Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Фрянцев, О полиномиальных решениях линейных дифференциальных уравнений, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 3, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9199>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 14:08:45

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О полиномиальных решениях линейных
дифференциальных уравнений

А. В. Фрянец

В статье предлагается метод, позволяющий сводить линейное дифференциальное уравнение к определенному функциональному уравнению; при этом множества полиномиальных решений этих двух уравнений совпадают. Метод основан на аппроксимативных свойствах сумм $\sum_{\mu} \lambda_{\mu} h(\lambda_{\mu} z)$, где h есть фиксированная аналитическая функция, а аппроксимация проводится за счет подбора чисел λ_{μ} . Суммы такого вида как аппарат приближения впервые рассматривались в работах [1], [2], они являются естественным обобщением так называемых наипростейших дробей (см. [3], [4], [5]). В работе автора [6] указанные суммы применялись для аппроксимации дифференциальных многочленов. Следующая теорема получается из теоремы 1 этой работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть m, k и n – натуральные числа такие, что $n \geq k + m$. Пусть числа $\lambda_{\mu} = \lambda_{\mu}(n, k)$, $\mu = 1, \dots, n$, являются корнями уравнения

$$\sum_{\mu=0}^N (-1)^{\mu} \frac{\lambda^{n-k\mu}}{k^{\mu} \mu!} = 0, \quad N = \left[\frac{n}{k} \right], \quad (1)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Тогда для любого многочлена $P_m(z) = p_m z^m + p_{m-1} z^{m-1} + \dots + p_0$, $p_j \in \mathbb{C}$, степени не выше m имеют место равенства

$$P_m^{(s)}(z) = s! \sum_{\mu=1}^n \lambda_{\mu}^{k-s} P_m(z + \lambda_{\mu}), \quad s = 0, 1, \dots, k-1,$$

$$P_m^{(k)}(z) = k! \sum_{\mu=1}^n (1 - n \lambda_{\mu}^k) P_m(z + \lambda_{\mu}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$Q_k(z) P^{(k)}(z) + Q_{k-1}(z) P^{(k-1)}(z) + \dots + Q_1(z) P'(z) + Q_0(z) P(z) = 0, \quad (2)$$

где $Q_s(z)$ – определенные в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$ комплекснозначные функции.

Из теоремы 1 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Многочлен $P_m(z)$ ($m = 1, 2, \dots$) является решением уравнения (2) в области G тогда и только тогда, когда он является решением следующего функционального уравнения при любом $n \geq m + k$:

$$\sum_{\mu=1}^n ((1 - n\lambda_\mu^k)k! Q_k(z) + (k-1)! \lambda_\mu Q_{k-1}(z) + \dots + \lambda_\mu^k Q_0(z)) P_m(z + \lambda_\mu) = 0, \quad z \in G,$$

где числа $\lambda_\mu = \lambda_\mu(n, k)$ являются корнями уравнения (1).

Пусть $k = 2$ и Q_s , $s = 0, 1, 2$, суть многочлены степени не выше s . Тогда из теоремы 2 получим следующий критерий для полиномиальных решений уравнения (2).

ТЕОРЕМА 3. Многочлен $P_m(z)$ является решением уравнения (2) при $k = 2$ тогда и только тогда, когда при всех $z \in \mathbb{C}$ и $n \geq m + 2$ для него справедлива следующая формула среднего значения:

$$P_m(z) = \frac{2}{4nQ_2(z) + m(m-1)Q_2'' + 2mQ_1'} \sum_{\mu=1}^n (Q_1(z)\lambda_\mu + 2Q_2(z)) P_m(z + \lambda_\mu),$$

$$\lambda_\mu = \lambda_\mu(n, 2).$$

Из теоремы 3 получается, в частности, критерий для классических ортогональных многочленов (см. [7]).

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 3. Многочлен $P_m(z)$ является многочленом Эрмита, Лагерра, Чебышёва (первого рода), Лежандра тогда и только тогда, когда для него справедлива следующая формула среднего значения:

$$P_m(z) = \sum_{\mu=1}^n A(z, \lambda_\mu, m, n) P_m(z + \lambda_\mu), \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \geq m + 2,$$

где множители $A(z, \lambda_\mu, m, n)$ равны соответственно

$$\frac{\lambda_\mu z - 1}{m - n}, \quad \frac{2z + \lambda_\mu(\alpha - z + 1)}{2nz - m} \quad (\alpha > -1),$$

$$\frac{\lambda_\mu z + 2z^2 - 2}{2n(z^2 - 1) + m^2}, \quad \frac{2(\lambda_\mu z + z^2 - 1)}{m(m+1) + 2n(z^2 - 1)}.$$

Список литературы

- [1] В. И. Данченко, “Об аппроксимации суммами вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ ”, Третья Петрозаводская Международная конференция по теории функций комплексного переменного, посвященная 100-летию Г. М. Голузина (Санкт-Петербург, 2006), 18–20. [2] В. И. Данченко, “Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ ”, Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2006), 2006, 86–88. [3] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 553–559; англ. пер.: V. I. Danchenko, D. Ya. Danchenko, *Math. Notes*, **70**:3–4 (2001), 502–507. [4] П. А. Бородин, О. Н. Косухин, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **60**:1 (2005), 3–8; англ. пер.: P. A. Borodin, O. N. Kosukhin, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **60**:1 (2005), 1–6. [5] О. Н. Косухин, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **56**:4 (2001), 54–59; англ. пер.: O. N. Kosukhin, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **56**:4 (2001), 36–40. [6] А. В. Фрянцев, *Изв. Саратовского ун-та. Сер. Матем., мех., информ.*, **7**:2 (2007), 39–43. [7] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, 2-е изд., Физматлит, М., 1979.

А. В. Фрянцев (A. V. Fryantsev)
Владимирский государственный университет
E-mail: versionfalex@vpti.vladimir.ru

Представлено А. А. Давыдовым
Принято редколлегией
03.04.2008