M}^n \rightarrow Z^n$ на вершинах триангуляции K по формуле $f([v, b_{\omega_1, \dots, \omega_k}(\Pi^n)]) = b_{\omega_1}(\sigma)$ и продолжим его по линейности на каждый симплекс триангуляции K . Отображение f корректно определено и $f_*[\hat{M}^n] = q[Z^n]$, где $q = 2^{n-1} \prod_{\omega \in \mathcal{S}} |\mathcal{P}_\omega|$.

Построенное многообразие $\hat{M}^n$ не обязано быть связным. Искомым многообразием является произвольная связная компонента многообразия $\hat{M}^n$.

Многообразие $\hat{M}^n$ неявно возникало в работе автора [4] в частном случае более общей конструкции реализации циклов. Разбиение многообразия $\hat{M}^n$, построенное в настоящей работе, отлично от разбиения, построенного в [4], и приспособлено для доказательства того, что $\hat{M}^n$ накрывает M^n .

Автор благодарен В. М. Бухштаберу за постановку задачи и постоянное внимание, а также С. М. Натанзону, А. В. Пенскому, А. Б. Сосинскому и О. В. Шварцману за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] C. Tomei, *Duke Math. J.*, **51**:4 (1984), 981–996. [2] M. W. Davis, *Duke Math. J.*, **55**:1 (1987), 105–139. [3] Г. Зейферт, В. Трельфалль, *Топология*, Л., 1938; пер. с нем.: Н. Seifert, W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig–Berlin, 1934. [4] А. А. Гайфуллин, *УМН*, **62**:6 (2007), 167–168; англ. пер.: A. A. Gaifullin, *Russian Math. Surveys*, **62**:6 (2007), 1199–1201.

А. А. Гайфуллин (A. A. Gaifullin)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gaifull@mcme.ru

Представлено В. М. Бухштабером

Принято редакцией
19.03.2008