Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лётчиков, Произведения унимодулярных независимых случайных матриц,
УМН, 1996, том 51, выпуск 1, 51–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm920>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:25:08

Посвящается Я. Г. Синаю
в связи с его 60-летием

УДК 519

ПРОИЗВЕДЕНИЯ УНИМОДУЛЯРНЫХ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

А. В. Лётчиков

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	52
1. Постановка задачи	52
2. Обзор результатов	54
3. Основные результаты	56
4. Схема построения статьи	57
§ 1 . Фазовое пространство марковской цепи	58
1. Пространство Y	58
2. Метрика на пространстве Y	59
3. Действие группы G на пространстве Y	60
4. Собственные меры на пространстве Y	61
§ 2 . Усиленный закон больших чисел	64
1. μ -блуждание на Y	64
2. Эргодичность μ -блуждания	66
3. Различие показателей Ляпунова	68
4. Оценки на $z(yg(n))$	71
5. Доказательство теоремы 0.1	74
6. Скорость стягиваемости в точку	74
§ 3 . Предельные теоремы для марковских цепей	75
1. Теорема Ионеску–Тулчи и Маринеску	75
2. Возмущенные марковские операторы	76
3. Разложение $P_\eta(\tau)$ при малых τ	78
4. Центральная предельная теорема	80
5. Локальная предельная теорема	81
§ 4 . Доказательство центральной и локальной предельных теорем	85
§ 5 . Доказательство условной предельной теоремы	90
1. Свойства оператора K_β	90
2. Свойства операторов $P_\beta(\tau)$	92
3. Критический случай	96
4. Доказательство условной предельной теоремы	97
Список литературы	99

Введение

1. Постановка задачи. Теория предельных теорем для произведения случайных матриц в настоящее время по праву стала частью современной теории вероятностей. Имеющая широкие приложения в различных областях физики и математики, она привлекает внимание все большего числа исследователей. Как показывает практика, наибольший интерес здесь представляет некомпактный случай, который существенно отличается от того, когда произведения случайных матриц лежат в некоторой компактной группе матриц. Хотя вопросы, возникающие при решении задач в этом направлении, являются традиционными для теории вероятностей – это усиленный закон больших чисел, центральная предельная теорема, локальная предельная теорема, теорема о больших отклонениях, главным отличием от классической теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин является некоммутированность произведения случайных матриц. Поэтому методы, применяемые в этой теории, во многом отличаются от традиционных.

В настоящей статье мы рассматриваем группу $G = SL(m, \mathbb{R})$ вещественных унимодулярных матриц размера $m \times m$ ($m \geq 2$) и последовательность $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ независимых случайных элементов G , определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и имеющих одинаковое распределение μ на G . Объектом нашего исследования будет произведение $g(n) = g_1 g_2 \cdots g_n$.

Сформулируем вкратце идеи Г. Фюрстенберга [18], [19], являющиеся основным инструментом в исследованиях произведений случайных матриц. Пусть нам задано однородное пространство X , на котором определено действие группы $G: x \rightarrow x\bar{g}$ для каждого $g \in G$. Тогда случайная последовательность $\{g_n\}$ определяет однородную цепь Маркова $\{x_n, n = 0, 1, \dots\}$ на X по правилу: $x_n = x_{n-1}\bar{g}_n$, где x_0 – произвольная случайная величина, не зависящая от последовательности $\{g_n\}$. Следуя Г. Фюрстенбергу [18], назовем такую марковскую цепь μ -блужданием на X . Заметим, что в силу группового действия $x_n = x_0\bar{g}_1 \cdots \bar{g}_n = x_0\bar{g}(n)$. Последняя величина зависит только от $x_0, g_1, \dots, g_n$ и не зависит от g_{n+1} . Поэтому последовательность $\{(x_{n-1}, g_n), n = 1, 2, \dots\}$ также образует однородную цепь Маркова на $X \times G$. Рассмотрим теперь функцию $\alpha: X \times G \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющую следующему функциональному уравнению: для всех $x \in X, g_1, g_2 \in G$

$$\alpha(x, g_1 g_2) = \alpha(x, g_1) + \alpha(x\bar{g}_1, g_2).$$

Такие функции Г. Фюрстенберг [18] называл A -коциклами. Тогда индукцией по n легко получить, что $\alpha(x_0, g(n)) = \sum_{k=1}^n \alpha(x_{k-1}, g_k)$. Таким образом, получение предельных теорем для $\alpha(x_0, g(n))$ сводится к исследованию свойств цепи Маркова $\{(x_{k-1}, g_k)\}$ и применению теории марковских цепей. К примеру, при условии эргодичности цепи Маркова $\{(x_{k-1}, g_k)\}$ (оно выполнено, если μ -блуждание на X имеет единственное стационарное распределение ν) и при соответствующем условии интегрируемости $\alpha(x, g)$ имеет место усиленный закон больших чисел: для ν -почти всех x с P -вероятностью 1 при $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{n} \alpha(x, g(n)) \rightarrow \int_X \nu(dx) \int_G \alpha(x, g) \mu(dg).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-01258-а).

Все такие пространства X и само пространство A -коциклов для полупростых групп Ли (в частности, и для $SL(m, \mathbb{R})$) были описаны Г. Фюрстенбергом в работах [18], [19] (обзор этих работ см. в [14]).

Как показал В. Н. Тутубалин [10] на примере произведения независимых комплекснозначных случайных величин, непосредственное исследование асимптотики элементов матрицы $g(n)$ составляет определенные трудности (см. также [17]). Более естественным и в данном случае удобным является представление матрицы $g(n)$ в обычных для полупростых групп Ли координатах.

Выделим следующие подмножества группы G :

$Z = \{z\}$ – подгруппу верхних треугольных матриц с единицами на диагонали,

$D = \{d\}$ – подгруппу диагональных матриц с положительными элементами на диагонали (каждый элемент d этой группы задается диагональными координатами $(d_1, \dots, d_m)$),

$D_0 = \{\delta\}$ – подполугруппу группы D с условием на δ : $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_m$,

$U = \{u\}$ – подгруппу ортогональных матриц,

$V = \{v\}$ – конечную подгруппу диагональных ортогональных матриц.

Любой элемент из G разлагается в два следующих произведения:

$$(0.1) \quad g = z(g)d(g)u(g) \quad (\text{разложение Ивасава}),$$

$$(0.2) \quad g = u_1(g)\delta(g)u_2(g) \quad (\text{полярное разложение}),$$

где $z(g) \in Z$, $d(g) \in D$, $\delta(g) \in D_0$, $u(g)$, $u_1(g)$, $u_2(g)$ – ортогональные унимодулярные матрицы. Заметим, что, в силу единственности разложения Ивасава (0.1), существуют функции $z: G \rightarrow Z$, $d: G \rightarrow D$, $u: G \rightarrow U$. В полярном разложении (0.2) функция $\delta: G \rightarrow D_0$ определяется однозначно, а $u_1(g)$ и $u_2(g)$ – с точностью до умножения на элемент $v \in V$ справа и слева, соответственно.

Пусть $Y = V \setminus U$ – однородное пространство левых смежных классов группы U по подгруппе V . Нетрудно убедиться, что для всех $v \in V$ и $g \in G$ в разложении Ивасава (0.1) $d(vg) = d(g)$ и $u(vg) = vu(g)$. Поэтому для каждого $g \in G$ можно определить действие группы G на $Y: y \rightarrow y\bar{g}$ по правилу: $ug = z(ug)d(ug)u(ug)$, $u \in y$, $y\bar{g}$ – проекция $u(ug)$ из U в Y . Аналогично сказанному выше зададим μ -блуждание $\{y_n = y_0\bar{g}(n)\}$ на Y . Пусть $f(g)$ – вектор, составленный из логарифмов диагональных элементов матрицы $d(g)$:

$$(0.3) \quad f_k(g) = \ln d_k(g).$$

В силу унимодулярности g $f(g)$ принадлежит гиперплоскости $\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{R}^m: \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m = 0\}$. Обозначим $S(n) = f(g(n))$. Как уже было замечено, $f(ug) = f(vug)$ зависит только от класса y , которому принадлежит u . В силу этого нетрудно убедиться, что $\alpha_k(y, g) = f_k(ug)$ ($u \in y$) является A -коциклом на $Y \times G$. Это означает, что

$$(0.4) \quad S_k(n) = f_k(g(n)) = \sum_{j=1}^n \alpha_k(y_{j-1}, g_j)$$

при условии $E \in y_0$, где E – единичная матрица.

Главной целью настоящей статьи является исследование асимптотических свойств вектора $S(n)$ при $n \rightarrow +\infty$.

2. Обзор результатов. Наиболее полная картина предельного поведения $g(n)$ при $n \rightarrow +\infty$ была получена, когда выполнено условие абсолютной непрерывности распределения μ относительно меры Хаара. При этом условии построенная марковская цепь $\{(y_{n-1}, g_n)\}$ удовлетворяет условиям Деблина и к ней применимы соответствующие предельные теоремы (см. [37]). Выпишем основные результаты, полученные Г. Фюрстенбергом и В. Н. Тутубалиным для разложения Ивасава матрицы $g(n)$ при этом условии и соответствующих условиях интегрируемости:

1) [18] μ -блуждание $\{y_n\}$ эргодично и имеет предельное распределение ν на Y при $n \rightarrow +\infty$, совпадающее с единственным стационарным распределением μ -блуждания на Y ;

2) усиленный закон больших чисел [18]: с P -вероятностью 1 существует предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n)/n = a$, причем неслучайный вектор $a \in \Gamma$ удовлетворяет условию: $a_1 < a_2 < \dots < a_m$;

3) центральная предельная теорема [9]: распределение $\frac{1}{\sqrt{n}}(S(n) - an)$ слабо сходится при $n \rightarrow +\infty$ к гауссовскому распределению на Γ с параметрами $(0, \sigma^2)$, где σ^2 – матрица ковариаций некоторого невырожденного распределения на Γ ;

4) [11] с P -вероятностью 1 $z(g(n))$ имеет предел $z(\infty)$ при $n \rightarrow +\infty$;

5) локальная предельная теорема [13]: плотность распределения $\frac{1}{\sqrt{n}}(S(n) - an)$ на Γ асимптотически близка при $n \rightarrow +\infty$ к плотности гауссовского распределения с параметрами $(0, \sigma^2)$.

Более того, в работе [10] показано, что $z(g(n))$, $\frac{1}{\sqrt{n}}(S(n) - an)$, y_n при $n \rightarrow +\infty$ асимптотически независимы и их совместное распределение сходится по вариации к соответствующему произведению предельных распределений. В полярных и других координатах подробное исследование асимптотики $g(n)$ в этом случае было сделано В. Н. Тутубалиным в работах [10]–[13]. В случае, когда $m = 2$, предельное поведение $g(n)$ в полярных координатах при больших отклонениях было исследовано С. К. Нечаевым и Я. Г. Синаем [36]. Они показали, что условные распределения случайных величин $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \sigma_m(g([nt]))$ при $t \in (0, 1)$ при условии, что произведение $g(n)$ ограничено, слабо сходятся к распределению некоторого броуновского моста.

Новый подход, основанный на идеях Г. Фюрстенберга, был дан В. И. Оселедцем в работе [8]. Применяя метод коциклов для однородного пространства флагов, им была доказана мультипликативная эргодическая теорема (изящное доказательство этой теоремы приводится в [2]). В частности, при условии существования плотности распределения μ относительно меры Хаара из нее вытекает, что существует набор неслучайных чисел, именуемых показателями Ляпунова: $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$, и случайный флаг $W_0 = \{0\} \subset W_1 \subset \dots \subset W_m = \mathbb{R}^m$ такой, что для всех $k = 1, 2, \dots, m$ $\dim W_k - \dim W_{k-1} = 1$ и для любой вектор-строки $e_k \in W_k \setminus W_{k-1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \|e_k g(n)\| = \lambda_k \quad P\text{-п.н.}$$

С. А. Молчанов и В. Н. Тутубалин [6] показали, что в этом случае $\lambda_k = a_k$ для всех $k = 1, \dots, m$ (где a_k определены в пункте 2) выше). Более тонкое асимптотическое исследование для $\ln \|e_k g(n)\|$ проведено в работах [4], [5] и [33], одним из результатов которого является то, что распределение вектора $\{\ln \|e_k g(n)\|\}_{k=1}^m$ асимптотически гауссовское при $n \rightarrow +\infty$ с параметрами $(na, n\sigma^2)$ (см. пункт 3) выше).

Другим направлением развития исследований произведений случайных матриц было получение менее тонких результатов, но при более широких условиях, чем абсолютная непрерывность распределения μ относительно меры Хаара. И здесь первый шаг был сделан Г. Фюрстенбергом [18]. Сформулируем его. Пусть S^{m-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^m$. Группа G действует на S^{m-1} по правилу: $s\bar{g} = \frac{sg}{\|sg\|}$, где s – вектор-строка из S^{m-1} . Тогда $\alpha(s, g) = \ln \|sg\|$ является A -коциклом на $S^{m-1} \times G$. Пусть H_μ – полугруппа, а G_μ – группа, порожденные носителем меры μ . По Г. Фюрстенбергу [18] G_μ сильно неприводима, если не существует конечного объединения подпространств в $\mathbb{R}^m$, инвариантного относительно G_μ . Г. Фюрстенберг [18] показал, что если G_μ сильно неприводима и некомпактна, то при соответствующих условиях интегрируемости для всех $s \in S^{m-1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \|sg(n)\| = a_m \quad \text{Р-п.н.,}$$

причем $a_m > 0$.

Следующий глубокий вклад в этом направлении был сделан в работах И. Гиварча [24], [25] и Е. Ле Паже [34], [35], а также в книге П. Бужероля и Дж. Лакруа [15] и работах И. Гиварча, А. Рожи [27], [28]. Все они рассматривали действие общей группы $GL(m, \mathbb{R})$ на проективном пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ с A -коциклом $\alpha(\bar{r}, g) = \ln \|rg\|$, где r – единичный элемент прямой $\bar{r} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$. При разных условиях (но эквивалентных) ими доказана серия классических предельных теорем для $\ln \|rg(n)\|$ при $n \rightarrow +\infty$ таких, как усиленный закон больших чисел, функциональная центральная предельная теорема, закон повторного логарифма, варианты локальной предельной теоремы и теорем о больших отклонениях. Остановимся на общих условиях на распределение μ , предложенных И. Гиварчем, А. Рожи [28] в этом случае. Пусть ν – мера на $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$, обладающая тем свойством, что для любого проективного подпространства $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ $\nu(\mathcal{P}') = 0$. Будем говорить, что полугруппа H_μ обладает свойством сильного стягивания, если найдется последовательность матриц $\{h_n\} \subset H_\mu$ такая, что последовательность мер $\nu * h_n$ слабо сходится к мере Дирака $\delta_{\bar{r}}$, сосредоточенной в некоторой точке $\bar{r} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$, где $(\nu * h)(B) = \nu\{\bar{r} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) : \bar{r}h \in B\}$. В работе [28] доказано, что если H_μ обладает свойствами сильной неприводимости (как и группа G_μ) и сильного стягивания, то при условиях интегрируемости последовательность $\{\ln \|rg(n)\|\}$ удовлетворяет перечисленным выше классическим предельным теоремам.

Следующий шаг в исследованиях был сделан И. Я. Гольдштейдом и Г. А. Маргулиссом [1], [2], рассматривавшими группу $GL(m, \mathbb{R})$ как алгебраическую группу с заданной на ней топологией Зарисского. Основной результат, который они доказали, состоит в том, что если алгебраическое замыкание H_μ (в топологии Зарисского) совпадает со всей группой $GL(m, \mathbb{R})$, то все показатели Ляпунова $\{\lambda_k\}$ последовательности независимых случайных матриц $\{g_n\}$ различны. Эта идея была развита в работе И. Я. Гольдштейда и И. Гиварча [22], доказавших центральную предельную теорему для $g(n)$ в полярных координатах. Связи различия показателей Ляпунова и асимптотических свойств произведений случайных матриц посвящена работа И. Я. Гольдштейда [23].

К сожалению, некоторые вопросы, связанные с асимптотикой $g(n)$, остались за рамками этой статьи. В частности, мы не остановимся на полном исследовании

свойств инвариантной меры μ -блуждания (об этом см. [28], [30]) и на условиях непрерывной зависимости показателей Ляпунова от начального распределения μ (см., например, [21]). Также мы не будем обсуждать вопрос многочисленных приложений данной теории. Читатель может это сделать с помощью работ [2], [4]–[6], [12], [15], [24], [29], [30], [32], [33], [36], [37].

3. Основные результаты. В этом пункте мы сформулируем основные результаты, доказанные в настоящей статье и обобщающие результаты Г. Фюрстенберга и В. Н. Тутубалина 1)–5). В дальнейшем мы будем предполагать, что выполнено следующее условие:

(Г–М) алгебраическое замыкание полугруппы H_μ , порожденной носителем меры μ , совпадает со всей группой $G = SL(m, \mathbb{R})$.

Пусть $\|g\| = \max\{|g_{ij}|, i, j = 1, \dots, m\}$. Для формулировки теорем нам понадобятся следующие условия интегрируемости, которые мы выпишем в порядке усиления:

(И1) для любого $k = 1, \dots, m$

$$\sup_{u \in U} \int_G |f_k(ug)| \mu(dg) < +\infty;$$

(И2) существует константа $\varepsilon > 0$ такая, что

$$\int_G \max\{\|g\|^\varepsilon, \|g^{-1}\|^\varepsilon\} \mu(dg) < +\infty;$$

(Ог) существует константа $C > 0$ такая, что

$$\mu\{\|g\| < C, \|g^{-1}\| < C\} = 1.$$

ТЕОРЕМА 0.1 (усиленный закон больших чисел). Пусть выполнены условия (Г–М) и (И1). Тогда

- 1) μ -блуждание $\{y_n\}$ эргодично и имеет предельное распределение ν на Y при $n \rightarrow +\infty$, совпадающее с единственным стационарным распределением μ -блуждания на Y ;
- 2) существует неслучайный вектор $a \in \Gamma$ с условием $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ такой, что с P -вероятностью 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n)/n = a$, где $a_k = \int_Y \nu(dy) \int_G \alpha_k(y, g) \mu(dg)$, $\alpha_k(y, g) = f_k(ug)$ при $u \in y$;
- 3) с P -вероятностью 1 $z(g(n))$ имеет предел $z(\infty)$ при $n \rightarrow +\infty$.

ТЕОРЕМА 0.2 (центральная предельная теорема). Пусть выполнены условия (Г–М) и (И2). Тогда распределение случайного вектора $\frac{1}{\sqrt{n}}(S(n) - an)$ слабо сходится при $n \rightarrow +\infty$ к гауссовскому распределению на Γ с параметрами $(0, \sigma^2)$, где σ^2 – матрица ковариаций некоторого невырожденного распределения на Γ .

ТЕОРЕМА 0.3 (локальная предельная теорема). Пусть выполнены условия (Г–М) и (И2). Тогда для любого борелевского $B \subset \Gamma$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2\pi n})^{m-1} \mathbf{P}\{(S(n) - an) \in B\} = \frac{m_\Gamma(B)}{|\sigma|},$$

где m_Γ – мера Лебега на Γ , $|\sigma|^2$ – определитель линейного отображения из Γ в Γ , соответствующего матрице σ^2 .

Выберем произвольное ограниченное $M \subset \Gamma$ такое, что $m_\Gamma(M) > 0$. Обозначим через $\mathbf{Q}_M$ условную вероятность: $\mathbf{Q}_M(*) = \mathbf{P}\{* \mid S(n) \in M\}$. В силу сформулированных теорем распределения $\mathbf{Q}_M$ определяют поведение $S([nt])$ при больших отклонениях от типичного. Поэтому следующая теорема показывает, что при таких отклонениях условные распределения $S([nt])$ с обычной нормировкой слабо сходятся к распределению броуновского моста. Аналогичный результат был получен С. К. Нечаевым и Я. Г. Синаем [36] для группы $SL(2, \mathbb{R})$ в полярных координатах.

ТЕОРЕМА 0.4 (условная предельная теорема). Пусть выполнены условия (Г–М) и (Ог). Тогда существует матрица ковариации D невырожденного распределения на Γ такая, что для любого $t \in (0, 1)$ и любого ограниченного $M \subset \Gamma$ ($m_\Gamma(M) > 0$) $\mathbf{Q}_M$ -распределение случайного вектора $\frac{1}{\sqrt{n}}S([nt])$ слабо сходится при $n \rightarrow +\infty$ к гауссовскому распределению на Γ с параметрами $(0, Dt(1-t))$.

Выпишем очевидное следствие сформулированных теорем, полезное для различных приложений.

СЛЕДСТВИЕ 0.1. Пусть распределение μ сосредоточено на образующих элементах группы $SL(m, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц. Тогда утверждения теорем 0.1–0.4 выполнены.

4. Схема построения статьи. В первом параграфе мы рассматриваем пространство Y , вводим на нем метрику, удобную для дальнейших рассуждений. Кроме того, выписываем достаточно простые, но необходимые свойства действия группы G на пространстве Y . Второй параграф посвящен доказательству усиленного закона больших чисел и различия координат вектора a . При этом использованы идеи работ И. Я. Гольдштейда, Г. А. Маргулиса [2] и И. Гиварча, А. Рожи [28]. В частности, в этом параграфе введены новые условия на распределение μ , более удобные в приложениях и при которых имеет место утверждение теоремы 0.1 (см. замечание 2.1). В третьем параграфе мы вводим возмущенные марковские операторы, выписываем условия на них и доказываем при этих условиях центральную и локальную предельные теоремы для функционалов от вспомогательной марковской цепи. Рассуждения этого параграфа основаны на эргодической теореме Ионеску-Тульчи и Маринеску [31] и методах С. В. Нагаева [7] и В. Н. Тутубалина [9]. Формулировка локальной предельной теоремы исходит из работ [26] и [34]. Также в этом параграфе доказана вспомогательная центрально-локальная предельная теорема. Четвертый параграф сводится к проверке условий § 3 и применению полученных результатов для доказательства теорем 0.2, 0.3. Пятый параграф посвящен доказательству условной предельной теоремы. При этом мы следуем идеям С. К. Нечаева и Я. Г. Синая [36] и применяем к вспомогательной марковской цепи метод, аналогичный методу Крамера для теорем о

больших уклонениях. Здесь также применяются некоторые рассуждения работы [27] и теория положительных операторов [3].

Выражаю искреннюю благодарность Я. Г. Синаю за постановку задачи и внимание к моей работе, а также В. Н. Тутубалину за полезные обсуждения вопросов, связанных с произведениями случайных матриц.

§ 1. Фазовое пространство марковской цепи

1. Пространство Y . Обозначим для $g \in G$

$$(1.1) \quad \Delta_k(g) = \det \begin{pmatrix} g_{k+1,k+1} & \cdots & g_{k+1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,k+1} & \cdots & g_{m,m} \end{pmatrix}$$

минор, стоящий в последних $(m-k)$ строках и столбцах матрицы g , $k = 1, 2, \dots, m-1$. Соответственно, пусть

$$(1.2) \quad \tilde{\Delta}_k(g) = \det \begin{pmatrix} g_{k+1,k} & g_{k+1,k+2} & \cdots & g_{k+1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m,k} & g_{m,k+2} & \cdots & g_{m,m} \end{pmatrix}$$

– минор, полученный из предыдущего заменой первого столбца на соответствующие элементы из k -го столбца матрицы g .

Пусть, как и во введении, $Y = V \setminus U$ – однородное пространство левых смежных классов группы U по подгруппе V . Заметим, что если для некоторого $u_0 \in y = \{vu_0, v \in V\}$ $\Delta_k(u_0) \neq 0$ для всех $k = 1, \dots, m-1$, то и для всех $u \in y$ $\Delta_k(u) \neq 0$. Поэтому существует единственная матрица $u \in y$, для которой $\Delta_k(u) > 0$ для всех $k = 1, \dots, m-1$. Для удобства мы будем обозначать эту матрицу также через y . Для остальных классов, мера Хаара которых равна нулю, выберем соответствующую каждому классу ортогональную матрицу y произвольно. Таким образом, пространство Y взаимно однозначно некоторому подмножеству группы U .

С другой стороны, пространство Y взаимно однозначно с пространством простейших флагов в $\mathbb{R}^m$ (определение см., например, в [2]). Пусть g_i – i -я строка матрицы g . Обозначим $L_k(g) = \langle g_{k+1}, \dots, g_m \rangle$ линейное подпространство $\mathbb{R}^m$, порожденное векторами $g_{k+1}, \dots, g_m$. Тогда любая ортогональная матрица вида vu однозначно определяет флаг

$$L_m(u) = \{0\} \subset L_{m-1}(u) \subset \cdots \subset L_1(u) \subset L_0(u) = \mathbb{R}^m.$$

Обратно, любой простейший флаг

$$W_m = \{0\} \subset W_{m-1} \subset \cdots \subset W_1 \subset W_0 = \mathbb{R}^m$$

путем ортогонализации по правилу: $u_k \in W_{k-1} \setminus W_k$, $u_k \perp W_k$, определяет однозначно ортогональную матрицу u с точностью до левого умножения на матрицу $v \in V$.

2. Метрика на пространстве Y . Определим метрику ρ на пространстве Y , аналогичную введенной в [2] для пространства флагов и зависящую от параметров $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m$ таких, что если $i \neq j$, то $|\alpha_i - \alpha_j| \geq m - 1$. Пусть для y и $\bar{y}$ из Y

$$(1.3) \quad \rho(y, \bar{y}) = \max_{i \neq j} |(y \bar{y}^T)_{ij}|^{\frac{1}{|\alpha_i - \alpha_j|}},$$

где $\bar{y}^T$ – транспонированная матрица $\bar{y}$. Точное задание параметров $\{\alpha_i\}$ будет сделано в пункте 2.6.

Проверим, что это действительно метрика. Заметим, что $\rho(y, \bar{y}) = 0$ тогда и только тогда, когда $y \bar{y}^T = vE$ для некоторого $v \in V$ (здесь и в дальнейшем E – единичная матрица). Последнее эквивалентно равенству классов y и $\bar{y}$. Вторая аксиома метрики, очевидно, выполнена: $\rho(y, \bar{y}) = \rho(\bar{y}, y)$. Осталось доказать неравенство треугольника: для произвольных $y^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$,

$$(1.4) \quad \rho_{12} = \rho(y^{(1)}, y^{(2)}) \leq \rho(y^{(1)}, y^{(3)}) + \rho(y^{(2)}, y^{(3)}) = \rho_{13} + \rho_{23}.$$

Пусть для некоторых $i \neq j$

$$\rho_{12} = |(y^{(1)} y^{(2)T})_{ij}|^{\frac{1}{|\alpha_i - \alpha_j|}}.$$

Заметим, что в силу ортогональности $y^{(3)}$

$$(y^{(1)} y^{(2)T})_{ij} = \sum_{k=1}^m (y^{(1)} y^{(3)T})_{ik} (y^{(3)} y^{(2)T})_{kj}.$$

Отсюда в силу очевидных неравенств: для всех $k, l = 1, \dots, m$

$$(1.5) \quad |(y \bar{y}^T)_{kl}| \leq (\rho(y, \bar{y}))^{|\alpha_k - \alpha_l|},$$

вытекает, что

$$\rho_{12} \leq \left(\sum_{k=1}^m \rho_{13}^{|\alpha_i - \alpha_k|} \rho_{23}^{|\alpha_k - \alpha_j|} \right)^{\frac{1}{|\alpha_i - \alpha_j|}}.$$

Для того чтобы доказать неравенство треугольника (1.4), достаточно показать, что

$$(1.6) \quad \sum_{k=1}^m \rho_{13}^{|\alpha_i - \alpha_k|} \rho_{23}^{|\alpha_k - \alpha_j|} \leq (\rho_{13} + \rho_{23})^{|\alpha_i - \alpha_j|}.$$

Пусть $\rho_{23} = t \rho_{13} \leq \rho_{13}$. Тогда для $0 \leq t \leq 1$ и в силу $|\alpha_k - \alpha_j| \geq m - 1$ имеем

$$\sum_{k=1}^m t^{|\alpha_k - \alpha_j|} \leq 1 + (m - 1)t^{m-1} \leq (1 + t)^{m-1} \leq (1 + t)^{|\alpha_i - \alpha_j|}.$$

Воспользовавшись неравенством $\rho_{13}^{|\alpha_i - \alpha_k|} \rho_{23}^{|\alpha_k - \alpha_j|} \leq \rho_{13}^{|\alpha_i - \alpha_j|} t^{|\alpha_k - \alpha_j|}$, отсюда получаем неравенство (1.6).

Следует заметить, что построенное пространство (Y, ρ) является компактным метрическим пространством, причем сходимость в этом пространстве эквивалентна поэлементной сходимости в Y , т.е. сходимости в смысле $y_{ij}^{(n)} \rightarrow y_{ij}$ для всех $i, j = 1, \dots, m$ при $n \rightarrow +\infty$.

3. Действие группы G на пространстве Y . Как уже было замечено во введении, в силу разложения Ивасава (0.1) каждый элемент $g \in G$ задает действие $y \rightarrow y(yg)$ на пространстве Y :

$$(1.7) \quad yg = z(yg)d(yg)u(yg),$$

где $u(yg)$ — проекция $u(yg)$ из U в Y . Для удобства в дальнейшем такое групповое действие мы будем обозначать $y \rightarrow y(yg)$ (в отличие от принятого во введении $y \rightarrow y\bar{g}$). Пусть функция $f: G \rightarrow \Gamma$ определена по формуле (0.3). Выпишем теперь свойства действия группы G на метрическом пространстве (Y, ρ) , связанные с функцией f .

Обозначим $Z(g) = \max\{\|z(g)\|, \|z^{-1}(g)\|\}$,

$$F_1(y, \bar{y}, g) = \max_{i>j} \exp \left\{ \frac{f_j(\bar{y}g) - f_i(yg)}{\alpha_i - \alpha_j} \right\},$$

$$F(y, \bar{y}, g) = \max\{F_1(y, \bar{y}, g), F_1(\bar{y}, y, g)\}, \quad \alpha = \max \left\{ \frac{1}{|\alpha_i - \alpha_j|} \right\}.$$

ЛЕММА 1.1. Для всех $y, \bar{y} \in Y$, $y \neq \bar{y}$ для любого $g \in G$

$$(1.8) \quad \frac{\rho(y(yg), y(\bar{y}g))}{\rho(y, \bar{y})} \leq m^2 Z^\alpha(yg) Z^\alpha(\bar{y}g) F(y, \bar{y}, g).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.7) имеем:

$$u(yg) = d^{-1}(yg)z^{-1}(yg)yg, \quad u^T(\bar{y}g) = g^{-1}\bar{y}^T z(\bar{y}g)d(\bar{y}g).$$

Отсюда получаем, что $u(yg)u^T(\bar{y}g) = d^{-1}(yg)z^{-1}(yg)y\bar{y}^T z(\bar{y}g)d(\bar{y}g)$. Следовательно, для $i > j$

$$(u(yg)u^T(\bar{y}g))_{ij} = \sum_{k \geq i > j \geq l} (z^{-1}(yg))_{ik} (y\bar{y}^T)_{kl} (z(\bar{y}g))_{lj} \exp\{f_j(\bar{y}g) - f_i(yg)\}.$$

Для чисел α_i , определяющих метрику ρ , в силу $Z(g) \geq 1$ отсюда и из формулы (1.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} & |(u(yg)u^T(\bar{y}g))_{ij}|^{\frac{1}{|\alpha_i - \alpha_j|}} \\ & \leq Z^\alpha(yg) Z^\alpha(\bar{y}g) \exp \left\{ \frac{f_j(\bar{y}g) - f_i(yg)}{\alpha_i - \alpha_j} \right\} \sum_{k \geq i > j \geq l} (\rho(y, \bar{y}))^{\frac{\alpha_k - \alpha_l}{\alpha_i - \alpha_j}}. \end{aligned}$$

Так как $\alpha_k - \alpha_l \geq \alpha_i - \alpha_j$ и $\rho(y, \bar{y}) \leq 1$, имеем для $i > j$

$$|(u(yg)u^T(\bar{y}g))_{ij}|^{\frac{1}{|\alpha_i - \alpha_j|}} \leq \rho(y, \bar{y}) m^2 Z^\alpha(yg) Z^\alpha(\bar{y}g) F_1(y, \bar{y}, g).$$

Поменяв местами y и $\bar{y}$ и воспользовавшись определением $F(y, \bar{y}, g)$, нетрудно получить утверждение леммы.

ЛЕММА 1.2. Для всех $g \in G$ и $y, \bar{y} \in Y$, для которых $\rho(y(yg), y(\bar{y}g)) \leq \frac{1}{2(\sqrt{m})^\alpha}$, выполнено следующее неравенство: при любом $k = 1, \dots, m$

$$(1.9) \quad |e^{f_k(yg) - f_k(\bar{y}g)} - 1| \leq 2(m^2 Z^\alpha(yg) Z^\alpha(\bar{y}g) + (\sqrt{m})^\alpha) \rho(y, \bar{y}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.7) вытекает, что

$$d(yg)u(yg)g^{-1} = z^{-1}(yg)y, \quad gu^T(\bar{y}g)d^{-1}(\bar{y}g) = \bar{y}^T z(\bar{y}g).$$

Перемножив эти два неравенства и обозначив для простоты $\tilde{u} = u(yg)u^T(\bar{y}g)$, получаем

$$(1.10) \quad \frac{d_k(yg)}{d_k(\bar{y}g)} \tilde{u}_{kk} = \sum_{\substack{j \geq k \geq l \\ j \neq l}} (z^{-1}(yg))_{kj} (y\bar{y}^T)_{jl} z_{lk}(yg) + (y\bar{y}^T)_{kk} = I + (y\bar{y}^T)_{kk}.$$

Как и при доказательстве предыдущей леммы, легко получить, что

$$(1.11) \quad |I|^\alpha \leq m^2 Z^\alpha(yg) Z^\alpha(\bar{y}g) \rho(y, \bar{y}).$$

Рассмотрим $|\tilde{u}_{kk}| = \sqrt{1 - \sum_{j \neq k} \tilde{u}_{kj}^2}$. Пользуясь простым неравенством $1 - |t| \leq \sqrt{1 - t^2}$ при $|t| \leq 1$, нетрудно вывести, что $|\tilde{u}_{kk}|^\alpha \geq 1 - (\sqrt{m})^\alpha \rho(y(yg), y(\bar{y}g))$. Следовательно, если $\rho(y(yg), y(\bar{y}g)) \leq \frac{1}{2}(\sqrt{m})^{-\alpha/2}$, то $|\tilde{u}_{kk}|^\alpha \geq \frac{1}{2}$. Аналогично,

$$(1.12) \quad |(y\bar{y}^T)_{kk}| - |\tilde{u}_{kk}|^\alpha \leq 1 - |(y\bar{y}^T)_{kk}|^\alpha \leq (\sqrt{m})^\alpha \rho(y, \bar{y}).$$

Вычитая из каждой части равенства (1.10) $\tilde{u}_{kk}$ и применяя неравенства (1.11), (1.12), в итоге получаем (1.9), что и требовалось доказать.

4. Собственные меры на пространстве Y . В этом пункте мы рассмотрим некоторые свойства последовательностей матриц $\{g_n\}$, связанных с разложениями Ивасава и полярным (0.1), (0.2). Для определенности функций в разложении (0.2) будем предполагать, что $u_2(g) \in Y$. Тогда $u_1(g)$ и $u_2(g)$ определяют функции $u_1: G \rightarrow U$, $u_2: G \rightarrow Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Последовательность $\{h_n\}$ матриц из группы G называется *правильной*, если существуют следующие пределы в полярном разложении h_n : для всех $k = 1, \dots, m-1$ при $n \rightarrow +\infty$

$$(1.13) \quad u_1(h_n) \rightarrow u_1(\{h_n\}), \quad u_2(h_n) \rightarrow u_2(\{h_n\}), \quad \frac{\delta_k(h_n)}{\delta_{k+1}(h_n)} \rightarrow 0.$$

Пусть ν — некоторая вероятностная мера на Y . Для каждого фиксированного $g \in G$ определим $\nu * g$ как распределение $y(yg)$ при условии, что y имеет распределение ν : для измеримых $B \subset Y$

$$\nu * g(B) = \nu\{y : y(yg) \in B\}.$$

Обозначим $Y_0 = \{y \in Y : \text{найдется } k = 1, \dots, m-1 \mid \Delta_k(y) = 0 \text{ или } \tilde{\Delta}_k(y) = 0\}$, где Δ_k и $\tilde{\Delta}_k$ определяются формулами (1.1), (1.2). Тогда $Y \setminus Y_0$ состоит из тех матриц y , для которых все миноры $\Delta_k(y)$ и $\tilde{\Delta}_k(y)$ не нулевые. Для любой ортогональной матрицы u $Y_0 u = \{y : y(yu) \in Y_0\}$ — сдвиг на u на пространстве Y множества Y_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Будем называть вероятностную меру ν на Y *собственной для правильной последовательности* $\{h_n\}$, если $\nu(Y_0 u_1(\{h_n\})) = 0$, где $u_1(\{h_n\})$ удовлетворяет (1.13).

Следующие две леммы показывают асимптотическое поведение правильных последовательностей в координатах Ивасава относительно их собственных мер.

ЛЕММА 1.3. *Предположим, что вероятностная мера ν на Y является собственной для правильной последовательности $\{h_n\}$. Тогда*

$$y(yh_n) \rightarrow y(u_2(\{h_n\})) \quad \text{и} \quad \frac{d_k(yh_n)}{d_{k+1}(yh_n)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty$$

для ν -почти всех y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу разложений (0.2) и (1.7)

$$yh_n = yu_1(h_n)\delta(h_n)u_2(h_n) = z(yh_n)d(yh_n)u(yh_n).$$

Поэтому

$$(1.14) \quad yu_1(h_n)\delta(h_n) = z(yh_n)d(yh_n)u(yh_n)u_2^T(h_n).$$

Покажем вначале, что если $y \notin Y_0 u_1(\{h_n\})$, то при $n \rightarrow +\infty$ $y(u(yh_n)u_2^T(h_n)) \rightarrow E$. Для этого зафиксируем $y \notin Y_0 u_1(\{h_n\})$ и произвольное $k = 1, \dots, m-1$. Напомним, что для $g \in G$ $L_k(g) = \langle g_{k+1}, \dots, g_m \rangle$. Будем говорить, что последовательность линейных подпространств $L(n) \subset \mathbb{R}^m$ сходится к линейному подпространству L , если для любых $a(n) \in L(n)$ и $b \in L^\perp$ (здесь $L^\perp$ — ортогональное дополнение к L)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a(n), b)}{\|a(n)\|} = 0.$$

Пусть $h(n) = yu_1(h_n)\delta(h_n)$. Покажем, что $L_k(h(n)) \rightarrow L_k(E)$ при $n \rightarrow +\infty$. Для этого достаточно убедиться, что для любого вектора $a(n) \in L_k(h(n))$, для всех $j = 1, \dots, k$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_j(n)|}{\|a(n)\|} = 0$. Выберем вектор $\alpha(n) = (\alpha_{k+1}(n), \dots, \alpha_m(n)) \neq 0$ так, чтобы $a(n) = \sum_{i=k+1}^m \alpha_i(n)h_i(n) \in L_k(h(n))$. Тогда j -я координата вектора $a(n)$ равна

$$a_j(n) = \sum_{i=k+1}^m \alpha_i(n)(yu_1(h_n))_{ij}\delta_j(h_n) = r_j(\alpha, n)\delta_j(h_n).$$

Пусть $r(n) = (r_{k+1}(\alpha, n), \dots, r_m(\alpha, n)) \in \mathbb{R}^{m-k}$. В силу того, что $\Delta_k(yu_1(\{h_n\})) \neq 0$, при достаточно больших n $\|r(n)\| \geq \varepsilon_1 \|\alpha(n)\|$ для достаточно малого $\varepsilon_1 > 0$. Из этого следует, что $\|a(n)\| \geq \|r(n)\|\delta_{k+1}(h_n) \geq \varepsilon_1 \|\alpha(n)\|\delta_{k+1}(h_n)$. С другой стороны, при $j \leq k$ $|a_j(n)| = |r_j(\alpha, n)|\delta_j(h_n) \leq |r_j(\alpha, n)|\delta_k(h_n) \leq \|\alpha(n)\|\delta_k(h_n)$. Из этих двух неравенств следует, что при всех $k = 1, \dots, m-1$ при $n \rightarrow +\infty$ $L_k(h(n)) \rightarrow L_k(E)$. Так как матрица $y(u(yh_n)u_2^T(h_n))$ получается ортогонализацией по строкам матрицы $h(n)$, начиная с нижней, при $n \rightarrow +\infty$ $y(u(yh_n)u_2^T(h_n)) \rightarrow E$ для всех $y \notin Y_0 u_1(\{h_n\})$. Таким образом, первое предельное соотношение доказано.

Для доказательства второго воспользуемся очевидным равенством

$$\begin{aligned}\Delta_k(yu_1(h_n)\delta(h_n)) &= \Delta_k(yu_1(h_n))\delta_{k+1}(h_n) \dots \delta_m(h_n) \\ &= \Delta_k(z(yh_n)d(yh_n)u(yh_n)u_2^T(h_n)) \\ &= \Delta_k(u(yh_n)u_2^T(h_n))d_{k+1}(yh_n) \dots d_m(yh_n).\end{aligned}$$

Из него следует, что

$$d_{k+1}(yh_n) = \delta_{k+1}(h_n) \frac{\Delta_k(yu_1(h_n))}{\Delta_{k+1}(yu_1(h_n))} \cdot \frac{\Delta_{k+1}(u(yh_n)u_2^T(h_n))}{\Delta_k(u(yh_n)u_2^T(h_n))}.$$

Привсех $k = 1, \dots, m-1$ $\Delta_k(yu_1(\{h_n\})) \neq 0$ и при $n \rightarrow +\infty$ $|\Delta_k(u(yh_n)u_2^T(h_n))| \rightarrow 1$, следовательно, найдется константа $C_1 > 1$ такая, что при достаточно больших n для всех $y \notin Y_0 u_1(\{h_n\})$

$$C_1^{-1}\delta_{k+1}(h_n) \leq d_{k+1}(yh_n) \leq C_1\delta_{k+1}(h_n).$$

Следовательно, для ν -почти всех y при $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{d_k(yh_n)}{d_{k+1}(yh_n)} \leq C_1^2 \frac{\delta_k(h_n)}{\delta_{k+1}(h_n)} \rightarrow 0,$$

что и требовалось доказать.

Покажем, что в некотором смысле верно и обратное утверждение.

ЛЕММА 1.4. Пусть нам дана последовательность $\{h_n\}$ матриц из G такая, что существуют пределы $u_1(h_n) \rightarrow u_1(\{h_n\})$, $u_2(h_n) \rightarrow u_2(\{h_n\})$. Предположим, что для некоторого $y \notin Y_0 u_1(\{h_n\})$ $y(yh_n) \rightarrow y(u_2(\{h_n\}))$. Тогда последовательность $\{h_n\}$ – правильная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве предыдущей леммы, воспользуемся формулой (1.14). Из условия леммы вытекает, что $y(u(yh_n)u_2^T(h_n)) \rightarrow E$ при $n \rightarrow +\infty$ и, значит, при всех $k = 1, \dots, m-1$ $L_k(h(n)) = L_k(u(yh_n)u_2^T(h_n)) \rightarrow L_k(E)$. Выберем $\alpha(n) = (\alpha_{k+1}(n), \dots, \alpha_m(n))$ так, чтобы

$$r_j(\alpha, n) = \sum_{i=k+1}^m \alpha_i(n)(yu_1(h_n))_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } j > k+1, \\ 1, & \text{если } j = k+1. \end{cases}$$

В силу того, что $\Delta_k(yu_1(\{h_n\})) \neq 0$, при достаточно больших n $\alpha(n)$ определяется однозначно и всегда можно найти константу $C_2 > 0$ такую, что $|\alpha_i(n)| \leq C_2$. Поэтому вектор $a(n)$, составленный из координат $a_j(n) = r_j(\alpha, n)\delta_j(h_n)$, имеет норму

$$\|a(n)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^k |r_j(\alpha, n)|^2 \delta_j^2(h_n) + \delta_{k+1}^2(h_n)} \leq m^2 C_2 \delta_{k+1}(h_n).$$

С другой стороны, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |r_k(\alpha, n)| \geq \varepsilon_2 > 0$. Иначе бы столбцы с номерами $k, k+2, \dots, m$ с элементами строк с номерами $k+1, \dots, m$ матрицы $yu_1(\{h_n\})$ были линейно зависимы, что противоречит условию $\tilde{\Delta}_k(yu_1(\{h_n\})) \neq 0$. Следовательно,

$$\frac{|a_k(n)|}{\|a(n)\|} \geq \frac{\varepsilon_2}{m^2 C_2} \cdot \frac{\delta_k(h_n)}{\delta_{k+1}(h_n)}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$ в силу того, что $a(n) \in L_k(h(n))$ и $L_k(h(n)) \rightarrow L_k(E)$.

§ 2. Усиленный закон больших чисел

1. μ -блуждание на Y . Во введении была определена марковская цепь $\{y_n\}$ на Y . В этом параграфе мы исследуем свойства этой марковской цепи. Напомним, что $\{g_n\}$ – последовательность независимых случайных элементов из G , имеющих одинаковое распределение μ . Для произвольного фиксированного $y_0 \in Y$ определим индукцией по n : $y_n = y(y_{n-1}g_n)$. Тогда $\{y_n\}$ – однородная марковская цепь, называемая μ -блужданием на Y . Функция вероятностей перехода такой цепи определяется по формуле: $P(y, B) = \int_G \chi_B(y(yg)) \mu(dg)$, где χ_B – индикатор измеримого множества $B \subset Y$. Марковский оператор P , действующий на пространстве непрерывных функций $C(Y)$ и соответствующий μ -блужданию, имеет вид: для $\psi \in C(Y)$

$$(2.1) \quad (P\psi)(y) = \int_G \psi(y(yg)) \mu(dg).$$

Нетрудно проверить, что оператор P^n и функция $P^{(n)}(y, B)$ вероятностей перехода за n шагов удовлетворяют формулам

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (P^n\psi)(y) &= \int_G \psi(y(yg)) \mu^n(dg), \\ P^{(n)}(y, B) &= \int_G \chi_B(y(yg)) \mu^n(dg), \end{aligned}$$

где μ^n есть распределение на G произведения $g(n) = g_1 \cdots g_n$ (другими словами, n -я свертка меры μ на G).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Вероятностная мера ν на Y называется μ -инвариантной, если она сохраняется под действием сопряженного оператора P^* : для любого измеримого $B \subset Y$

$$(P^*\nu)(B) \equiv \int_Y \nu(dy) \int_G \chi_B(y(yg)) \mu(dg) = \nu(B).$$

Заметим, что в силу теоремы Какутани из компактности Y следует, что всегда существует хотя бы одна μ -инвариантная мера. Если y_0 – случайная величина, имеющая μ -инвариантное распределение ν , то μ -блуждание $\{y_n = y(y_0g(n))\}$ – стационарная случайная последовательность. Выделим также очевидное свойство μ -инвариантной меры ν : для любой функции $\psi \in C(Y)$ для всех натуральных n

$$(2.3) \quad \int_Y (P^n\psi)(y) \nu(dy) = \int_Y \psi(y) \nu(dy) \equiv \nu(\psi).$$

Обратимся теперь к условию (Г–М) и докажем несколько свойств μ -инвариантных мер при этом условии. Напомним, что H_μ – полугруппа, порожденная носителем меры μ .

ЛЕММА 2.1. Пусть μ удовлетворяет условию (Г–М), и пусть ν – произвольная μ -инвариантная мера на Y . Тогда

- а) из полугруппы H_μ можно выделить правильную последовательность $\{h_n\}$,
- б) ν является собственной мерой для любой такой правильной последовательности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт а) леммы, очевидно, вытекает из теоремы 3.6 и леммы 3.9 работы [2]. Чтобы убедиться в правильности пункта б), достаточно показать, что для любой ортогональной матрицы u $\nu(Y_0 u) = 0$. Заметим, что для каждого u $Y_0 u$ является алгебраическим подмногообразием пространства Y . Рассмотрим действие группы G на такие алгебраические подмногообразия: $Y_0 u \bar{g} = \{y(yg) : y \in Y_0 u\}$. Покажем, что это снова подмногообразие вида $Y_0 \tilde{u}$, т.е. построим ортогональную матрицу $\tilde{u}$ такую, что $Y_0 u \bar{g} = Y_0 \tilde{u}$. Из разложения (1.7) находим, что

$$(2.4) \quad yu = z(yg)d(yg)u(yg)g^{-1}u.$$

С другой стороны, транспонируя разложение Ивасава матрицы $(g^{-1}u)^T$ получаем, что для $\tilde{u} = u^T((g^{-1}u)^T)$, $\tilde{d} = d((g^{-1}u)^T)$, $\tilde{z} = z((g^{-1}u)^T)$

$$(2.5) \quad g^{-1}u = \tilde{u}\tilde{d}\tilde{z}^T.$$

Теперь обратим внимание на два очевидных тождества: для любого $k = 1, \dots, m$, для всех $z \in Z$, $d \in D$, $g \in G$

$$\Delta_k(zg) = \Delta_k(gz^T) = \Delta_k(g), \quad \Delta_k(dg) = \Delta_k(gd) = d_{k+1} \dots d_m \Delta_k(g).$$

Воспользовавшись этими равенствами, из формул (2.4), (2.5) нетрудно вывести, что $Y_0 u \bar{g} = Y_0 \tilde{u}$.

Таким образом, алгебраическое подмногообразие $Y_0 u$ под действием элемента g снова будет алгебраическим подмногообразием вида $Y_0 \tilde{u}$.

Рассмотрим всевозможные конечные объединения и пересечения таких множеств. Это снова будут алгебраические подмногообразия. Предположим, что среди многообразий такого вида есть хотя бы одно, мера ν которого положительна. Выберем среди таких многообразий с положительной мерой ν те, у которых размерность наименьшая. Возьмем какое-нибудь из них. Обозначим его Y_1 . Для любой ортогональной матрицы u $Y_1 u$ – многообразие той же размерности. Так как для $u \neq \tilde{u}$ $Y_1 u \cap Y_1 \tilde{u}$ имеет размерность меньше, чем Y_1 , $\nu(Y_1 u \cap Y_1 \tilde{u}) = 0$. Поэтому для каждого $\alpha > 0$ число многообразий вида $Y_1 u$ таких, что $\nu(Y_1 u) \geq \alpha$, конечно. Выберем $Y_2 = Y_1 u$ так, чтобы мера $\nu(Y_2)$ была максимальна. Пусть $\varphi(g) = \nu(Y_2 \bar{g}^{-1})$. В силу μ -инвариантности меры ν

$$\int_G \varphi(g) \mu(dg) = \nu(Y_2) = \int_G \varphi(g) \mu^n(dg) = \int_G \varphi(g) \mu^\infty(dg),$$

где $\mu^\infty = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^k / 2^k$. С другой стороны, $\varphi(g) \leq \nu(Y_2)$ для всех $g \in G$. Поэтому $\varphi(g) = \nu(Y_2)$ для μ^∞ -почти всех g , а, значит, и для всех $g \in H_\mu$. Из этого вытекает, что существует алгебраическое подмногообразие $Y_3 \subset Y$, состоящее из конечного

объединения множеств вида $Y_2 u$, которое содержит $Y_3 \overline{g^{-1}}$ для всех $g \in H_\mu$. Следовательно, полугруппа $H_\mu^{-1} = \{h^{-1}, h \in H_\mu\}$ сохраняет алгебраическое подмножество Y_3 . Это означает, что и алгебраическое замыкание по Зарисскому полугруппы H_μ^{-1} сохраняет Y_3 . В силу плотности по Зарисскому H_μ (а, значит, и H_μ^{-1}) во всей группе G получаем, что группа G также сохраняет множество Y_3 , чего быть не может из-за однородности пространства Y . Следовательно, для любой ортогональной матрицы u $\nu(Y_0 u) = 0$.

2. Эргодичность μ -блуждания. Покажем, что при условии (Г–М) μ -блуждание $\{y_n\}$ имеет единственное стационарное распределение ν и эргодично. Для этого нам понадобится следующая

ЛЕММА 2.2. Пусть условие (Г–М) выполнено. Тогда для любой μ -инвариантной вероятностной меры ν последовательность случайных мер $\nu * g(n)$ слабо сходится при $n \rightarrow +\infty$ $\mathbb{P}$ -почти наверное и для μ^∞ -почти всех g

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu * g(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu * (gg(n)) \quad \mathbb{P}\text{-п.н.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной непрерывной функции ψ на Y положим

$$F_\psi(g) = \int_Y \psi(y(g)) \nu(dy).$$

В силу μ -инвариантности меры ν имеем

$$F_\psi(g) = \int_G F_\psi(g_1 g) \mu(dg_1).$$

Поэтому последовательность $F_\psi(g(n))$ образует ограниченный мартингал. В силу теоремы Дуба существует предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_\psi(g(n))$ $\mathbb{P}$ -п.н. Из этого следует, что $\nu * g(n)$ слабо сходится $\mathbb{P}$ -п.н. Рассмотрим теперь $\mathbb{E} |F_\psi(g(n+k)) - F_\psi(g(n))|^2$, где $\mathbb{E}$ означает среднее по мере $\mathbb{P}$. С одной стороны,

$$\mathbb{E} |F_\psi(g(n+k)) - F_\psi(g(n))|^2 = \int_G \mathbb{E} (F_\psi(gg(n)) - F_\psi(g(n)))^2 \mu^k(dg).$$

С другой стороны, в силу μ -инвариантности меры ν

$$\mathbb{E} F_\psi(g(n+k)) F_\psi(g(n)) = \mathbb{E} F_\psi^2(g(n)).$$

Поэтому

$$a_n(k) = \mathbb{E} |F_\psi(g(n+k)) - F_\psi(g(n))|^2 = \mathbb{E} F_\psi^2(g(n+k)) - \mathbb{E} F_\psi^2(g(n)).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^p a_n(k) = \sum_{n=p+1}^{p+k} \mathbb{E} F_\psi^2(g(n)) - \sum_{n=1}^k \mathbb{E} F_\psi^2(g(n)).$$

Так как $|F_\psi(g)| \leq |\psi| = \sup\{|\psi(y)|, y \in Y\}$ для всех $g \in G$, то $\sum_{n=1}^p a_n(k) \leq 2k|\psi|^2$ и, значит, также

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) = \int_G \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}|F_\psi(gg(n)) - F_\psi(g(n))|^2 \mu^k(dg) \leq 2k|\psi|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_G \mathbb{E}|F_\psi(gg(n)) - F_\psi(g(n))|^2 \mu^\infty(dg) \leq |\psi|^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} < +\infty.$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |F_\psi(gg(n)) - F_\psi(g(n))| = 0 \quad \text{Р-п.н.}$$

для μ^∞ -почти всех g , что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2.3. Пусть μ удовлетворяет условию (Г–М). Тогда существует единственная μ -инвариантная мера ν и $\nu * g(n)$ слабо сходится к случайной мере Дирака $\delta_{y(\omega)}$ Р-п.н., причем $y(\omega)$ имеет распределение ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.2 следует, что существует случайный предел: для фиксированного $\omega \in \Omega$ для μ^∞ -почти всех g

$$(2.6) \quad \nu_\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu * g(n, \omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu * (gg(n, \omega)),$$

который не зависит от g . В силу (Г–М) и леммы 2.1 найдется правильная последовательность $\{h_n\} \subset H_\mu$ такая, что μ -инвариантная мера ν является собственной для $\{h_n\}$. Поэтому к последовательности $\{h_n\}$ и мере ν можно применить лемму 1.3, из которой следует, что $\nu * h_n$ слабо сходится при $n \rightarrow +\infty$ к мере Дирака δ_y , где $y = y(u_2(\{h_n\}))$. С другой стороны, в силу (2.6)

$$\nu_\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu * g(n, \omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\nu * h) * g(n, \omega)$$

для всех $h \in H_\mu$. Поэтому

$$\nu_\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{p \rightarrow +\infty} \nu * h_p \right) * g(n, \omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_y * g(n, \omega).$$

Отсюда следует, что $\nu_\omega = \delta_{y(\omega)}$ – мера Дирака, сосредоточенная в точке $y(\omega)$, зависящей от случайной последовательности $\{g_n\}$, но не зависящей от начального распределения ν .

Покажем теперь единственность μ -инвариантной меры ν . Пусть ψ – произвольная функция из $C(Y)$. Тогда с Р-вероятностью 1

$$\psi(y(\omega)) = \int_Y \psi(y) \nu_\omega(dy) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Y \psi(y(gg(n))) \nu(dy)$$

и, значит, в силу (2.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\psi(y(\omega)) &= \mathbb{E} \int_Y \psi(y) \nu_\omega(dy) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \int_Y \psi(y(yg(n))) \nu(dy) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_Y (P^n \psi)(y) \nu(dy) = \int_Y \psi(y) \nu(dy). \end{aligned}$$

Следовательно, $y(\omega)$ имеет распределение ν и оно единственно. Лемма 2.3 доказана.

Таким образом, мы доказали, что при условии (Г–М) цепь Маркова $\{y_n\}$ обладает свойством эргодичности.

Как уже было показано во введении, последовательность независимых одинаково распределенных случайных матриц $\{g_n\}$ задает также однородную марковскую цепь $\{(y_{n-1}, g_n)\}$ на пространство $Y \times G$. Функция вероятностей перехода такой цепи задается по формуле: для измеримых $B_1 \subset Y$, $B_2 \subset G$ $\mathbb{P}(y, g, B_1, B_2) = \chi_{B_1}(y(yg))\mu(B_2)$. В силу μ -инвариантности меры ν получаем

$$\int_Y \nu(dy) \int_G \mu(dg) \mathbb{P}(y, g, B_1, B_2) = \int_Y \nu(dy) \int_G \chi_{B_1}(y(yg)) \mu(dg) \mu(B_2) = \nu(B_1) \mu(B_2).$$

Поэтому произведение мер $\nu \times \mu$ является стационарным распределением цепи Маркова $\{(y_{n-1}, g_n)\}$. Нетрудно убедиться, что из единственности μ -инвариантной меры ν вытекает единственность стационарного распределения и эргодичность цепи Маркова $\{(y_{n-1}, g_n)\}$. Следовательно, для любой измеримой функции $\psi: Y \times G \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющей условию интегрируемости $\int_Y \nu(dy) \int_G |\psi(y, g)| \mu(dg) < +\infty$, выполнена эргодическая теорема: для любого $y_0 \in Y$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi(y_{k-1}, g_k) = \int_Y \nu(dy) \int_G \psi(y, g) \mu(dg) \quad \text{P-п.н.}$$

Полагая $y_0 = E$, воспользовавшись формулами (0.3), (0.4), отсюда нетрудно вывести следующий усиленный закон больших чисел.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия (Г–М) и (И1). Тогда существует неслучайный вектор $a \in \Gamma$ такой, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S(n) = a \quad \text{P-п.н.,}$$

$$\text{причем } a_k = \int_Y \nu(dy) \int_G f_k(yg) \mu(dg).$$

3. Различие показателей Ляпунова. Покажем теперь, что вектор a в теореме 2.1 удовлетворяет условию $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Обозначим

$$F_{ij}(g) = f_i(yg) - f_j(yg).$$

ЛЕММА 2.4. Пусть μ удовлетворяет условию (Г–М). Тогда для ν -почти всех y , для всех $k = 1, \dots, t-1$ с P -вероятностью 1

$$(2.7) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{k,k+1}(yg(n)) = -\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 2.3, зафиксируем типичное $\omega \in \Omega$, для которого $\nu * g(n, \omega)$ слабо сходится к мере Дирака $\delta_{y(\omega)}$. Из последовательности $\{g(n, \omega)\}$ всегда можно выбрать подпоследовательность $\{g(n_p)\}$ так, чтобы существовали пределы

$$(2.8) \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} u_i(g(n_p)) = u_i(\{g(n_p)\}), \quad i = 1, 2.$$

Слабая сходимость $\nu * g(n_p)$ к $\delta_{y(\omega)}$ означает, что $y(yg(n_p))$ сходится по распределению к $y(\omega)$ (здесь $y(yg(n_p))$ понимается как случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(Y, \mathcal{F}_Y, \nu)$). Следовательно, $y(yg(n_p)) \rightarrow y(\omega)$ при $n \rightarrow +\infty$ по ν -вероятности. Так как по лемме 2.1 μ -инвариантная мера ν не может быть сосредоточена на $Y_0 u_1(\{g(n_p)\})$, то найдется $y \notin Y_0 u_1(\{g(n_p)\})$ такой, что $y(yg(n_p)) \rightarrow y(u_2(\{g(n_p)\}))$ при $p \rightarrow +\infty$. Теперь мы можем применить лемму 1.4, из которой следует, что последовательность $\{g(n_p)\}$ – правильная. Из лемм 1.3 и 2.1 для такой последовательности вытекает, что для ν -почти всех y $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{k,k+1}(yg(n_p)) = -\infty$. Так как это выполнено для любой подпоследовательности $\{g(n_p)\}$ с условиями (2.8), то это верно и для всей последовательности $\{g(n)\}$. Осталось воспользоваться типичностью ω , чтобы получить (2.7).

Основным результатом настоящего пункта является следующая

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть вероятностная мера μ удовлетворяет условиям (Г–М) и (И1). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in Y} \frac{1}{n} \int_G F_{k,k+1}(yg) \mu^n(dg) = a_k - a_{k+1} < 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (Г–М) и леммы 2.3 существует единственная μ -инвариантная мера ν на Y . Обозначим $\psi(y) = \int_G F_{k,k+1}(yg) \mu(dg)$. Из условия (И1) вытекает, что $\psi \in C(Y)$. Легко увидеть, что

$$\int_G F_{k,k+1}(yg) \mu^n(dg) = \sum_{k=0}^{n-1} (P^k \psi)(y),$$

где оператор P определяется по формуле (2.1). Положим

$$q_n = \sup_{y \in Y} \sum_{k=0}^{n-1} (P^k \psi)(y) = \sup_{y \in Y} \int_G F_{k,k+1}(yg) \mu^n(dg).$$

В силу (2.3) $q_n \geq n\nu(\psi) = n \int_Y \psi(y)\nu(dy)$. Так как последовательность $\{q_n\}$ субаддитивна, существует предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n/n$. В силу непрерывности ψ для каждого n найдется $y_n \in Y$ такое, что

$$q_n = \int_G F_{k,k+1}(y_n g) \mu^n(dg) = \sum_{k=0}^{n-1} (P^n \psi)(y_n).$$

Тогда если обозначить через δ_{y_n} меру Дирака, сосредоточенную в y_n , то из последовательности мер $n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (P^{*k} \delta_{y_n})$ можно выделить слабо сходящуюся, причем этот слабый предел будет μ -инвариантной мерой, а значит, будет совпадать с единственной μ -инвариантной мерой ν . Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_n}{n} = \int_Y \psi(y)\nu(dy) = a_k - a_{k+1}.$$

Покажем теперь, что $a_k < a_{k+1}$. Как уже замечалось, если взять в качестве начального распределения (y_0, g_1) произведение мер $\nu \times \mu$, то полученная марковская цепь $\{(y_{n-1}, g_n)\}$ будет стационарной последовательностью. В свою очередь, последовательность $\{\xi_n = F_{k,k+1}(y_{n-1}g_n)\}$ будет также стационарной. В силу леммы 2.4 для такой цепи выполнено: для ν -почти всех y с вероятностью 1

$$\sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n F_{k,k+1}(y_{i-1}g_i) = F_{k,k+1}(yg(n)) \rightarrow -\infty.$$

Поэтому к ней можно применить следующую эргодическую лемму.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\{\xi_n, n = 1, \dots\}$ – стационарная случайная последовательность, определенная на вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$, с условием $\tilde{\mathbf{E}}|\xi_1| < +\infty$. Предположим, что с $\tilde{\mathbf{P}}$ -вероятностью 1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \xi_i = -\infty.$$

Тогда $\tilde{\mathbf{E}}\xi_1 < 0$.

Доказательство приводится в [2] (лемма 5.3).

Полагая в нашем случае $\tilde{\Omega} = Y \times \Omega$, $\tilde{\mathbf{P}} = \nu \times \mathbf{P}$, находим, что построенная случайная последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условиям леммы 2.5. Из нее вытекает, что $\tilde{\mathbf{E}}\xi_1 = \int_Y \nu(dy) \int_G F_{k,k+1}(yg) \mu(dg) = a_k - a_{k+1} < 0$, что и требовалось доказать.

Для доказательства теорем 0.2–0.4 нам понадобится следующее уточнение теоремы 2.2.

ЛЕММА 2.6. Пусть нам задана вероятностная мера μ на G , удовлетворяющая условиям (Г–М) и (И2). Тогда найдутся константы $\varepsilon_3 > 0$, $C_3 > 0$ и $\varkappa_3 \in (0, 1)$ такие, что для всех i, j ($1 \leq i < j \leq n$) и всех натуральных n

$$\sup_{y, \bar{y} \in Y} \int_G \exp\{\varepsilon_3(f_i(yg) - f_j(\bar{y}g))\} \mu^n(dg) \leq C_3 \varkappa_3^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$q_n(t) = \sup_{y, \bar{y} \in Y} \int_G \exp\{t(f_i(yg) - f_j(\bar{y}g))\} \mu^n(dg).$$

Нетрудно убедиться, что $q_{n+p}(t) \leq g_n(t)q_p(t)$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что существуют n и ε_3 такие, что $q_n(\varepsilon_3) < 1$.

Введем

$$\begin{aligned} q_n(t, y, \bar{y}) &= \int_G \exp\{t(f_i(yg) - f_j(\bar{y}g))\} \mu^n(dg) \\ &= \mathbb{E} \exp\{t(f_i(yg(n)) - f_j(\bar{y}g(n)))\}. \end{aligned}$$

В силу условия (И2) в некоторой окрестности нуля эта функция непрерывно дифференцируема по t равномерно по y и $\bar{y}$ и разлагается в ряд Тейлора:

$$q_n(t, y, \bar{y}) = 1 + tq'(0, y, \bar{y}) + \tilde{q}_n(t, y, \bar{y}),$$

$\sup_{y, \bar{y} \in Y} \tilde{q}_n(t, y, \bar{y}) = \tilde{q}(t) = o(t)$ при $t \rightarrow 0$, причем

$$q'(0, y, \bar{y}) = \mathbb{E}(f_i(yg(n)) - f_j(\bar{y}g(n))).$$

В силу теорем 2.1 и 2.2 равномерно по y $n^{-1}\mathbb{E}f_i(yg(n)) \rightarrow a_i$. Следовательно, найдется натуральное число n , для которого

$$\sup_{y, \bar{y} \in Y} \mathbb{E}(f_i(yg(n)) - f_j(\bar{y}g(n))) \leq n \frac{a_i - a_j}{2} < 0.$$

Для такого n легко найти $\varepsilon_3 > 0$ так, чтобы $|\tilde{q}_n(\varepsilon_3)| < n\varepsilon_3|a_i - a_j|/2$. Эти две оценки дают нам, что $q_n(\varepsilon_3) = \sup_{y, \bar{y} \in Y} q_n(\varepsilon_3, y, \bar{y}) < 1$, что и требовалось доказать.

4. Оценки на $z(yg(n))$. Рассмотрим разложение Ивасава

$$(2.9) \quad yg(n) = z(yg(n))d(yg(n))u(yg(n)).$$

Следующая теорема показывает, что можно оценить некоторую степень нормы $z(yg(n))$ в среднем равномерно по n .

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть выполнены условия (Г-М) и (И2). Тогда существуют константы $\varepsilon_4 > 0$ и $C_4 > 0$ такие, что для всех натуральных n

$$\sup_{y \in Y} \int_G (\max\{\|z(yg)\|, \|z^{-1}(yg)\|\})^{\varepsilon_4} \mu^n(dg) \leq C_4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для простоты $z(n) = z(yg(n))$, $u(n) = u(yg(n))$. Разлагая $u(n-1)g_n$ в виде $u(n-1)g_n = z(u(n-1)g_n)d(u(n-1)g_n)u(n)$, из (2.9) получаем

$$d(yg(n)) = d(yg(n-1))d(u(n-1)g_n), \quad z(n) = z(n-1)\bar{z}(n),$$

где $\bar{z}(n) = d(yg(n-1))z(u(n-1)g_n)d^{-1}(yg(n-1))$. Таким образом, отсюда следует, что, с одной стороны,

$$(2.10) \quad z(n) = \bar{z}(1)\bar{z}(2) \cdots \bar{z}(n),$$

с другой стороны, $\bar{z}_{ij}(n) = z_{ij}(u(n-1)g_n) \exp\{F_{ij}(yg(n-1))\}$. В силу очевидного факта, что для всех $v \in V$ выполнено $|z_{ij}(vg)| = |z_{ij}(g)|$, находим, что

$$(2.11) \quad |\bar{z}_{ij}(n)| = |z_{ij}(y_{n-1}g_n)| \exp\{F_{ij}(yg(n-1))\}.$$

Пользуясь треугольностью матриц $\bar{z}(k)$, из (2.10) получаем

$$(2.12) \quad z_{ij}(n) = \sum_{k=1}^n \bar{z}_{ij}(k) + \sum_{s=i+1}^{j-1} \sum_{k=1}^n z_{is}(k-1)\bar{z}_{sj}(k).$$

В случае, когда $j = i+1$, второе слагаемое в (2.12) отсутствует.

Из условия (И2) очевидно вытекает, что найдутся $\varepsilon_5 > 0$ и $C_5 > 0$ такие, что для всех натуральных n

$$(2.13) \quad \sup_{y \in Y} \mathbb{E} \|z(yg_n)\|^{\varepsilon_5} \leq C_5.$$

Пусть $\varepsilon_6 = \min\{\varepsilon_3, \varepsilon_5\}$, где ε_3 удовлетворяет лемме 2.6. Зафиксируем $i = 1, \dots, m-1$. Докажем по индукции по j , что существуют константы $C_{ij} > 0$ такие, что для всех n и $t < \varepsilon_6 2^{j-i}$

$$(2.14) \quad \sup_{y \in Y} \int_G |z_{ij}(yg)|^t \mu^n(dg) \leq C_{ij}.$$

Рассмотрим сначала $z_{i,i+1}(n)$. В силу (2.11), (2.12) имеем

$$|z_{i,i+1}(n)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |z_{i,i+1}(y_{k-1}g_k)| \exp\{F_{i,i+1}(yg(k-1))\}.$$

Отсюда из неравенства Гёльдера следует, что

$$\mathbb{E}|z_{i,i+1}(n)|^t \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (\mathbb{E}|z_{i,i+1}(y_{k-1}g_k)|^{2t})^{1/2} (\mathbb{E} \exp\{2tF_{i,i+1}(yg(k-1))\})^{1/2}.$$

При $2t < \varepsilon_6 \leq \varepsilon_5$ неравенство (2.13) дает нам оценку $\mathbb{E}|z_{i,i+1}(y_{k-1}g_k)|^{2t} \leq C_5$. Соответственно из леммы 2.5 вытекает, что при $2t < \varepsilon_6 \leq \varepsilon_3$

$$\mathbb{E} \exp\{t2F_{i,i+1}(yg(k))\} \leq C_3 \varkappa_3^k.$$

Следовательно, для $C_{i,i+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{C_5 C_3 \varkappa_3^{k-1}} < +\infty$ при $2t \leq \varepsilon_6$

$$\mathbb{E}|z_{i,i+1}(n)|^t \leq C_{i,i+1},$$

и оценка (2.14) для $j = i + 1$ доказана.

Проведем теперь шаг индукции. Пусть для всех $s = i, i + 1, \dots, j - 1$ для любого n при $2^{j-i-1}t \leq \varepsilon_6$ $\sup_{y \in Y} \mathbb{E}|z_{is}(yg(n))|^t \leq C_{is}$. Зафиксируем t так, чтобы $2^{j-i}t \leq \varepsilon_6$. Из (2.12) следует, что

$$\mathbb{E}|z_{ij}(n)|^t \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}|\bar{z}_{ij}(k)|^t + \sum_{s=i+1}^{j-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}|z_{is}(k-1)|^t |\bar{z}_{sj}(k)|^t.$$

Оценим первое слагаемое. Аналогично приведенным выше рассуждениям, воспользовавшись неравенством Гёльдера, оценкой (2.13) и леммой 2.6, легко получить, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}|\bar{z}_{ij}(k)|^t &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} (\mathbb{E}|z_{ij}(y_{k-1}g_k)|^{2t})^{1/2} (\mathbb{E} \exp\{2tF_{ij}(yg(k-1))\})^{1/2} \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{C_5 C_3 \varkappa_3^{k-1}}. \end{aligned}$$

В силу предположения индукции и неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|z_{is}(k-1)|^t |\bar{z}_{sj}(k)|^t &\leq (\mathbb{E}|z_{is}(k-1)|^{2t})^{1/2} (\mathbb{E}|z_{sj}(y_{k-1}g_k)|^{4t})^{1/4} (\mathbb{E} \exp\{4tF_{sj}(yg(k-1))\})^{1/4} \\ &\leq \sqrt{C_{is}} (C_5 C_3 \varkappa_3^{k-1})^{1/4}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $2^{j-i}t \leq \varepsilon_6$

$$\mathbb{E}|z_{ij}(n)|^t \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sqrt{C_5 C_3 \varkappa_3^{k-1}} + \sum_{s=i+1}^{j-1} \sqrt{C_{is}} (C_5 C_3 \varkappa_3^{k-1})^{1/4} \right) = C_{ij} < +\infty.$$

Таким образом, неравенство (2.14) доказано.

Рассмотрим теперь обратную матрицу $z^{-1}(n)$. Нетрудно увидеть, что

$$(z^{-1}(n))_{ij} = -z_{ij}(n) - \sum_{s=i+1}^{j-1} (z^{-1}(n))_{is} z_{sj}(n).$$

Поэтому

$$\mathbb{E}|(z^{-1}(n))_{ij}|^t \leq \mathbb{E}|z_{ij}(n)|^t + \sum_{s=i+1}^{j-1} (\mathbb{E}|(z^{-1}(n))_{is}|^{2t})^{1/2} (\mathbb{E}|z_{sj}(n)|^{2t})^{1/2}.$$

Как и при доказательстве (2.14), воспользовавшись индукцией по j легко вывести, что найдутся константы $\overline{C}_{ij} > 0$, для которых

$$(2.15) \quad \sup_{y \in Y} \mathbb{E}|(z^{-1}(yg(n)))_{ij}|^t \leq \overline{C}_{ij} \quad \text{при} \quad 2^{j-i}t \leq \varepsilon_6.$$

Выбрав в качестве $\varepsilon_4 = 2^{-m}\varepsilon_6$, $C_4 = \max\{C_{ij}, \overline{C}_{ij}\}$, из оценок (2.14), (2.15) получаем утверждение теоремы 2.3.

5. Доказательство теоремы 0.1. Первые два пункта теоремы сразу следуют из леммы 2.3 и теорем 2.1 и 2.2. Применяя теорему 2.2 к формуле (2.11), индукцией по j нетрудно показать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\overline{z}_{ij}(k) + \sum_{s=i+1}^{j-1} z_{is}(k-1) \overline{z}_{sj}(k) \right)$$

абсолютно сходится с $\mathbb{P}$ -вероятностью 1. Отсюда вытекает, что при $n \rightarrow +\infty$ $z_{ij}(n) \rightarrow z_{ij}(\infty)$ $\mathbb{P}$ -п.н., что и доказывает пункт в) теоремы 0.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Следует заметить, что главным ключом доказательства утверждений теоремы 0.1 при условии (Г–М) является лемма 2.1. Между тем, нетрудно убедиться, что она выполнена, если мы заменим условие (Г–М) на следующие:

- 1) H_μ содержит правильную последовательность;
- 2) H_μ , действуя на Y , не сохраняет никакого конечного объединения множеств вида $Y_0 u$.

В некоторых случаях эти условия являются более удобными в приложениях, так как иногда бывает достаточно трудно описать всю полугруппу H_μ , зная только носитель меры μ . Проверка же сформулированных условий порой не составляет большой трудности. Например, первое условие выполнено, если носитель меры содержит матрицу, у которой все собственные числа по модулю различны. В случае, когда $m = 2$, условия 1), 2) вытекают из некомпактности и сильной неприводимости полугруппы H_μ . Таким образом, теорема 0.1 в этом случае влечет за собой известный результат Г. Фюрстенберга [18].

6. Скорость стягиваемости в точку. Обратимся теперь к метрике ρ , построенной по формуле (1.3) и зависящей от параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Выберем их так, чтобы

$$(2.16) \quad \alpha = \max\{|\alpha_i - \alpha_j|^{-1}, i \neq j\} \leq \frac{1}{3} \min\{\varepsilon_3, \varepsilon_4\},$$

где ε_3 и ε_4 – константы из леммы 2.6 и теоремы 2.3, соответственно. В лемме 2.3 фактически мы показали, что $y(yg(n))$ стягивается к случайной точке $y(\omega)$, имеющей распределение ν . Следующая теорема показывает, что скорость стягивания в метрике ρ – экспоненциальная.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть выполнены условия (Г–М) и (И2) и имеет место неравенство (2.16). Тогда существуют константы $C_6 > 0$ и $\varkappa_6 \in (0, 1)$ такие, что для всех натуральных n

$$\sup_{\substack{y, \bar{y} \in Y \\ y \neq \bar{y}}} \int_G \frac{\rho(y(yg), y(\bar{y}g))}{\rho(y, \bar{y})} \mu^n(dg) \leq C_6 \varkappa_6^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства (1.8) леммы 1.1 при $y \neq \bar{y}$ для некоторых $i < j$

$$\frac{\rho(y(yg), y(\bar{y}g))}{\rho(y, \bar{y})} \leq m^2 Z^\alpha(yg) Z^\alpha(\bar{y}g) \exp \left\{ \frac{f_i(yg) - f_j(\bar{y}g)}{\alpha_j - \alpha_i} \right\}.$$

Поэтому, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} & \int_G \frac{\rho(y(yg), y(\bar{y}g))}{\rho(y, \bar{y})} \mu^n(dg) \\ & \leq m^2 (EZ^{3\alpha}(yg(n)))^{1/3} (EZ^{3\alpha}(\bar{y}g(n)))^{1/3} (E \exp \{3\alpha(f_i(yg) - f_j(\bar{y}g(n)))\})^{1/3}. \end{aligned}$$

Первые два сомножителя оцениваются сверху в силу теоремы 2.3 и того, что $3\alpha \leq \varepsilon_4$: $EZ^{3\alpha}(yg(n)) \leq C_4$.

Оценка для последнего сомножителя вытекает из леммы 2.5 и неравенства $3\alpha \leq \varepsilon_3$: $E \exp \{3\alpha(f_i(yg(n)) - f_j(\bar{y}g(n)))\} \leq C_3 \varkappa_3^n$.

В итоге имеем, что при $y \neq \bar{y}$

$$\int_G \frac{\rho(y(yg), y(\bar{y}g))}{\rho(y, \bar{y})} \mu^n(dg) \leq m^2 (C_4^2 C_3 \varkappa_3^n)^{1/3} = C_6 \varkappa_6^n,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Предельные теоремы для марковских цепей

1. Теорема Ионеску–Тулъчи и Маринеску. Пусть (Y, ρ) – компактное метрическое пространство, построенное в §1. В дальнейшем нас будет интересовать пространство непрерывных комплекснозначных функций $\mathbf{C}(Y)$ с обычной нормой $|\psi| = \sup_{y \in Y} |\psi(y)|$ и его подпространство липшицевых функций $\mathbf{L}(Y)$ с нормой $\|\psi\| = |\psi| + [\psi]$, где

$$[\psi] = \sup_{\substack{y, \bar{y} \in Y \\ y \neq \bar{y}}} \frac{|\psi(y) - \psi(\bar{y})|}{\rho(y, \bar{y})}.$$

Пространства $\mathbf{C}(Y)$ и $\mathbf{L}(Y)$ с заданными нормами являются банаховыми пространствами, причем $\mathbf{L}(Y)$ плотно в $\mathbf{C}(Y)$ и замкнутый шар пространства $\mathbf{L}(Y)$ компактен в топологии равномерной сходимости пространства $\mathbf{C}(Y)$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ пространство ограниченных линейных операторов на пространстве $\mathbf{C}(Y)$, сохраняющих $\mathbf{L}(Y)$. Для каждого $T \in \mathfrak{M}$ обычным образом задаются нормы $|T|$, $\|T\|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Будем говорить, что оператор $T \in \mathfrak{M}$ удовлетворяет *условиям Ионеску-Тульчи и Маринеску*, если для него выполнено:

- 1) $\sup_n |T^n| < +\infty$,
- 2) существуют натуральное n и действительные константы $C_0 \geq 0$, $\varkappa_0 \in (0, 1)$ такие, что для всех $\psi \in L(Y)$ $|T^n \psi| \leq \varkappa_0 |\psi| + C_0 |\psi|$.

Множество операторов, удовлетворяющих этим условиям, будем обозначать $\mathfrak{M}_0$. Следующая эргодическая теорема, доказанная С.Т. Ионеску-Тульчи и Г. Маринеску [31], показывает, что все операторы из $\mathfrak{M}_0$ обладают свойством квазикompактности, т.е. близки по спектральному строению к вполне непрерывным операторам на $L(Y)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $T \in \mathfrak{M}_0$. Тогда оператор T имеет только конечное число собственных чисел $c_1, \dots, c_p$, по модулю равных 1, и для всех натуральных n его степень T^n представима в виде

$$(3.1) \quad T^n = \sum_{j=1}^p c_j^n T_j + R^n,$$

где T_j — конечномерные проекторы в $L(Y)$: $T_j^2 = T_j$, $T_j T_k = 0$, $k \neq j$, $T_j R = R T_j = 0$ и для некоторых констант $C_7 > 0$ и $\varkappa_7 \in (0, 1)$ $\|R^n\| \leq C_7 \varkappa_7^n$.

Следует заметить, что условие $T \in \mathfrak{M}_0$ не влечет за собой существование собственных чисел, по модулю равных 1, их может и не быть. В этом случае первая часть в разложении (3.1) отсутствует и, следовательно, спектральный радиус оператора T меньше 1.

2. Возмущенные марковские операторы. Пусть нам задана произвольная измеримая функция $\eta: G \times Y \rightarrow \mathbb{R}^1$, обладающая свойствами:

- $\eta 1)$ для всех $g \in G$ $\eta(g, \cdot) \in L(Y)$,
- $\eta 2)$ для всех $g \in G$, $y \in Y$ $\eta(g, y) > 0$,
- $\eta 3)$ для всех $y \in Y$ $\int_G \eta(g, y) \mu(dg) = 1$.

Обозначим $X = G \times Y$ и зададим на пространстве X с помощью вероятностной меры μ и функции η однородную марковскую цепь $\{x_n = (g_n, y_n), n = 0, 1, \dots\}$ с функцией вероятностей перехода: для измеримых $B_1 \subset G$, $B_2 \subset Y$ для $x = (g, y)$

$$P_\eta(x, B_1 \times B_2) = \int_{B_1} \chi_{B_2}(y(\bar{g})) \eta(\bar{g}, y) \mu(d\bar{g}).$$

Как видно из формулы, $P_\eta(x, B_1 \times B_2)$ не зависит от g . Обозначим через $X^\infty = \{x^\infty = \{x_n, n = 0, 1, \dots\}, x_n = (g_n, y_n) \in X\}$ пространство траекторий цепи Маркова $\{x_n\}$. Пусть $\mathcal{X}$ — σ -алгебра подмножеств X^∞ , порожденная цилиндрическими подмножествами X^∞ . Тогда функция вероятностей перехода $P_\eta(x, B)$ определяет обычным образом вероятностное распределение $P_{\eta, x}$ на X^∞ , где $x = (g, y)$ — начальное состояние цепи. Так как $P_\eta(x, B)$ не зависит от g , то $P_{\eta, x}$ также не зависит от g . Поэтому будем такое распределение обозначать $P_{\eta, y}$. Если $y = E$, то индекс y в дальнейшем в этих обозначениях будем опускать. Если же y_0 имеет некоторое начальное

распределение ν на Y , то распределение соответствующей цепи Маркова $\{x_n\}$ на X^∞ будем обозначать $P_{\eta, \nu}$.

Заметим, что проекция построенной марковской цепи на Y является также однородной марковской цепью $\{y_n\}$. Марковский оператор, соответствующий $\{y_n\}$, определяется по формуле

$$(3.2) \quad (P_\eta \psi)(y) = \int_G \psi(y(yg)) \eta(g, y) \mu(dg).$$

При $\eta(g, y) \equiv 1$ данный оператор совпадает с марковским оператором P , определенным в (2.1), а $\{y_n\}$ есть μ -блуждание на Y . Пусть f – функция, заданная по формуле (0.3). Для $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \Gamma$ определим оператор Фурье $P_\eta(\tau)$:

$$(3.3) \quad (P_\eta(\tau) \psi)(y) = \int_G e^{i(\tau, f(yg))} \psi(y(yg)) \eta(g, y) \mu(dg).$$

В силу (3.2), (3.3) $P_\eta(0) = P_\eta$.

Выпишем теперь условия на операторы $P_\eta(\tau)$, необходимые для получения соответствующих предельных теорем.

(У1) $P_\eta \in \mathfrak{M}_0$ и P_η не имеет других собственных чисел, по модулю равных 1, кроме 1, и у единицы нет других собственных функций, кроме констант;

(У2) при $\tau \neq 0$ $P_\eta(\tau) \in \mathfrak{M}_0$ и $P_\eta(\tau)$ не имеет собственных чисел, по модулю равных 1.

ЛЕММА 3.1. Пусть условие (У1) выполнено. Тогда для любой функции $\psi \in L(Y)$ и для любого натурального n

$$(P_\eta^n \psi)(y) = \nu_\eta(\psi) + (Q_\eta^n \psi)(y), \quad \text{где} \quad \nu_\eta(\psi) = \int_Y \psi(y) \nu_\eta(dy),$$

ν_η – единственная вероятностная мера на Y , которая инвариантна под действием сопряженного оператора P_η^* : $P_\eta^* \nu_\eta = \nu_\eta$, $Q_\eta^* \nu_\eta = 0$. Кроме того, существуют константы $C_8 > 0$, $\varkappa_8 \in (0, 1)$ такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$(3.4) \quad \|Q_\eta^n\| \leq C_8 \varkappa_8^n.$$

Если к тому же выполнено условие (У2), то для всех $\tau \neq 0$

$$(3.5) \quad \|P_\eta^n(\tau)\| \leq C(\tau) \varkappa^n(\tau) \quad \text{для некоторых} \quad C(\tau) > 0, \quad \varkappa(\tau) \in (0, 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность вероятностной меры ν_η , инвариантной относительно P_η^* , вытекает из того, что в силу (У1) единица – простое изолированное собственное число оператора P_η . Условия (У1), (У2) дают нам право применить теорему 3.1 к операторам $P_\eta(\tau)$. Отсюда сразу следует неравенство (3.5). Из условия (У1) имеем: $P_\eta^n = T_\eta + Q_\eta^n$, где T_η – одномерный проектор на константы, $T_\eta Q_\eta = Q_\eta T_\eta = 0$ и $\|Q_\eta^n\| \leq C_8 \varkappa_8^n$. Из того, что $P_\eta^* \nu_\eta = \nu_\eta$, легко получить, что $T_\eta \psi = \nu_\eta(\psi)$ и $Q_\eta^* \nu_\eta = 0$. Лемма доказана.

3. Разложение $P_\eta(\tau)$ при малых τ . Следующая лемма, аналогичная соответствующим результатам С. В. Нагаева [7] и В. Н. Тутубалина [9], [10], показывает, что спектральная структура оператора $P_\eta(\tau)$ при малых τ близка оператору P_η .

ЛЕММА 3.2. Пусть выполнено условие (Y1).

1) Существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\|\tau\| < \varepsilon_0$ оператор $P_\eta^n(\tau)$ представим в виде: для $\psi \in \mathbf{L}(Y)$

$$(3.6) \quad P_\eta^n(\tau)\psi = \lambda_\eta^n(\tau)\nu_\eta(\tau, \psi)e_\eta(\tau) + Q_\eta^n(\tau)\psi,$$

где $\lambda_\eta(\tau)$ – максимальное по модулю собственное число оператора $P_\eta(\tau)$ (оно единственно и просто при $\|\tau\| < \varepsilon_0$), $e_\eta(\tau) \in \mathbf{L}(Y)$ – соответствующая ему собственная функция, $\nu_\eta(\tau, \psi) = \int_Y \psi(y)\nu_\eta(\tau)(dy)$, $\nu_\eta(\tau)$ – собственная мера сопряженного оператора $P_\eta^*(\tau)$, отвечающая собственному числу $\overline{\lambda_\eta(\tau)}$:

$$P_\eta^*(\tau)\nu_\eta(\tau) = \overline{\lambda_\eta(\tau)}\nu_\eta(\tau), \quad \nu_\eta(\tau, e_\eta(\tau)) = 1,$$

причем $\|Q_\eta(\tau)\| \leq \varkappa_9 < 1$, $Q_\eta(\tau)e_\eta(\tau) = 0$, $Q_\eta^*(\tau)\nu_\eta(\tau) = 0$.

2) Собственное число $\lambda_\eta(\tau)$ дважды непрерывно дифференцируемо по τ при $\|\tau\| < \varepsilon_0$ и раскладывается по формуле Тейлора

$$(3.7) \quad \lambda_\eta(\tau) = 1 + i(\lambda'_\eta(0), \tau) - \frac{1}{2}(\tau, \lambda''_\eta(0)\tau) + o(\|\tau\|^2) \quad \text{при } \tau \rightarrow 0,$$

где $\lambda'_\eta(0)$ – вектор первых частных производных $\left(\frac{1}{i}\frac{\partial \lambda}{\partial \tau_j}\eta(0)\right)_{j=1, \dots, m}$, $\lambda''_\eta(0)$ – матрица вторых частных производных $\left(-\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \tau_j \partial \tau_k}\eta(0)\right)_{j, k=1, \dots, m}$. Для любой функции $\psi \in \mathbf{L}(Y)$ $\nu_\eta(\tau, \psi)e(\tau) \rightarrow \nu_\eta(\psi)e$ в $\mathbf{L}(Y)$ при $\tau \rightarrow 0$, где ν_η – вероятностная мера, инвариантная относительно P_η^* , $e(y) \equiv 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторим рассуждения С. В. Нагаева [7] (см. также [34]). Рассмотрим оператор T_η , определенный мерой ν_η : $T_\eta\psi = \nu_\eta(\psi) = \int_Y \psi(y)\nu_\eta(dy)$. В силу леммы 3.1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_\eta^n - T_\eta\|^{1/n} \leq \varkappa_8 < 1$. Очевидно, что спектр оператора T_η состоит из единственной точки 1. Следовательно, область, внешняя к кругу радиуса $\varkappa_8$ с центром в точке 0, из которой удалена 1, целиком содержится в резольвентном множестве оператора P_η : для $|z| > \varkappa_8$

$$R(z) = \frac{1}{z-1}T_\eta + \sum_{k=0}^{+\infty} (P_\eta - T_\eta)^k z^{-k-1}.$$

Если $\|P_\eta(\tau) - P_\eta\| \leq \frac{1}{\|R(z)\|}$, то ряд

$$(3.8) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} R(z)((P_\eta(\tau) - P_\eta)R(z))^k$$

сходится и определяет резольвенту $R(\tau, z)$ оператора $P_\eta(\tau)$. Пусть I_1 и I_2 – окружности с центрами 1 и 0 и радиусами $r_1 = (1 - \varkappa_8)/3$ и $r_2 = (1 + \varkappa_8)/3$, соответственно. Выберем $\varepsilon_7 > 0$ так, чтобы $\varepsilon_7 < r_1$ и $\varkappa_8 + \varepsilon_7 < r_2$. Легко определить константу $K = \sup\{\|R(z)\|, |z| > \varkappa_8 + \varepsilon_7, |z - 1| < \varepsilon_7\}$. Поэтому при условии $\|P_\eta(\tau) - P_\eta\| < K^{-1}$ определена резольвента $R(\tau, z)$ оператора $P_\eta(\tau)$. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы $\|P_\eta(\tau) - P_\eta\| < K^{-1}$ при $\|\tau\| < \varepsilon_0$. Рассмотрим проекции

$$T_\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_1} R(\tau, z) dz, \quad Q_\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_2} R(\tau, z) dz.$$

Тогда, как показано в лемме 1.1 работы [7], при $\|\tau\| < \varepsilon_0$ оператор $P_\eta^n(\tau)$ представим в виде $P_\eta^n(\tau) = \lambda_\eta^n(\tau) T_\eta(\tau) + Q_\eta^n(\tau)$, где $\lambda_\eta(\tau)$ – единственное собственное число из круга I_1 , $\|Q_\eta(\tau)\| \leq (1 + 2\varkappa_8)/3 \leq \varkappa_9 < 1$, $T_\eta(\tau)$ – оператор проектирования на одномерное подпространство $\mathbf{L}(Y)$. Обозначим $e_\eta(\tau)$ – вектор, порождающий это подпространство, $\nu_\eta(\tau)$ – сопряженный вектор, задающий проектирование, причем $\nu_\eta(\tau, e_\eta(\tau)) = 1$. Оператор $T_\eta(\tau)$ в этом случае имеет вид

$$(3.9) \quad T_\eta(\tau)\psi = \nu_\eta(\tau, \psi)e_\eta(\tau).$$

Суммируя все вышесказанное, получаем утверждение первого пункта леммы.

Чтобы доказать вторую часть леммы, заметим, что отображение $\tau \rightarrow P_\eta(\tau)$ является гладким в пространстве операторов $\mathfrak{M}$, а значит, и дважды непрерывно дифференцируемым. Обозначим для $k \in \mathbb{N}$

$$A_k(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \nu_\eta \left(\int_{I_1} z R(z) ((P_\eta(\tau) - P_\eta) R(z))^k e dz \right),$$

$$B_k(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \nu_\eta \left(\int_{I_1} R(z) ((P_\eta(\tau) - P_\eta) R(z))^k e dz \right),$$

где $e(y) \equiv 1$, ν_η – мера из леммы 3.1. Так как $\|(P_\eta(\tau) - P_\eta) R(z)\| < 1$ при $z \in I_2$, из дифференцируемости оператора $P_\eta(\tau)$ следует дифференцируемость операторов $A_k(\tau)$ и $B_k(\tau)$. В силу леммы 2.2 работы [7]

$$\lambda_\eta(\tau) = \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k(\tau) \right) \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k(\tau) \right)^{-1}.$$

Следовательно, $\lambda_\eta(\tau)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция по τ при $\|\tau\| < \varepsilon_0$ и раскладывается в ряд Тейлора (3.7). В силу (3.8) и того, что $P_\eta(\tau) \rightarrow P_\eta$ при $\tau \rightarrow 0$, находим, что $R(\tau, z) \rightarrow R(z)$ при $\tau \rightarrow 0$. Отсюда следует, что при $\tau \rightarrow 0$

$$T_\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_1} R(\tau, z) dz \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{I_1} R(z) dz = T_\eta.$$

Применяя формулу (3.9), получаем последнее утверждение леммы.

4. Центральная предельная теорема. Пусть, как и ранее, $g(n) = g_1 \cdots g_n$. Можно считать, что $\{g(n)\}$ есть последовательность случайных матриц, определенных на вероятностном пространстве $(X^\infty, \mathcal{X}, P_{\eta, y})$. Поэтому естественным является вопрос об асимптотическом поведении $f(yg(n))$ относительно $P_{\eta, y}$. Ответ на этот вопрос дает следующая

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполнены условия (Y1), (Y2). Тогда найдутся вектор $a \in \Gamma$ и матрица ковариаций D невырожденного распределения на Γ такие, что для любых измеримых $B_1 \subset \Gamma$, $B_2 \subset Y$ равномерно по $y \in Y$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{\eta, y} \left\{ \frac{f(yg(n)) - a_n}{\sqrt{n}} \in B_1, y(yg(n)) \in B_2 \right\} = \mathcal{N}_D(B_1) \nu_\eta(B_2),$$

где $\mathcal{N}_D$ — гауссовское распределение на Γ с нулевым средним и матрицей ковариации D , ν_η — P_η^* -инвариантная вероятностная мера на Y . Вектор a и матрица D находятся по формулам

$$(3.10) \quad a_j = \frac{1}{i} \frac{\partial \lambda_\eta}{\partial \tau_j}(0), \quad D_{jk} = -\frac{\partial^2 \lambda_\eta}{\partial \tau_j \partial \tau_k}(0) + \frac{\partial \lambda_\eta}{\partial \tau_j}(0) \frac{\partial \lambda_\eta}{\partial \tau_k}(0),$$

где $\lambda_\eta(\tau)$ определена в лемме 3.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале вектор $n^{-1}f(g(n))$. Его характеристическая функция $\overline{\varphi}_n(\tau)$ равна

$$\overline{\varphi}_n(\tau) = E_\eta \exp \left\{ i \left(\tau, \frac{f(g(n))}{n} \right) \right\} = \left(P_\eta^n \left(\frac{\tau}{n} \right) e \right) (E),$$

где E_η — среднее по распределению P_η . Из (3.7) вытекает, что при фиксированном τ при $n \rightarrow +\infty$

$$\lambda_\eta^n \left(\frac{\tau}{n} \right) = \left(1 + \frac{1}{n} i (\lambda'_\eta(0), \tau) + o \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n \rightarrow e^{i (\lambda'_\eta(0), \tau)}.$$

По лемме 3.2 $\nu_\eta \left(\frac{\tau}{n}, e \right) e_\eta \left(\frac{\tau}{n} \right) \rightarrow \nu_\eta(e)$ при $n \rightarrow +\infty$. В итоге из (3.6) и того факта, что $\|Q_n \left(\frac{\tau}{n} \right)\| \leq \varkappa_9 < 1$, получаем, что при $n \rightarrow +\infty$

$$\overline{\varphi}_n(\tau) = \left(P_\eta^n \left(\frac{\tau}{n} \right) e \right) (E) \rightarrow e^{i (\lambda'_\eta(0), \tau)}.$$

Последнее означает, что $S(n)/n$ сходится по распределению к $\lambda'(0)$ и $\lambda'(0) \in \Gamma$. Таким образом, $a_j = \frac{1}{i} \frac{\partial \lambda_\eta}{\partial \tau_j}(0)$ — действительные числа.

Рассмотрим теперь следующую характеристическую функцию: для $\tau \in \Gamma$, $\psi \in L(Y)$, $y \in Y$

$$\begin{aligned} \varphi_n(\tau, \psi, y) &= E_{\eta, y} \exp \left\{ i \left(\tau, \frac{f(yg(n)) - an}{\sqrt{n}} \right) \right\} \psi(y(yg(n))) \\ &= e^{-i \sqrt{n}(\tau, a)} \left(P_\eta^n \left(\frac{\tau}{\sqrt{n}} \right) \psi \right) (y), \end{aligned}$$

соответствующую совместному $P_{\eta,y}$ -распределению $\frac{f(yg(n)) - an}{\sqrt{n}}$ и $y_n = y(yg(n))$. В силу (3.7) и (3.10) нетрудно убедиться, что при $\tau \rightarrow 0$

$$e^{-i(\tau,a)}\lambda_{\eta}(\tau) = 1 - \frac{1}{2}(\tau, D\tau) + o(\|\tau\|^2).$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{-i\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}, a\right)} \lambda_{\eta} \left(\frac{\tau}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = e^{\frac{1}{2}(\tau, D\tau)}.$$

Применив это к формуле (3.7), из леммы 3.2 сразу вытекает, что

$$(3.11) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(\tau, \psi, y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-i\sqrt{n}(a,\tau)} \left(P_{\eta}^n \left(\frac{\tau}{\sqrt{n}} \right) \psi \right)(y) = e^{-\frac{1}{2}(\tau, D\tau)} \nu_{\eta}(\psi)$$

равномерно по y . Последнее означает, что совместное $P_{\eta,y}$ -распределение $\frac{f(yg(n)) - an}{\sqrt{n}}$ и y_n слабо сходится при $n \rightarrow +\infty$ к произведению мер $\mathcal{N}_D \times \nu_{\eta}$ на $\Gamma \times Y$.

Покажем теперь, что $\text{rang } D = m - 1$. Пусть это не так. Тогда найдется $\tau \in \Gamma$ ($\tau \neq 0$) такое, что $(\tau, D\tau) = 0$. Рассмотрим случайную величину $\xi_n = (\tau, f(g(n)))$. Ее характеристическая функция определяется по формуле $E_{\eta} e^{it\xi_n} = P_{\eta}^n(t\tau)e$. Однако в силу леммы 3.1 $\|P_{\eta}^n(t\tau)e\| \leq C(t\tau) \varkappa^n(t\tau)$. Следовательно, характеристическая функция случайной величины ξ_n стремится к нулю при любом $t \neq 0$. Последнее означает, что дисперсия $D_{\eta}\xi_n$ не может быть ограничена. Между тем, пользуясь методами работы [9, с. 30–31] нетрудно показать, что при $n \rightarrow +\infty$ $D_{\eta}\xi_n = n(\tau, D\tau) + O(1)$. Это противоречит условию $(\tau, D\tau) = 0$. Отсюда вытекает невырожденность предельного распределения $\mathcal{N}_D$ на Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Следует заметить, что условие (У2) мы использовали только при доказательстве невырожденности матрицы D .

5. Локальная предельная теорема. Матрица ковариации D невырожденного распределения на Γ определяет линейное взаимно однозначное отображение из Γ в Γ . Поэтому можно найти определитель отображения $\det D = d > 0$. К тому же существует обратное линейное отображение $D^{-1}: \Gamma \rightarrow \Gamma$. Для каждого $t \in (0, 1]$ матрица D однозначно определяет гауссовское распределение $\mathcal{N}_{tD}$ на Γ с параметрами $(0, tD)$. Плотность такого распределения равна

$$(3.12) \quad \pi_t(\gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{m-1} \frac{1}{\sqrt{td}} \exp \left\{ -\frac{(\gamma, D^{-1}\gamma)}{2t} \right\}.$$

Пусть как и во введении, m_{Γ} – мера Лебега на Γ . Следующая теорема является вариантом локальной предельной теоремы для последовательности $f(yg(n))$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Предположим, что условия (У1), (У2) выполнены. Тогда для любого $t \in (0, 1]$ для любого ограниченного измеримого множества $M \subset \Gamma$ равномерно по $\gamma \in \Gamma$ и $y \in Y$*

$$(3.13) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n})^{m-1} P_{\eta,y} \{ (f(yg([nt])) - a[nt] + \sqrt{n}\gamma) \in M \} = m_{\Gamma}(M) \pi_t(\gamma),$$

где $\pi_t(\gamma)$, a и D определяются по формулам (3.10), (3.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C_0(\Gamma)$ – пространство непрерывных комплекснозначных функций с компактным носителем. Рассмотрим $\mathcal{H}$ – пространство преобразований Фурье таких функций:

$$h(\gamma) = \int_{\Gamma} e^{i(\tau, \gamma)} \widehat{h}(\tau) d\tau, \quad \widehat{h} \in C_0(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} |h(\gamma)| d\gamma < +\infty.$$

Пусть t фиксировано и $q = [nt]$. Покажем вначале, что для любой функции $h \in \mathcal{H}$

$$(3.14) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n})^{m-1} E_{\eta, y} h(f(yg(q)) - aq + \sqrt{n}\gamma) = m_{\Gamma}(h) \pi_t(\gamma),$$

где $m_{\Gamma}(h) = \int_{\Gamma} h(\gamma) d\gamma$. В силу задания операторов $P_{\eta}(\tau)$ получаем

$$\begin{aligned} & (\sqrt{n})^{m-1} E_{\eta, y} h(f(yg(q)) - aq + \sqrt{n}\gamma) \\ &= (\sqrt{n})^{m-1} \int_{\Gamma} \widehat{h}(\tau) E^{-iq(\tau, a)} e^{i\sqrt{n}(\tau, \gamma)} E_{\eta, y} e^{i(\tau, f(yg(q)))} d\tau \\ &= (\sqrt{n})^{m-1} \int_{\Gamma} \widehat{h}(\tau) e^{-iq(\tau, a)} e^{i\sqrt{n}(\tau, \gamma)} (P_{\eta}^q(\tau)e)(y) d\tau = I(n). \end{aligned}$$

Из предельного соотношения (3.11) имеем, что

$$(3.15) \quad \lim_{q \rightarrow +\infty} e^{-i\sqrt{q}(\tau, a)} \left(P_{\eta}^q \left(\frac{\tau}{\sqrt{q}} \right) e \right) (y) = e^{-\frac{1}{2}(\tau, D\tau)}.$$

Кроме того, в силу невырожденности D всегда можно выбрать $\varepsilon_9 > 0$ такое, что при $\|\tau\| < \varepsilon_9$

$$e^{-i(a, \tau)} \lambda_{\eta}(\tau) = 1 - \frac{1}{2}(\tau, D\tau) + o(\|\tau\|^2) \leq 1 - \frac{1}{4}(\tau, D\tau).$$

Следовательно, при $\|\tau/\sqrt{q}\| < \varepsilon_9$

$$\left| e^{-i(a, \frac{\tau}{\sqrt{q}})} \lambda_{\eta} \left(\frac{\tau}{\sqrt{q}} \right) \right|^q \leq \left(1 - \frac{(\tau, D\tau)}{4q} \right)^q \leq e^{-\frac{1}{4}(\tau, D\tau)}.$$

Так как при достаточно больших q $\nu_{\eta}(\frac{\tau}{\sqrt{q}}, e) e_{\eta}(\frac{\tau}{\sqrt{q}})$ близко к 1 и $\frac{\|Q_{\eta}^q(\frac{\tau}{\sqrt{q}})\|}{|\lambda_{\eta}(\frac{\tau}{\sqrt{q}})|^q} < 1$, то в силу (3.6) можно найти константу $C_9 > 0$ так, чтобы при $\|\tau/\sqrt{q}\| \leq \varepsilon_9$ при достаточно больших q

$$(3.16) \quad \left\| P_{\eta}^q \left(\frac{\tau}{\sqrt{q}} \right) \right\| \leq C_9 \exp \left\{ -\frac{1}{4}(\tau, D\tau) \right\}.$$

Обозначим $\Gamma(b) = \{\tau \in \Gamma : \|\tau\| < b\}$. Так как $\widehat{h} \in C_0(\Gamma)$, найдется $b > 0$ такое, что носитель $\widehat{h}$ лежит в $\Gamma(b)$, т.е. при $\|\tau\| \geq b$ $\widehat{h}(\tau) = 0$. Тогда интеграл $I(n)$ можно представить в виде суммы двух интегралов: $I(n) = I_1(n) + I_2(n)$, где

$$\begin{aligned} I_1(n) &= (\sqrt{n})^{m-1} \int_{\Gamma(\varepsilon_9)} \widehat{h}(\tau) e^{-iq(\tau, a)} e^{i\sqrt{n}(\tau, \gamma)} (P_{\eta}^q(\tau)e)(y) d\tau, \\ I_2(n) &= (\sqrt{n})^{m-1} \int_{\Gamma(b) \setminus \Gamma(\varepsilon_9)} \widehat{h}(\tau) e^{-iq(\tau, a)} e^{i\sqrt{n}(\tau, \gamma)} (P_{\eta}^q(\tau)e)(y) d\tau. \end{aligned}$$

В силу оценки (3.5) леммы 3.1 и непрерывности нормы $\|P_\eta^q(\tau)\|$ легко найти константы $C_{10} > 0$ и $\varkappa_{10} \in (0, 1)$ такие, что для всех $\tau \in \Gamma(b) \setminus \Gamma(\varepsilon_9)$ $\|P_\eta^q(\tau)\| \leq C_{10} \varkappa_{10}^q$. Отсюда получаем, что

$$(3.17) \quad |I_2(n)| \leq (\sqrt{n})^{m-1} C_{10} \varkappa_{10}^q \int_{\Gamma} |\widehat{h}(\tau)| d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

В первом интеграле $I_1(n)$ произведем замену переменных $\tau \rightarrow \frac{\tau}{\sqrt{q}}$:

$$I_1(n) = \int_{\Gamma(\varepsilon_9 \sqrt{n})} \Psi_n(\tau, \gamma) d\tau,$$

где

$$\Psi_n(\tau, \gamma) = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{q}} \right)^{m-1} \widehat{h} \left(\frac{\tau}{\sqrt{q}} \right) e^{i \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{q}}(\tau, \gamma)} e^{-i \sqrt{q}(\tau, a)} \left(P_\eta^q \left(\frac{\tau}{\sqrt{q}} \right) e \right)(y).$$

В силу (3.16) и того, что $\frac{n}{q} \leq \frac{2}{t}$, подынтегральное выражение равномерно по y оценивается сверху интегрируемой функцией:

$$|\Psi_n(\tau, \gamma)| \leq \left(\sqrt{\frac{2}{t}} \right)^{m-1} \sup \{ \widehat{h}(\tau), \tau \in \Gamma(\varepsilon_9) \} C_9 \exp \left\{ -\frac{1}{4}(\tau, D\tau) \right\}.$$

Так как $\frac{n}{q} \rightarrow \frac{1}{t}$ при $n \rightarrow +\infty$ и $\widehat{h}$ — непрерывная функция, из (3.15) следует, что при $n \rightarrow +\infty$

$$\Psi_n(\tau, \gamma) \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{m-1} \widehat{h}(0) e^{i \frac{1}{\sqrt{t}}(\tau, \gamma)} e^{-\frac{1}{2}(\tau, D\tau)}.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_1(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{m-1} \widehat{h}(0) \int_{\Gamma} e^{i \frac{1}{\sqrt{t}}(\tau, \gamma)} e^{-\frac{1}{2}(\tau, D\tau)} d\tau.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\widehat{h}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{m-1} \int_{\Gamma} h(\gamma) d\gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{m-1} m_{\Gamma}(h)$$

и

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{m-1} \int_{\Gamma} e^{i \frac{1}{\sqrt{t}}(\tau, \gamma)} e^{-\frac{1}{2}(\tau, D\tau)} d\tau = (\sqrt{2\pi})^{m-1} \pi_t(\gamma).$$

Все это вместе с оценкой (3.17) доказывает предельное соотношение (3.14).

Пусть теперь $h \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$. Представим h в виде $h = h_1 + ih_2$, где h_1 и h_2 — вещественнозначные функции. Тогда для любого $\delta > 0$ всегда можно найти $h^+ = h_1^+ + ih_2^+$ и $h^- = h_1^- + ih_2^-$ из $\mathcal{H}$ (см. [16]) такие, что для всех $\gamma \in \Gamma$ $h_j^-(\gamma) \leq h_j(\gamma) \leq h_j^+(\gamma)$ и $\int_{\Gamma} |h^+(\gamma) - h^-(\gamma)| d\gamma < \delta$. Из этого сразу вытекает, что (3.14) верно и для всех $h \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$.

Рассмотрим множество $M = \{\gamma \in \Gamma : \gamma_k^- \leq \gamma_k \leq \gamma_k^+, k = 1, \dots, m-1\}$ для некоторых $\gamma^-, \gamma^+ \in \Gamma$ с условием, что $\gamma_k^- < \gamma_k^+$. Для $\delta_0 > 0$ пусть

$$M_1 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma_k^- + \delta_0 \leq \gamma_k \leq \gamma_k^+ - \delta_0\}, \quad M_2 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma_k^- - \delta_0 \leq \gamma_k \leq \gamma_k^+ + \delta_0\}.$$

Выберем произвольное $\delta_0 > 0$ так, чтобы для некоторого $\delta > 0$ $m_\Gamma(M_2 \setminus M_1) < \delta$. Очевидно, что можно построить вещественнозначные функции h_1 и h_2 из $C_0(\Gamma)$ так, чтобы $\chi_{M_1}(\gamma) \leq h_1(\gamma) \leq \chi_M(\gamma) \leq h_2(\gamma) \leq \chi_{M_2}(\gamma)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \pi_t(\gamma)(m_\Gamma(M) - \delta) &\leq \pi_t(\gamma)m_\Gamma(M_1) \leq \pi_t(\gamma)m_\Gamma(h_1) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n})^{m-1} \mathbf{P}_{\eta, y} \{ (f(yg(q)) - aq + \sqrt{n}\gamma) \in M \} \\ &\leq \pi_t(\gamma)m_\Gamma(h_2) \leq \pi_t(\gamma)m_\Gamma(M_2) \leq \pi_t(\gamma)(m_\Gamma(M) + \delta). \end{aligned}$$

Устремляя $\delta \rightarrow 0$, получаем, что для построенного M верно (3.13). Воспользовавшись непрерывностью мер и тем, что все оценки и пределы в доказательстве равномерны по y , нетрудно перейти к произвольному ограниченному множеству $M \subset \Gamma$ и тем самым доказать утверждение теоремы 3.3.

Докажем теперь следствие из теорем 3.2, 3.3, назвать которое можно локально-центральной предельной теоремой для цепей Маркова.

ТЕОРЕМА 3.4. *Предположим, что условия (У1), (У2) выполнены. Тогда для любого $t \in (0, 1)$ для любых измеримых $B \subset \Gamma$ и ограниченного $M \subset \Gamma$*

$$\begin{aligned} (3.18) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n})^{m-1} \mathbf{P}_\eta \left\{ \frac{f(g([nt])) - a[nt]}{\sqrt{n}} \in B, (f(g(n)) - an) \in M \right\} \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{m-1} \frac{1}{\sqrt{d}} m_\Gamma(M) \int_B \pi_{t(1-t)}(\gamma) d\gamma, \end{aligned}$$

где a и D определены по формуле (3.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, зафиксируем $t \in (0, 1)$ и пусть $q = [nt] + 1$. Тогда $n - q = [n(1 - t)]$. Рассмотрим цепь Маркова $\{x_n = (g_n, y_n)\}$ ($y_0 = E$). Обозначим через $\mathcal{X}_n$ σ -алгебру, порожденную первыми n элементами этой последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n$. Напомним, что $S(n) = f(g(n))$. В силу марковости для $\gamma \in \Gamma$ условная вероятность

$$\begin{aligned} (\sqrt{n})^{m-1} \mathbf{P}_\eta \{ (S(n) - an) \in M \mid \mathcal{X}_q, (S(q) - aq) = \sqrt{n}\gamma \} \\ = (\sqrt{n})^{m-1} \mathbf{P}_{\eta, y_q} \{ (S(n - q) - a(n - q) + \sqrt{n}\gamma) \in M \} \end{aligned}$$

как случайная величина зависит только от y_q и в силу теоремы 3.3 асимптотически близка при $n \rightarrow +\infty$ к $m_\Gamma(M) \pi_{1-t}(\gamma)$ равномерно по γ . С другой стороны, в силу

теоремы 3.2 P_η -распределение $\frac{1}{\sqrt{q}}(S(q) - aq)$ слабо сходится при $q \rightarrow +\infty$ к распределению $\mathcal{N}_D$. Так как $\frac{q}{n} \rightarrow t$ при $n \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}}(S(q) - aq)$ слабо сходится к гауссовскому распределению с плотностью $\pi_t(\gamma)$. Суммируя вышесказанное, получаем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n})^{m-1} P_\eta \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}}(S(q) - aq) \in B, (S(n) - an) \in M \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n})^{m-1} \int_B P_\eta \{ (S(n) - an) \in M \mid \mathcal{X}_q, (S(q) - aq) = \sqrt{n}\gamma \} \\ & \quad \times P_\eta \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}}(S(q) - aq) \in d\gamma \right\} \\ &= \int_B \pi_t(\gamma) \pi_{1-t}(\gamma) d\gamma m_\Gamma(M). \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться формулой (3.12), чтобы получить (3.18).

§4. Доказательство центральной и локальной предельных теорем

Как уже было замечено в предыдущем параграфе, при $\eta(g, y) \equiv 1$ P_η совпадает с марковским оператором P , соответствующим μ -блужданию на Y и определенным по формуле (2.1). Нетрудно увидеть, что в этом случае P_η -распределения $S(n)$ как случайных векторов, определенных на $(X^\infty, \mathcal{X}, P_\eta)$, совпадают с распределениями $S(n)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Поэтому в силу теорем 3.2, 3.3 для доказательства теорем 0.2, 0.3 достаточно показать, что при условиях (Г–М) и (И2) операторы $P_\eta(\tau)$ удовлетворяют (У1), (У2). Для удобства в дальнейшем в этом параграфе индекс η будем опускать.

ЛЕММА 4.1. Пусть мера μ удовлетворяет условиям (Г–М) и (И2). Тогда для оператора P выполнено (У1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что $P \in \mathfrak{M}_0$. В силу марковости оператора P очевидно, что для любого натурального n $|P^n| \leq 1$. Поэтому первое условие Ионеску-Тулчи и Маринеску выполнено. Рассмотрим частное при $y \neq \bar{y}$, $\psi \in L(Y)$

$$\begin{aligned} (4.1) \quad & \frac{|(P^n \psi)(y) - (P^n \psi)(\bar{y})|}{\rho(y, \bar{y})} \leq \int_G \frac{|\psi(y(yg)) - \psi(y(\bar{y}g))|}{\rho(y, \bar{y})} \mu^n(dg) \\ & \leq [\psi] \int_G \frac{\rho(y(yg), y(\bar{y}g))}{\rho(y, \bar{y})} \mu^n(dg). \end{aligned}$$

В силу теоремы 2.4 из условий (Г–М) и (И2) вытекает, что найдутся константы $C_6 > 0$ и $\varkappa_6 \in (0, 1)$ такие, что

$$(4.2) \quad \sup_{\substack{y, \bar{y} \in Y \\ y \neq \bar{y}}} \int_G \frac{\rho(y(yg), y(\bar{y}g))}{\rho(y, \bar{y})} \mu^n(dg) \leq C_6 \varkappa_6^n.$$

Следовательно, найдутся натуральное n и число $\varkappa_0 \in (0, 1)$ такие, что $[P^n \psi] \leq \varkappa_0 [\psi]$. Таким образом, $P \in \mathfrak{M}_0$.

Убедимся, что единица является единственным собственным числом оператора P , по модулю равным 1, и при этом простым. Пусть для некоторых $\psi \in \mathbf{L}(Y)$ и $t \in [0, 2\pi)$ $P\psi = e^{it}\psi$. Тогда в силу (4.1), (4.2) $[\psi] = [P^n\psi] \leq [\psi]C_6\kappa_6^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Поэтому $\psi \equiv \text{const}$ и $t = 0$. Таким образом, P удовлетворяет условию (Y1) и лемма 4.1 доказана.

При выполнении условия (Г–М) существует единственная μ -инвариантная вероятностная мера ν на Y : $P^*\nu = \nu$. Сформулируем свойство оператора P , аналогичное свойствам сильно положительных операторов (см. [3, § 6]) и необходимое при доказательстве теоремы 0.4.

ЛЕММА 4.2. *Пусть μ удовлетворяет условиям (Г–М) и (И2). Предположим, что $\psi \in \mathbf{L}(Y)$ – произвольная неотрицательная вещественнозначная функция такая, что $\nu(\psi) > 0$. Тогда существует натуральное n такое, что для всех $y \in Y$ $(P^n\psi)(y) \geq \frac{1}{2}\nu(\psi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 3.1 и 4.1 $|P^n\psi - \nu(\psi)| \leq \|Q^n\psi\| \leq C_8\kappa_8^n\|\psi\|$. Так как $\nu(\psi) > 0$, найдется n такое, что $C_8\kappa_8^n\|\psi\| \leq \frac{1}{2}\nu(\psi)$. Следовательно, $(P^n\psi)(y) \geq \frac{1}{2}\nu(\psi)$.

ЛЕММА 4.3. *Пусть условия (Г–М) и (И2) выполнены. Тогда операторы $P(\tau)$ удовлетворяют условию (Y2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала, что $P(\tau) \in \mathfrak{M}_0$. Первое условие Ионеску-Тулчи и Маринеску, очевидно, выполнено в силу неравенства $|P^n(\tau)| \leq 1$. Для фиксированных y и $\bar{y} \in Y$ для $\psi \in \mathbf{L}(Y)$ представим следующую разность в виде суммы двух интегралов:

$$\begin{aligned} & |(P^n(\tau)\psi)(y) - (P^n(\tau)\psi)(\bar{y})| \\ &= \left| \int_G (e^{i(\tau, f(yg))} \psi(y(yg)) - e^{i(\tau, f(\bar{y}g))} \psi(y(\bar{y}g))) \mu^n(dg) \right| \\ &\leq \int_G |e^{i(\tau, f(yg))} - e^{i(\tau, f(\bar{y}g))}| |\psi(y(yg))| \mu^n(dg) \\ &\quad + \int_G |\psi(y(yg)) - \psi(y(\bar{y}g))| \mu^n(dg) = J_1(n) + J_2(n). \end{aligned}$$

Для $J_1(n)$ имеет место следующая оценка:

$$J_1(n) \leq |\psi| \int_G |e^{i(\tau, f(yg) - f(\bar{y}g))} - 1| \mu^n(dg) = |\psi| \int_G \Psi_\tau(y, \bar{y}, g) \mu^n(dg).$$

Обозначим $t_k = \frac{d_k(yg)}{d_k(\bar{y}g)} - 1$. Тогда

$$e^{i(\tau, f(yg) - f(\bar{y}g))} = \prod_{k=1}^m (1 + t_k)^{i\tau_k}.$$

Пусть α определяется метрикой ρ по формуле (2.16). Нетрудно показать, что если $|t_k|^\alpha \leq \frac{1}{2}$ для всех $k = 1, \dots, m$, то найдется константа $C_0(\tau) > 0$ такая, что

$$(4.3) \quad \left| \prod_{k=1}^m (1 + t_k)^{i\tau_k} - 1 \right| \leq C_0(\tau) \max\{|t_k|^\alpha, k = 1, \dots, m\}.$$

Для фиксированных y и $\bar{y} \in Y$ ($y \neq \bar{y}$) пусть $G_0 = \{g : \rho(y(yg), y(\bar{y}g)) \leq \frac{1}{2(\sqrt{m})^\alpha}\}$. В силу леммы 1.2 для всех $g \in G_0$ $\max\{|t_k|^\alpha, k = 1, \dots, m\} \leq \Phi(y, \bar{y}, g)\rho(y, \bar{y})$, где $\Phi(y, \bar{y}, g) = 2(m^2 Z^\alpha(yg)Z^\alpha(\bar{y}g) + (\sqrt{m})^\alpha)$. Чтобы воспользоваться формулой (4.3), разобьем G_0 на два непересекающихся множества: $G_1 = \{g : \Phi(y, \bar{y}, g)\rho(y, \bar{y}) \leq \frac{1}{2}\}$ и $G_0 \setminus G_1$. Применяя выписанные выше оценки, тот факт, что $\Psi_\tau(y, \bar{y}, g) \leq 2$, и дважды неравенство Чебышёва, находим, что

$$\begin{aligned} \int_G \Psi_\tau(y, \bar{y}, g) \mu^n(dg) &= \int_{G \setminus G_0} \Psi_\tau(y, \bar{y}, g) \mu^n(dg) \\ &\quad + \int_{G_0 \setminus G_1} \Psi_\tau(y, \bar{y}, g) \mu^n(dg) + \int_{G_1} \Psi_\tau(y, \bar{y}, g) \mu^n(dg) \\ &\leq 2\mu^n \left\{ \rho(y(yg), y(\bar{y}g)) \geq \frac{1}{2(\sqrt{m})^\alpha} \right\} + 2\mu^n \left\{ \Phi(y, \bar{y}, g)\rho(y, \bar{y}) \geq \frac{1}{2} \right\} \\ &\quad + C_0(\tau) \int_G \Phi(y, \bar{y}, g)\rho(y, \bar{y}) \mu^n(dg) \\ &\leq 4(\sqrt{m})^\alpha \rho(y, \bar{y}) \int_G \frac{\rho(y(yg), y(\bar{y}g))}{\rho(y, \bar{y})} \mu^n(dg) \\ &\quad + 4\rho(y, \bar{y}) \int_G \Phi(y, \bar{y}, g) \mu^n(dg) + C_0(\tau) \rho(y, \bar{y}) \int_G \Phi(y, \bar{y}, g) \mu^n(dg). \end{aligned}$$

В силу теорем 2.3, 2.4 и условия (2.16) отсюда сразу следует, что существует константа $R_0 > 0$ такая, что для всех $y \neq \bar{y}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$(4.4) \quad J_1(n) \leq R_0 |\psi| \rho(y, \bar{y}).$$

Аналогично доказательству леммы 4.1 оценим $J_2(n)$:

$$J_2(n) \leq \int_G |\psi(y(yg)) - \psi(y(\bar{y}g))| \mu^n(dg) \leq \varkappa_0[\psi] \rho(y, \bar{y})$$

для некоторого натурального n и $\varkappa_0 \in (0, 1)$. Таким образом, найдутся $n \in \mathbb{N}$, $R_0 > 0$ и $\varkappa_0 \in (0, 1)$ такие, что $[P^n(\tau)\psi] \leq \varkappa_0[\psi] + R_0|\psi|$. Следовательно, для любого τ $P(\tau) \in \mathfrak{M}_0$.

Покажем теперь, что при $\tau \neq 0$ $P(\tau)$ не имеет собственных чисел, по модулю равных 1. Предположим, что это не так. Пусть для некоторых $\psi \in \mathbf{L}(Y)$, $\tau \neq 0$, $t \in [0, 2\pi)$ $P(\tau)\psi = e^{it}\psi$. Тогда

$$(4.5) \quad (P^n(\tau)\psi)(y) \equiv \int_G e^{i(\tau, f(yg))} \psi(y(yg)) \mu^n(dg) = e^{int} \psi(y).$$

Пусть y_0 таково, что $|\psi(y_0)| = 1$ и для всех y $|\psi(y)| \leq 1$. Тогда в силу пункта 1) теоремы 0.1 имеем, что при $n \rightarrow +\infty$ $|\psi(y_0)| \leq (P^n |\psi|)(y_0) \rightarrow \nu(|\psi|)$. Отсюда следует, что $|\psi(y)| = 1$ для всех $y \in \text{supp } \nu$. Тогда в силу (4.5) для всех $g \in \text{supp } \mu^n$ и $y \in \text{supp } \nu$

$$(4.6) \quad e^{i(\tau, f(yg))} \psi(y(yg)) = e^{int} \psi(y).$$

Как и при доказательстве леммы 1.3, легко увидеть, что для всех $g \in G$ $yu_1(g)\delta(g) = z(yg)d(yg)u(yg)u_2^T(g)$ (см. формулу (1.14)). Поэтому для всех $k = 1, \dots, m-1$

$$\Delta_k(yu_1(g))\delta_{k+1}(g) \cdots \delta_m(g) = d_{k+1}(yg) \cdots d_m(yg)\Delta_k(u(yg)u_2^T(g)).$$

Отсюда сразу следует, что

$$\Delta_\tau(yu_1(g))\delta_\tau(g) = e^{(\tau, f(yg))} \Delta_\tau(u(yg)u_2^T(g)),$$

где

$$\Delta_\tau(g) = \prod_{k=1}^{m-1} \Delta_k^{\tau_{k+1} - \tau_k}(g), \quad \delta_\tau(g) = \prod_{k=1}^m \delta_k^{\tau_k}(g).$$

Таким образом, из (4.6) вытекает, что для всех $g \in \text{supp } \mu^n$, $y \in \text{supp } \nu$

$$(4.7) \quad \left(\frac{|\Delta_\tau(yu_1(g))| \delta_\tau(g)}{|\Delta_\tau(u(yg)u_2^T(g))|} \right)^i \psi(y(yg)) = e^{int} \psi(y).$$

Согласно лемме 2.1, из условия (Г-М) следует, что из H_μ можно выделить правильную последовательность $\{h_l\}$, для которой μ -инвариантная мера ν является собственной. Поэтому в силу леммы 1.3 $y(yh_l) \rightarrow y(u_2(\{h_l\})) = \bar{y}$ при $l \rightarrow +\infty$ для ν -почти всех y . Обозначим для $g \in H_\mu$ $n(g) = \inf\{n : g \in \text{supp } \mu^n\}$ и перепишем (4.7) в удобном для нас виде

$$\delta_\tau^i(h_l) e^{-in(h_l)t} = \frac{\psi(y)}{\psi(y(yh_l))} \cdot \left| \frac{\Delta_\tau(u(yh_l)u_2^T(h_l))}{\Delta_\tau(yu_1(h_l))} \right|^i.$$

Устремляя теперь l к $+\infty$ и воспользовавшись непрерывностью функций, стоящих в правой части равенства, находим, что существует предел $\lim_{l \rightarrow +\infty} \delta_\tau^i(h_l) e^{-in(h_l)t}$ и он равен для ν -п.в. y отношению $\frac{\psi(y)}{\psi(\bar{y}) |\Delta_\tau(yu)|^i}$, где $u = u_1(\{h_l\})$. Но этот предел, как видно из формулы, не зависит от y . Поэтому для некоторой вещественной константы α для всех $y \in \text{supp } \nu$ $\psi(y) = e^{i\alpha} |\Delta_\tau(yu)|^i$. Подставляя это соотношение в (4.6) и воспользовавшись очевидным равенством $\Delta_\tau(ygu) = e^{(\tau, f(yg))} \Delta_\tau(y(yg)u)$, получаем, что для всех $y \in \text{supp } \nu$ и $g \in H_\mu$

$$(4.8) \quad |\Delta_\tau(ygu)|^i = e^{in(g)t} |\Delta_\tau(yu)|^i.$$

Рассмотрим теперь Y как гладкое многообразие размерности $L = \frac{m(m-1)}{2}$. В качестве координат $y^{(1)}, \dots, y^{(L)}$ возьмем элементы матрицы y , стоящие под главной диагональю. Для произвольных $y \in Y, g \in G, k \in \mathbb{Z}, \sigma = \pm 1$ обозначим

$$\varphi(y, k, g, \sigma) = \Delta_\tau(ygu) + \sigma e^{n(g)t + 2\pi k} \Delta_\tau(yu).$$

Пусть $\tilde{Y} = \bigcup_{l=1}^{m-1} \{y : \Delta_l(yu) = 0\}$ и $Y_{k,\sigma}(g) = \{y : \varphi(y, k, g, \sigma) = 0\}$. Возьмем произвольную матрицу g и рассмотрим частную производную $\frac{\partial}{\partial y^{(j)}} \Delta_\tau(yg)$. Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial}{\partial y^{(j)}} \Delta_\tau(yg) = \Delta_\tau(yg) \sum_{l=1}^{m-1} (\tau_{l+1} - \tau_l) \frac{P_{j,l}(y, g)}{\Delta_l(yg)},$$

где $P_{j,l}(y, g) = \frac{\partial}{\partial y^{(j)}} \Delta_l(yg)$ — полином от элементов матрицы g . Тогда для всех $y \notin \tilde{Y}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(j)}}(y, k, g, \sigma) = \Delta_\tau(ygu) r_j(y, g),$$

причем $r_j(y, g)$ — рациональная функция от g . Так как алгебраическое замыкание H_μ совпадает с G и $\tau \neq 0$, найдутся матрицы $g_1, \dots, g_L$ такие, что для любых $\vec{k} = (k_1, \dots, k_L) \in \mathbb{Z}^L$ и $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_L) \in \{\pm 1\}^L$ для всякого $y \in Y_{\vec{k}, \vec{\sigma}}(g_1, \dots, g_L) = (\bigcap_{s=1}^L Y_{k_s, \sigma_s}(g_s)) \setminus \tilde{Y}$ (если такое y существует) определитель матрицы $\{r_j(y, g_s)\}$ не равен нулю. В силу того, что $y \notin \tilde{Y}$ и $y \in Y_{k_s, \sigma_s}(g_s)$, $\Delta_\tau(yg_s u) \neq 0$. Это означает, что якобиан $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(j)}}(y, g_s, k_s, \sigma_s) \right|$ также отличен от нуля. Следовательно, для всех $\vec{k}$ и $\vec{\sigma}$ $Y_{\vec{k}, \vec{\sigma}}(g_1, \dots, g_L)$ — дискретное множество. Таким образом,

$$\tilde{Y}_1 = \bigcup_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^L, \vec{\sigma} \in \{\pm 1\}^L} Y_{\vec{k}, \vec{\sigma}}(g_1, \dots, g_L)$$

является объединением не более чем счетного числа точек многообразия Y . Так как $\tilde{Y} \subset Y_0 u$ (определение Y_0 см. в пункте 1.4) и любая точка пространства Y принадлежит подмногообразию вида $Y_0 \tilde{u}$, $\tilde{Y} \cup \tilde{Y}_1$ вложено в счетное объединение подмногообразий вида $Y_0 \tilde{u}$. Но при доказательстве леммы 2.1 было показано, что для любой ортогональной матрицы $\tilde{u}$ $\nu(Y_0 \tilde{u}) = 0$. Из этого следует, что $\nu(\tilde{Y} \cup \tilde{Y}_1) = 0$. С другой стороны, в силу (4.8) из определения множеств $Y_{k,\sigma}(g)$ и функций φ легко получить, что $\text{supp } \nu \subset \tilde{Y} \cup \tilde{Y}_1$. Получили противоречие. Таким образом, при $\tau \neq 0$ $P(\tau)$ не имеет собственных чисел, по модулю равных 1. Лемма 4.3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 0.2 и 0.3. Из лемм 4.1 и 4.3 вытекает, что операторы $P(\tau)$ удовлетворяют условиям (У1), (У2). Следовательно, к ним применимы теоремы 3.2, 3.3. Теорема 0.2 есть частный случай теоремы 3.2, когда $y = E$, $D = \sigma^2$, $B_2 = Y$. Полагая в формулировке теоремы 3.3 $\gamma = 0$, $y = E$, $t = 1$ и воспользовавшись формулой (3.12), получаем утверждение теоремы 0.3.

§ 5. Доказательство условной предельной теоремы

1. Свойства оператора K_β . Для $\beta \in \Gamma$ введем оператор K_β , заданный по формуле: для $\psi \in C(Y)$

$$(K_\beta \psi)(y) = \int_G e^{(\beta, f(yg))} \psi(y(yg)) \mu(dg).$$

Заметим, что в силу (2.1) при $\beta = 0$ $K_\beta = P$. Аналогично (2.2) нетрудно показать, что

$$(K_\beta^n \psi)(y) = \int_G e^{(\beta, f(yg))} \psi(y(yg)) \mu^n(dg).$$

ЛЕММА 5.1. Пусть выполнены условия (Г–М) и (ОГ). Тогда для любого $\beta \in \Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_m\}$ у оператора K_β существуют положительное собственное число λ_β и соответствующая ему положительная собственная функция $h_\beta \in L(Y)$ с условием $h_\beta(E) = 1 : K_\beta h_\beta = \lambda_\beta h_\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на $C(Y)$ следующий оператор:

$$(K_\beta(g) \psi)(y) = e^{(\beta, f(yg))} \psi(y(yg)) = \prod_{k=1}^m (d_k(yg))^{\beta_k} \psi(y(yg)).$$

Тогда $K_\beta = \int_G K_\beta(g) \mu(dg)$. Обозначим $\tilde{K}_\beta = \int_G K_\beta(g^T) \mu(dg)$. Тогда сопряженные им операторы определяются по формулам

$$\begin{aligned} (K_\beta^* \nu)(B) &= \int_Y e^{(\beta, f(yg))} \chi_B(y(yg)) \nu(dy), \\ (\tilde{K}_\beta^* \nu)(B) &= \int_G (K_\beta^*(g^T) \nu)(B) \mu(dg). \end{aligned}$$

Так как $\exp\{(\beta, f(yg))\} > 0$ для любых y, g , то для любой меры ν на Y

$$(\tilde{K}_\beta^* \nu)(Y) = \int_G \int_Y e^{(\beta, f(yg^T))} \mu(dg) \nu(dy) > 0.$$

Поэтому можно определить непрерывный (в слабой топологии) нелинейный оператор T_β на пространстве вероятностных мер на Y :

$$T_\beta \nu = \frac{\tilde{K}_\beta^* \nu}{(\tilde{K}_\beta^* \nu)(Y)}.$$

В силу компактности Y пространство вероятностных мер на Y компактно в слабой топологии и сохраняется под действием оператора T_β . Из теоремы Тихонова–Шаудера найдется неподвижная точка $\tilde{\nu}_\beta$ оператора T_β : $T_\beta \tilde{\nu}_\beta = \tilde{\nu}_\beta$. Полагая $\lambda_\beta = (\tilde{K}_\beta^* \tilde{\nu}_\beta)(Y) > 0$, находим, что

$$(5.1) \quad \tilde{K}_\beta^* \tilde{\nu}_\beta = \lambda_\beta \tilde{\nu}_\beta.$$

Обозначим для произвольного $\beta \in \Gamma_0$

$$\psi_\beta(g) = \prod_{k=1}^{m-1} |\Delta_k^{(u)}(g)|^{\beta_k - \beta_{k+1}},$$

где $\Delta_k^{(u)}(g)$ – минор матрицы g , составленный из первых (в отличие от $\Delta_k(g)$) k строк и k столбцов этой матрицы. Для произвольной вероятностной меры $\overline{\nu}$ на Y определим функцию на пространстве Y :

$$(\psi_\beta * \overline{\nu})(y) = \int_Y \psi_\beta(y y_0^T) \overline{\nu}(dy_0).$$

Нетрудно убедиться, что в силу условия $\beta \in \Gamma_0$, $\psi_\beta \in \mathbf{L}(Y)$, а значит, и $(\psi_\beta * \overline{\nu}) \in \mathbf{L}(Y)$.

Покажем теперь, что для любых $g \in G$ и $\beta \in \Gamma_0$

$$(5.2) \quad \psi_\beta * (K_\beta^*(g^T) \overline{\nu}) = K_\beta(g) (\psi_\beta * \overline{\nu}).$$

Для этого воспользуемся разложением Ивасава и очевидными свойствами миноров $\Delta_k^{(u)}$. С одной стороны,

$$|\Delta_k^{(u)}(y g y_0^T)| = |\Delta_k^{(u)}(z(yg) d(yg) u(yg) y_0^T)| = d_1(yg) \cdots d_k(yg) |\Delta_k^{(u)}(y(yg) y_0^T)|.$$

Отсюда следует, что

$$(5.3) \quad \psi_\beta(y g y_0^T) = \prod_{k=1}^m (d_k(yg))^{\beta_k} \psi_\beta(y(yg) y_0^T) = e^{(\beta, f(yg))} \psi_\beta(y(yg) y_0^T).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} |\Delta_k^{(u)}(y g y_0^T)| &= |\Delta_k^{(u)}(y(y_0 g^T)^T)| = |\Delta_k^{(u)}(y u^T(y_0 g^T) d(y_0 g^T) z^T(y_0 g^T))| \\ &= d_1(y_0 g^T) \cdots d_k(y_0 g^T) |\Delta_k^{(u)}(y y^T(y_0 g^T))|. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему

$$(5.4) \quad \psi_\beta(y g y_0^T) = e^{(\beta, f(y_0 g^T))} \psi_\beta(y y^T(y_0 g^T)).$$

Проинтегрируем по y_0 по мере $\overline{\nu}$ равенства (5.3), (5.4):

$$\begin{aligned} K_\beta(g) (\psi_\beta * \overline{\nu})(y) &= e^{(\beta, f(yg))} \int_Y \psi_\beta(y(yg) y_0^T) \overline{\nu}(dy_0) \\ &= \int_Y \psi_\beta(y g y_0^T) \overline{\nu}(dy_0) = \int_Y e^{(\beta, f(y_0 g^T))} \psi_\beta(y y^T(y_0 g^T)) \overline{\nu}(dy_0) \\ &= \int_Y \psi_\beta(y \overline{y}^T) (K_\beta^*(g^T) \overline{\nu})(d\overline{y}) = \psi_\beta * (K_\beta^*(g^T) \overline{\nu})(y). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (5.2) доказано.

Убедимся, что $\tilde{h}_\beta(y) = (\psi_\beta * \tilde{\nu}_\beta)(y)$ и есть собственная функция оператора K_β . Действительно, проинтегрировав (5.2) по мере μ , положив $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_\beta$ и воспользовавшись (5.1), получаем

$$K_\beta \tilde{h}_\beta = K_\beta(\psi_\beta * \tilde{\nu}_\beta) = \psi_\beta * (\tilde{K}_\beta^* \tilde{\nu}_\beta) = \lambda_\beta(\psi_\beta * \tilde{\nu}_\beta) = \lambda_\beta \tilde{h}_\beta.$$

Чтобы доказать положительность $\tilde{h}_\beta$, рассмотрим сначала $\nu(\tilde{h}_\beta) = \int_Y \tilde{h}_\beta(y) \nu(dy)$, где ν – единственная μ -инвариантная мера на Y (теорема 0.1). Заметим, что в силу построения $\psi_\beta(y) \geq 0$ для всех $y \in Y$. Поэтому если $\int_Y \psi_\beta(y y_0^T) \nu(dy) = 0$, то $\psi_\beta(y y_0^T) = 0$ для ν -почти всех y . Следовательно, в этом случае для каждого фиксированного y_0 $\nu\{y: \text{найдется } k \mid \Delta_k^{(u)}(y y_0^T) = 0\} = 1$. Это означает, что μ -инвариантная мера ν сосредоточена на алгебраическом подмногообразии пространства Y . Аналогично доказательству леммы 2.1 нетрудно показать, что это противоречит условию (Г–М). Таким образом, для каждого y_0 $\int_Y \psi_\beta(y y_0^T) \nu(dy) > 0$. Следовательно,

$$\nu(\tilde{h}_\beta) = \int_Y \tilde{\nu}_\beta(dy_0) \int_Y \psi_\beta(y y_0^T) \nu(dy) > 0.$$

Из условия (Ог) вытекает, что существует $\inf\{e^{(\beta, f(yg))}, y \in Y, g \in \text{supp } \mu\} = \varepsilon_\beta > 0$. Поэтому в силу леммы 4.2 существует натуральное n такое, что для всех $y \in Y$

$$(K_\beta^n \tilde{h}_\beta)(y) \geq \varepsilon_\beta^n (P^n \tilde{h}_\beta)(y) \geq \varepsilon_\beta^n \frac{1}{2} \nu(\tilde{h}_\beta) > 0.$$

С другой стороны, $(K_\beta^n \tilde{h}_\beta)(y) = \lambda_\beta^n \tilde{h}_\beta(y)$. Следовательно, $\tilde{h}_\beta(y) > 0$ для всех $y \in Y$. Полагая $h_\beta(y) = \frac{\tilde{h}_\beta(y)}{\tilde{h}_\beta(E)}$, получаем утверждение леммы 5.1.

2. Свойства операторов $P_\beta(\tau)$. Обозначим через $\eta_\beta^{(n)}(g, y)$ следующую функцию:

$$\eta_\beta^{(n)}(g, y) = \frac{e^{(\beta, f(yg))} h_\beta(y(yg))}{\lambda_\beta^n h_\beta(y)}.$$

В силу леммы 5.1, $\eta_\beta^{(1)}(g, y)$ корректно определена и удовлетворяет условиям $\eta 1)–\eta 3)$ (см. пункт 3.2). Таким образом, функция $\eta_\beta^{(1)}$ определяет вероятностные распределения $P_{\eta_\beta^{(1)}, y}$ на $(X^\infty, \mathcal{X})$ и операторы $P_{\eta_\beta^{(1)}}(\tau)$. Для удобства в дальнейшем в индексах вместо $\eta_\beta^{(1)}$ будем писать просто β . Индукцией по n , пользуясь тем, что $y(yg)$ – действие G на Y и $f(yg)$ – А-кошикл, нетрудно показать, что n -я степень оператора $P_\beta(\tau)$ определяется по формуле

$$(5.5) \quad (P_\beta^n(\tau) \psi)(y) = \int_G e^{i(\tau, f(yg))} \eta_\beta^{(n)}(g, y) \psi(y(yg)) \mu^n(dg).$$

Заметим, что при $\beta = 0$ $\eta_\beta^{(n)} = 1$ и к $P_\beta(\tau)$ применимы результаты § 4. Чтобы использовать предельные теоремы, доказанные в § 3, нам понадобятся следующие две леммы.

ЛЕММА 5.2. Пусть условия (Г-М) и (Ог) выполнены. Тогда для всех $\beta \in \Gamma_0$ P_β удовлетворяет условию (У1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко увидеть, что для всех $n \in \mathbb{N}$ $|P_\beta^n| \leq 1$. Действительно, для $\psi \in C(Y)$ $|P_\beta^n \psi| \leq |\psi| \int_G \eta_\beta^{(n)}(g, y) \mu^n(dg) = |\psi|$. Таким образом, первое условие Ионеску-Тулъчи и Маринеску выполнено. Прежде, чем доказать второе условие, покажем, что функция h_β обладает следующим свойством: для любого $\beta \in \Gamma_0$ найдется константа $C(\beta) > 0$ такая, что для всех натуральных n

$$(5.6) \quad \int_G |e^{(\beta, f(yg))} h_\beta(y(yg)) - e^{(\beta, f(\overline{y}g))} h_\beta(y(\overline{y}g))| \mu^n(dg) \leq \lambda_\beta^n C(\beta) \rho(y, \overline{y}).$$

Для этого рассмотрим меру $K_\beta^*(g^T) \tilde{\nu}_\beta$ на Y , где $\tilde{\nu}_\beta$ и $K_\beta(g^T)$ определены при доказательстве леммы 5.1. Тогда для ψ_β , введенном там же, в силу (5.2)

$$\begin{aligned} (\psi_\beta * (K_\beta^*(g^T) \tilde{\nu}_\beta))(y) &= \int_Y \psi_\beta(y y_0^T) (K_\beta^*(g^T) \tilde{\nu}_\beta)(dy_0) \\ &= e^{(\beta, f(yg))} h_\beta(y(yg)) \tilde{h}_\beta(E). \end{aligned}$$

Поэтому, полагая $C(\beta) = [\psi_\beta](\tilde{h}_\beta(E))^{-1}$, находим, что

$$\begin{aligned} &|e^{(\beta, f(yg))} h_\beta(y(yg)) - e^{(\beta, f(\overline{y}g))} h_\beta(y(\overline{y}g))| \\ &= (\tilde{h}_\beta(E))^{-1} \left| \int_Y (\psi_\beta(y y_0^T) - \psi_\beta(\overline{y} y_0^T)) (K_\beta^*(g^T) \tilde{\nu}_\beta)(dy_0) \right| \\ &\leq C(\beta) \rho(y, \overline{y}) (K_\beta^*(g^T) \tilde{\nu}_\beta)(Y). \end{aligned}$$

Проинтегрировав последнее неравенство по g и воспользовавшись (5.1), получаем неравенство (5.6). Для $\psi \in L(Y)$ оценим суммой трех интегралов выражение

$$\begin{aligned} &|(P_\beta^n \psi)(y) - (P_\beta^n \psi)(\overline{y})| \leq \int_G \eta_\beta^{(n)}(g, y) |\psi(y(yg)) - \psi(y(\overline{y}g))| \mu^n(dg) \\ &+ \int_G \frac{e^{(\beta, f(yg))} h_\beta(y(yg))}{\lambda_\beta^n} \left| \frac{1}{h_\beta(y)} - \frac{1}{h_\beta(\overline{y})} \right| \cdot |\psi(y(\overline{y}g))| \mu^n(dg) \\ &+ \int_G |e^{(\beta, f(yg))} h_\beta(y(yg)) - e^{(\beta, f(\overline{y}g))} h_\beta(y(\overline{y}g))| \frac{|\psi(y(\overline{y}g))|}{\lambda_\beta^n h_\beta(\overline{y})} \mu^n(dg) \\ &= I_1(n) + I_2(n) + I_3(n). \end{aligned}$$

Произведем оценку сверху каждого интеграла в отдельности. В силу непрерывности и положительности h_β существуют $c_1 = \inf \{h_\beta(y), y \in Y\}$ и $c_2 = \sup \{h_\beta(y), y \in Y\}$. Поэтому

$$I_1(n) \leq \frac{c_2}{c_1} [\psi] \rho(y, \overline{y}) \int_G \frac{e^{(\beta, f(yg))}}{\lambda_\beta^n} \cdot \frac{\rho(y(yg), y(\overline{y}g))}{\rho(y, \overline{y})} \mu^n(dg).$$

В силу теоремы 0.2 при фиксированных y и $\bar{y}$ ($y \neq \bar{y}$) $e^{(\beta, f(yg))}$ и $\rho(y(yg), y(\bar{y}g))$ асимптотически μ^n -независимы при $n \rightarrow +\infty$. Из леммы 5.1 вытекает, что

$$\int_G \frac{e^{(\beta, f(yg))}}{\lambda_\beta^n} \mu^n(dg) \leq \frac{1}{c_1 \lambda_\beta^n} \int_G e^{(\beta, f(yg))} h_\beta(y(yg)) \mu^n(dg) \leq \frac{h_\beta(y)}{c_1} \leq \frac{c_2}{c_1}.$$

Воспользовавшись теоремой 2.4, отсюда получаем, что при малых $\delta > 0$ и при достаточно больших n

$$I_1(n) \leq \frac{c_2}{c_1} [\psi] \rho(y, \bar{y}) \left(\frac{c_2}{c_1} C_6 \varkappa_6^n + \delta \right).$$

Из этого неравенства следует, что найдутся натуральное n и константа $\varkappa_0 \in (0, 1)$ такие, что для всех $y \neq \bar{y}$

$$(5.7) \quad I_1(n) \leq \varkappa_0 [\psi] \rho(y, \bar{y}).$$

Применяя лемму 5.1 и тот факт, что $h_\beta \in \mathbf{L}(Y)$, получаем оценку второго слагаемого:

$$(5.8) \quad I_2(n) \leq \frac{[h_\beta]}{c_1} |\psi| \rho(y, \bar{y}).$$

Оценка $I_3(n)$ очевидно следует из формулы (5.6):

$$(5.9) \quad I_3(n) \leq \frac{C(\beta)}{c_1} |\psi| \rho(y, \bar{y}).$$

Суммируя полученные неравенства и произведя необходимые операции, получаем, что для $C_0 = c_1^{-1}([h_\beta] + C(\beta))$ и для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $\varkappa_0 \in (0, 1)$ $[P_\beta^n \psi] \leq \varkappa_0 [\psi] + C_0 |\psi|$. Последнее означает, что второе условие Ионеску–Тульчи и Маринеску выполнено, и значит, $P_\beta \in \mathfrak{M}_0$.

Пусть $\psi \in \mathbf{L}(Y)$ – вещественнозначная неотрицательная функция с условием $\nu(\psi) > 0$. Обозначим $\varepsilon_\beta = \sup \{ \exp\{(\beta, f(yg))\}, y \in Y, g \in \text{supp } \mu \}$. В силу условия (Or) и непрерывности $\exp\{(\beta, f(yg))\}$ $\varepsilon_\beta < +\infty$. Из леммы 4.2 легко получить, что существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$(P_\beta^{n_0} \psi)(y) \geq \left(\frac{\varepsilon_\beta}{\lambda_\beta} \right)^{n_0} \frac{c_1}{c_2} (P^{n_0} \psi)(y) \geq \left(\frac{\varepsilon_\beta}{\lambda_\beta} \right)^{n_0} \frac{c_1}{c_2} \frac{1}{2} \nu(\psi) = \delta_0 > 0.$$

Так как P_β – положительный оператор, сохраняющий тождественную константу $\delta_0 e$ (здесь $e(y) \equiv 1$), то $(P_\beta^n (P_\beta^{n_0} \psi - \delta_0 e))(y) = (P_\beta^{n+n_0} \psi)(y) - \delta_0 e(y) \geq 0$. Это означает, что для всех $n \geq n_0$ и $y \in Y$

$$(5.10) \quad (P_\beta^n \psi)(y) \geq \delta_0 > 0.$$

Опираясь на это утверждение и пользуясь методами, аналогичными методам М.Г. Крейна, М.А. Рутмана [3, § 6.3], убедимся, что единица является единственным собственным числом оператора P_β , по модулю равным 1, и при этом простым.

Пусть это не так: для некоторого $\psi \in \mathbf{L}(Y)$ ($\psi \neq \text{const}$) $P_\beta \psi = e^{it} \psi$ ($t \in [0, 2\pi)$). Рассмотрим вначале случай, когда $t \neq 0$. Пусть $\psi = \psi_1 + i\psi_2$. Выберем константы R_1 и R_2 так, чтобы $\tilde{\psi}(y) = 1 - R_1\psi_1(y) - R_2\psi_2(y) \geq 0$ для всех $y \in Y$, а для некоторого y_0 $\tilde{\psi}(y_0) = 0$ и $\nu(\tilde{\psi}) > 0$. В силу непрерывности ψ_1 и ψ_2 это всегда можно сделать. Тогда из неравенства (5.10) вытекает, что при достаточно больших n $(P_\beta^n \tilde{\psi})(y_0) \geq \delta_0$. С другой стороны, в силу $t \neq 0$ найдется последовательность $\{n_k\}$ такая, что $\cos n_k t \rightarrow 1$, $\sin n_k t \rightarrow 0$ при $n_k \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\begin{aligned} (P_\beta^{n_k} \tilde{\psi})(y_0) &= 1 - (P_\beta^{n_k} (R_1\psi_1 + R_2\psi_2))(y_0) \\ &= 1 - (R_1 \cos n_k t + R_2 \sin n_k t)\psi_1(y_0) - (-R_1 \sin n_k t + R_2 \cos n_k t)\psi_2(y_0) \\ &\rightarrow 1 - R_1\psi_1(y_0) - R_2\psi_2(y_0) = \tilde{\psi}(y_0) = 0 \quad \text{при } n_k \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (5.10). Поэтому при $t \neq 0$ e^{it} не является собственным числом оператора P_β .

Пусть теперь вещественнозначная функция ψ такова, что $P_\beta \psi = \psi$ и $\psi \neq \text{const}$. В силу непрерывности ψ можно найти константу R так, чтобы $\tilde{\psi}(y) = 1 - R\psi(y) \geq 0$ для всех $y \in Y$, для некоторого y_0 $\tilde{\psi}(y_0) = 0$ и $\nu(\tilde{\psi}) > 0$. Тогда ψ является также собственной функцией и $(P_\beta^n \tilde{\psi})(y_0) = 0$. Последнее противоречит (5.10). Таким образом, единица – простое собственное число оператора P_β . Лемма 5.2 доказана.

ЛЕММА 5.3. Пусть условия (Г–М) и (Ог) выполнены. Тогда для всех $\beta \in \Gamma_0$ и $\tau \in \Gamma$ ($\tau \neq 0$) $P_\beta(\tau)$ удовлетворяет условию (У2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое условие Ионеску-Тульчи и Маринеску выполнено в силу $|P_\beta^n(\tau)| \leq 1$. Из задания интегралов $I_1(n)$, $I_2(n)$, $I_3(n)$ (см. доказательство предыдущей леммы) имеем:

$$\begin{aligned} & |(P_\beta^n(\tau)\psi)(y) - (P_\beta^n(\tau)\psi)(\bar{y})| \\ & \leq I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + \int_G |e^{i(\tau, f(yg) - f(\bar{y}g))} - 1| \eta_\beta^{(n)}(g, y) |\psi(y(yg))| \mu^n(dg). \end{aligned}$$

Нетрудно увидеть, что $\eta_\beta^{(n)}(g, y) \leq \left(\frac{\varepsilon_\beta}{\lambda_\beta}\right)^n \frac{c_2}{c_1}$ для $g \in \text{supp } \mu^n$, $y \in Y$. Поэтому последний интеграл не больше $\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\lambda_\beta}\right)^n \frac{c_1}{c_2} J_1(n)$, где интеграл $J_1(n)$ определен при доказательстве леммы 4.3. В силу (4.4) и неравенств (5.7)–(5.9), полагая $C_0 = \frac{[h_\beta] + C(\beta)}{c_1} + R_0$, найдутся $n \in \mathbb{N}$ и $\varkappa_0 \in (0, 1)$ такие, что для всех ψ $[P_\beta^n(\tau)\psi] \leq \varkappa_0[\psi] + C_0|\psi|$. Таким образом, $P_\beta(\tau) \in \mathfrak{M}_0$.

Осталось доказать, что при $\tau \neq 0$ $P_\beta(\tau)$ не имеет собственных чисел, по модулю равных 1. Предположим противное. Пусть для некоторых $\psi \in \mathbf{L}(Y)$, $\tau \in \Gamma$, $t \in [0, 2\pi)$ $P_\beta(\tau)\psi = e^{it}\psi$. Отсюда вытекает, что

$$(P_\beta^n(\tau)\psi)(y) = \int_G e^{i(\tau, f(yg))} \eta_\beta^{(n)}(g, y) \psi(y(yg)) \mu^n(dg) = e^{int} \psi(y).$$

Повторяя рассуждения доказательства леммы 4.3, нетрудно получить, что это равенство противоречит условию (Г–М). Лемма 5.3 доказана.

3. Критический случай. В силу лемм 5.2, 5.3 из теоремы 3.2 вытекает, что для каждого $\beta \in \Gamma_0$ существуют вектор $a(\beta) \in \Gamma$ и матрица ковариации $D(\beta)$ невырожденного распределения на Γ такие, что P_β -распределения $S(n)$ асимптотически близки при $n \rightarrow +\infty$ к гауссовскому с параметрами $(na(\beta), nD(\beta))$. При доказательстве теоремы 0.4 нас будет интересовать так называемый критический случай, когда $a(\beta) = 0$, т.е. когда линейного сноса $S(n)$ нет.

ЛЕММА 5.4. Пусть μ удовлетворяет условиям $(\Gamma-M)$ и $(O\Gamma)$. Тогда существует единственное $\beta \in \Gamma_0$, для которого $a(\beta) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\psi(\beta) = \ln \lambda_\beta$, где λ_β определено в лемме 5.1. Обозначим

$$\Lambda_n(\beta) = \int_G e^{(\beta, f(yg))} \mu^n(dg) = E e^{(\beta, S(n))}, \quad \psi_n(\beta) = \frac{1}{n} \ln \Lambda_n(\beta).$$

В силу задания $\eta_\beta^{(n)}(g, y)$ имеем, что

$$(5.11) \quad e^{(\beta, f(yg))} = \lambda_\beta^n h_\beta^{-1}(y(g)) \eta_\beta^{(n)}(g, E).$$

Поэтому $\Lambda_n(\beta) = \lambda_\beta^n E_\beta h_\beta^{-1}(y(g(n)))$ и $\psi_n(\beta) = \ln \lambda_\beta + \frac{1}{n} E_\beta h_\beta^{-1}(y_n) \rightarrow \psi(\beta)$ при $n \rightarrow +\infty$. К тому же

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial \beta_k}(\beta) = \frac{1}{n} \Lambda_n^{-1}(\beta) E(S_k(n) e^{(\beta, S(n))})$$

и

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \beta_k \partial \beta_j}(\beta) = \frac{1}{n} \left(\frac{E(S_k(n) S_j(n) e^{(\beta, S(n))})}{\Lambda_n(\beta)} - \frac{E(S_k(n) e^{(\beta, S(n))}) E(S_j(n) e^{(\beta, S(n))})}{\Lambda_n^2(\beta)} \right).$$

Из (5.11) легко увидеть, что $E(S_k(n) e^{(\beta, S(n))}) = \lambda_\beta^n E_\beta(S_k(n) h_\beta^{-1}(y_n))$. Из полученных формул и теоремы 3.2 вытекает, что

$$\begin{aligned} a_k(\beta) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E_\beta S_k(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{E_\beta(S_k(n) h_\beta^{-1}(y_n))}{E_\beta h_\beta^{-1}(y_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(S_k(n) e^{(\beta, S(n))})}{n \Lambda_n(\beta)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial \psi_n}{\partial \beta_k}(\beta). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$D_{kj}(\beta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \beta_k \partial \beta_j}(\beta).$$

Но из условия $(O\Gamma)$ следует, что

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial \beta_k}(\beta) = \frac{E(S_k(n) e^{(\beta, S(n))})}{n \Lambda_n(\beta)}$$

равномерно по n ограничены и, кроме того, на любом компакте из Γ_0 равномерно непрерывны по β . Поэтому

$$a_k(\beta) = \frac{\partial \psi}{\partial \beta_k}(\beta), \quad D_{kj}(\beta) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta_k \partial \beta_j}(\beta).$$

Таким образом, $\psi(\beta)$ есть дважды дифференцируемая функция на Γ_0 , причем матрица вторых производных положительно определена, так как $D(\beta)$ – матрица ковариации невырожденного распределения на Γ . Следовательно, $\psi(\beta)$ – строго выпуклая вниз функция.

Произведем замену переменных $t_k = \beta_k - \beta_{k+1}$, $k = 1, \dots, m-1$. Тогда $\psi(\beta) = \bar{\psi}(t)$ есть функция от $t = (t_1, \dots, t_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Функция $\bar{\psi}(t)$ также является дважды дифференцируемой на $\mathbb{R}_+^{m-1} = \{t \in \mathbb{R}^{m-1} : t_k \geq 0\}$ и строго выпуклой вниз функцией. Очевидными преобразованиями легко убедиться, что для всех $t \in \mathbb{R}_+^{m-1}$, $k = 1, \dots, m-1$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t_k}(t) = a_1(t) + \dots + a_k(t).$$

В силу теоремы 0.1 при $t = 0$ $a_m(t) > 0$. Поэтому для любого $k = 1, \dots, m-1$ $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t_k}(0) < 0$. Зафиксируем $t_1 = 0, \dots, t_{m-2} = 0$. Так как t_{m-1} меняется от 0 до $+\infty$, найдется $\bar{t}_{m-1}$ такое, что $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t_{m-1}}(0, \dots, 0, \bar{t}_{m-1}) = 0$. Продолжая аналогичные рассуждения последовательно для каждой переменной t_k , получаем, что найдется $\bar{t} = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}$ такое, что $\frac{\partial \bar{\psi}(\bar{t})}{\partial t_k} = 0$ для всех $k = 1, \dots, m-1$. Таким образом, существует $\bar{\beta} \in \Gamma_0$, для которого $a(\bar{\beta}) = 0$. Единственность $\bar{\beta}$ вытекает из строгой выпуклости функции $\psi(\beta)$. Лемма доказана.

4. Доказательство условной предельной теоремы. Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 0.4. Зафиксируем $\beta \in \Gamma_0$, для которого $a(\beta) = 0$. Обозначим $D = D(\beta)$. Для фиксированного $t \in (0, 1)$ пусть $q = [nt]$. Выберем произвольные измеримые множества B и $M \subset \Gamma$, причем M ограничено. Обозначим события $A_n = \{S(n) \in M\}$, $C_n = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}S(q) \in B\right\}$. В силу лемм 5.2, 5.3 и теоремы 3.3 находим, что при $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} P_\beta(A_n) &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{m-1} m_\Gamma(M) \pi_1(0) + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{m-1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right)^{m-1} \frac{1}{\sqrt{d}} m_\Gamma(M) + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{m-1}\right). \end{aligned}$$

С другой стороны, леммы 5.2, 5.3 позволяют применить локально-центральную предельную теорему 3.4, согласно которой при $n \rightarrow +\infty$

$$P_\beta(A_n C_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right)^{m-1} \frac{1}{\sqrt{d}} m_\Gamma(M) \int_B \pi_{t(1-t)}(\gamma) d\gamma + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{m-1}\right).$$

Из полученных предельных соотношений сразу вытекает, что при $n \rightarrow +\infty$

$$(5.12) \quad \mathbf{P}_\beta(C_n \mid A_n) = \frac{\mathbf{P}_\beta(A_n C_n)}{\mathbf{P}_\beta(A_n)} = \mathcal{N}_{t(1-t)\mathbf{D}}(B) + o(1).$$

Из теоремы 3.2 находим, что случайные величины $S(n) = f(g(n))$ и $y_n = y(g(n))$ асимптотически независимы при $n \rightarrow +\infty$ относительно $\mathbf{P}_\beta$. Поэтому при $n \rightarrow +\infty$

$$\mathbf{P}_\beta(C_n \mid A_n) = \frac{\mathbf{E}_\beta(\chi_{A_n} \chi_{C_n} h_\beta^{-1}(y_n))}{\mathbf{E}_\beta(\chi_{A_n} h_\beta^{-1}(y_n))} + o(1) = R(n) + o(1),$$

где χ_C — индикатор события C . В силу (5.12) получаем, что

$$(5.13) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} R(n) = \mathcal{N}_{t(1-t)\mathbf{D}}(B).$$

Обозначим $c_1(M) = \min\{e^{(\beta, \gamma)}, \gamma \in M\}$, $c_2(M) = \max\{e^{(\beta, \gamma)}, \gamma \in M\}$. Из (5.11) вытекает, что для любой случайной величины ξ , определенной на $(X^\infty, \mathcal{X})$, $\mathbf{E}(e^{(\beta, S(n))}\xi) = \lambda_\beta^n \mathbf{E}_\beta(h_\beta^{-1}(y_n)\xi)$, где $\mathbf{E}$ — среднее по мере $\mathbf{P}_0$ (в этом случае $\eta_0^{(n)}(g, y) \equiv 1$). Отсюда нетрудно получить следующие оценки:

$$c_1(M)\mathbf{P}(A_n C_n) \leq \mathbf{E}(e^{(\beta, S(n))}\chi_{A_n} \chi_{C_n}) = \lambda_\beta^n \mathbf{E}_\beta(\chi_{A_n} \chi_{C_n} h_\beta^{-1}(y_n)) \leq c_2(M)\mathbf{P}(A_n C_n).$$

Аналогично,

$$c_1(M)\mathbf{P}(A_n) \leq \lambda_\beta^n \mathbf{E}_\beta(\chi_{A_n} h_\beta^{-1}(y_n)) \leq c_2(M)\mathbf{P}(A_n).$$

Из этих оценок вытекает, что

$$(5.14) \quad \frac{c_1(M)}{c_2(M)} R(n) \leq \mathbf{P}(C_n \mid A_n) = \mathbf{Q}_M(C_n) \leq \frac{c_2(M)}{c_1(M)} R(n).$$

Для произвольного $\delta > 0$ разобьем множество M на N частей: $M = \bigcup_{k=1}^N M_k$ так, чтобы $m_\Gamma(M_k) > 0$ и $\frac{c_2(M_k)}{c_1(M_k)} < 1 + \delta$. Тогда из (5.14) получаем $(1 + \delta)^{-1} R(n) \leq \mathbf{Q}_{M_k}(C_n) \leq (1 + \delta) R(n)$. Пользуясь (5.12), находим, что при достаточно больших n $(1 + \delta)^{-1} R(n) \leq \mathcal{N}_{t(1-t)\mathbf{D}}(B) \leq (1 + \delta) R(n)$. Вместе с предыдущими неравенствами это дает нам оценки на $\mathbf{Q}_M(C_n)$: при достаточно больших n

$$\begin{aligned} (1 + \delta)^{-2} \mathcal{N}_{t(1-t)\mathbf{D}}(B) &\leq \mathbf{Q}_M(C_n) = \sum_{k=1}^N \mathbf{Q}_{M_k}(C_n) \mathbf{P}(S(n) \in M_k \mid A_n) \\ &\leq (1 + \delta)^2 \mathcal{N}_{t(1-t)\mathbf{D}}(B). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого $\delta > 0$ при достаточно больших n

$$|\mathbf{Q}_M(C_n) - \mathcal{N}_{t(1-t)\mathbf{D}}(B)| \leq 3\delta.$$

Это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{Q}_M(C_n) = \mathcal{N}_{t(1-t)\mathbf{D}}(B).$$

Таким образом, мы показали слабую сходимость $\mathbf{Q}_M$ -распределения случайного вектора $\frac{1}{\sqrt{n}}S([nt])$ при $n \rightarrow +\infty$ к гауссовскому распределению на Γ с параметрами $(0, t(1-t)\mathbf{D})$. Теорема 0.4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гольдштейн И. Я., Маргулис Г. А. Условия простоты спектра показателей Ляпунова // ДАН СССР. 1987. Т. 293. № 2. С. 297–301.
- [2] Гольдштейн И. Я., Маргулис Г. А. Показатели Ляпунова произведения случайных матриц // УМН. 1989. Т. 44. № 5. С. 13–59.
- [3] Крейн М. Г., Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // УМН. 1948. Т. 3. № 1. С. 3–95.
- [4] Лётчиков А. В. Предельная теорема для возвратного случайного блуждания в случайной среде // ДАН СССР. 1989. Т. 302. № 1. С. 25–28.
- [5] Лётчиков А. В. Асимптотические свойства одномерных случайных блужданий в случайной среде с вероятностью 1 // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 12. С. 1710–1728.
- [6] Молчанов С. А., Тутубалин В. Н. Линейная модель гидромагнитного динамо и произведения случайных матриц // Теория вероятн. и ее примен. 1984. Т. 29. № 2. С. 234–247.
- [7] Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова // Теория вероятн. и ее примен. 1957. Т. 2. № 4. С. 389–416.
- [8] Оселедец В. И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Труды Московского матем. об-ва. 1968. Т. 19. С. 179–210.
- [9] Тутубалин В. Н. О предельных теоремах для произведений случайных матриц // Теория вероятн. и ее примен. 1965. Т. 10. № 1. С. 19–32.
- [10] Тутубалин В. Н. Сближение вероятностных мер по вариации и произведения случайных матриц // Теория вероятн. и ее примен. 1968. Т. 13. № 1. С. 63–81.
- [11] Тутубалин В. Н. Некоторые теоремы типа усиленного закона больших чисел // Теория вероятн. и ее примен. 1969. Т. 14. № 2. С. 319–326.
- [12] Тутубалин В. Н. Представление случайных матриц в орисферических координатах и его приложения к телеграфным уравнениям // Теория вероятн. и ее примен. 1972. Т. 17. № 2. С. 266–275.
- [13] Тутубалин В. Н. Один вариант локальной предельной теоремы для произведений случайных матриц // Теория вероятн. и ее примен. 1977. Т. 22. № 2. С. 209–221.
- [14] Сазонов В. В., Тутубалин В. Н. Распределение вероятностей на топологических группах // Теория вероятн. и ее примен. 1966. Т. 11. № 1. С. 3–55.
- [15] Bougerol P., Lacroix J. Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators. Boston–Basel–Stuttgart: Birkhäuser, 1985.
- [16] Bretagnolle J., Dacunha-Castele D. Theoremes limites a distance finie pour les marches aleatoires // Ann. Inst. H. Poincare. Sec. B. 1968. V. 4. № 1. P. 25–73.
- [17] Furstenberg H., Kesten H. Products of random matrices // Ann. Math. Statist. 1960. V. 2. P. 457–469.
- [18] Furstenberg H. Non-commuting random products // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. P. 377–428.
- [19] Furstenberg H. A Poisson formula for semisimple Lie groups // Ann. Math. 1963. V. 77. № 2. P. 335–386.
- [20] Furstenberg H. Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces // Proc. Symp. Pure Math. 1972. V. 6. P. 193–229.
- [21] Furstenberg H., Kifer J. Random matrix products and measures on projective spaces // Israel J. Math. 1983. V. 46. № 1–2. P. 12–32.
- [22] Goldsheid I., Guivarc’h Y. Dimension de la loi gaussienne pour un produit de matrices aleatoires independantes et adherence de Zariski // C. R. A. S. Paris. Ser. 1, Math. 1991. V. 313. № 5. P. 305–308.
- [23] Goldsheid I. Lyapunov exponents and asymptotic behaviour of the product of random matrices // Lect. Notes in Math. 1991. V. 1486.
- [24] Guivarc’h Y. Quelques proprietes asymptotiques des produits de matrices aleatoires // Lect. Notes in Math. 1980. V. 774. P. 176–250.

- [25] Guivarc'h Y. Sur les exposants de Liapunoff des marches aleatoires // C. R. A. S. Paris. 1981. V. 292. P. 327–329.
- [26] Guivarc'h Y. Application d'un theoreme limite local a la transience et a la recurrence de Marches de Markov // Lect. Notes in Math. 1984. V. 1096. P. 301–332.
- [27] Guivarc'h Y., Raugi A. Frontiere de Furstenberg, proprietes de contraction et theoremes de convergence // Z. Wahrschein. verw. Geb. 1985. V. 69. №2. P. 187–242.
- [28] Guivarc'h Y., Raugi A. Products of random matrices: convergence theorems // Contemp. Math. 1986. V. 50. P. 31–54.
- [29] Guivarc'h Y., Raugi A. Proprietes de contraction d'un semi-groupe de matrices inversibles. Coefficients de Liapunoff d'un produit de matrices aleatoires independantes // Israel J. Math. 1989. V. 65. №2. P. 165–196.
- [30] Guivarc'h Y. Produits de matrices aleatoires et application aux proprietes geometriques des sous-groupes du groupe lineaire // Erg. Th. Dyn. Systems. 1990. V. 10. №3. P. 483–512.
- [31] Ionescu-Tulcea C. T., Marinescu G. Theorie ergodicue pour des classes d'operations non complement continues // Ann. Math. 1950. V. 52. №1. P. 140–147.
- [32] Kesten H. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices // Acta Math. 1973. V. 131. P. 208–248.
- [33] Letchikov A. V. Localization of one-dimensional random walks in random environments // Sov. Sci. Rev. Sec. C: Math. Phys. 1989. V. 8. P. 173–220.
- [34] Le Page E. Theoreme de la limite centrale pour certains produits de matrices aleatoires // C. R. A. S. Paris. Ser. I, Math. 1981. V. 292. P. 327–329.
- [35] Le Page E. Theoremes limits pour les produits de matrices aleatoires // Lect. Notes in Math. 1982. V. 928. P. 258–303.
- [36] Nechaev S. K., Sinai Ya. G. Limiting-type theorem for conditional distributions of products of independent unimodular 2×2 matrices // Bol. Soc. Bras. Mat. 1991. V. 21. №2. P. 121–132.
- [37] Tutubalin V. N. A central limit theorem for products random matrices and some of its applications // Symp. Math. 1977. V. 21. P. 101–116.