Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. И. Сапронов, Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах,
УМН, 1996, том 51, выпуск 1, 101–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm921>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:56:04

УДК 517.988

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ РЕДУКЦИИ В ГЛАДКИХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Ю. И. САПРОНОВ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	101
Глава 1. Понижение размерности в конечномерных экстремальных задачах	104
§ 1.1. Редукция Пуанкаре	104
§ 1.2. Обобщенная редукция Пуанкаре	106
§ 1.3. Посткритические равновесия упругой цепи	109
§ 1.4. Стационарные вращения многомерных волчков. Редукция Смейла	112
Глава 2. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах на бесконечномерных многообразиях	114
§ 2.1. Редукция Ляпунова–Шмидта	115
§ 2.2. Редукция Морса–Ботта	118
§ 2.3. Общая схема конечномерной редукции	119
§ 2.4. Упругие равновесия эйлерова стержня	121
§ 2.5. Редукция Морса–Ботта для кирхгофова стержня	124
§ 2.6. Равновесия тонкой упругой пластины	127
Список литературы	130

Введение

Широко известно, что многие нелинейные задачи математической физики допускают вариационную формулировку, то есть могут быть заданы в виде экстремальной задачи

$$(0.1) \quad V(x) \rightarrow \inf, \quad x \in X,$$

где V — гладкий функционал на гладком банаховом многообразии X . Решение такой задачи часто можно осуществить переходом (редукцией) к аналогичной задаче

$$(0.2) \quad W(\xi) \rightarrow \inf, \quad \xi \in Y,$$

где

$$(0.3) \quad W(\xi) = \inf_{x:p(x)=\xi} V(x),$$

Y – гладкое конечномерное многообразие, p – гладкая субмерсия $X \rightarrow Y$.

Данная статья посвящена описанию некоторых из наиболее используемых схем перехода от (0.1) к (0.2) при условии, что функция (0.3) наследует топологические и аналитические свойства функционала V (сохраняются гладкость, количества и кратности критических точек, индексы Морса, гомотопические типы лебеговых множеств $\{V \leq c\}$ и т.д.). Среди требований, обеспечивающих выполнение этого условия, решающим является требование однозначности и гладкости отображения

$$(0.4) \quad \varphi: \xi \mapsto \{x \in X : p(x) = \xi, W(\xi) = V(x)\}.$$

Следуя [1], это отображение будем называть маргинальным. Функцию (0.3) будем называть ключевой, а отображение $p: X \rightarrow Y$ – редуцирующим.

Основополагающими примерами конечномерных редукций являются локальная схема Ляпунова–Шмидта (в вариационной модификации) и глобальная схема Морса–Ботта из вариационной теории геодезических (см. [2]–[5] и [6], [7]). Эти схемы полезны прежде всего как инструменты для построения теории фредгольмовых особенностей гладких функционалов на банаховых многообразиях. В случае гильбертова многообразия такая теория была создана достаточно быстро [8], [9] (разумеется, на основе ранее созданной теории особенностей гладких функций конечного числа переменных). Казалось, что для получения аналогичной теории в случае банаховых многообразий достаточно лишь найти соответствующие варианты бесконечномерных банаховых обобщений леммы Морса и леммы о расщеплении особенности [9]–[11]. Однако результаты Н. А. Бобылева и Ю. М. Бурмана [12] показали, что возможности, открываемые банаховыми вариантами этих лемм, весьма ограничены. По-видимому, в данной ситуации целесообразнее обратиться к прямым конечномерным редукциям.

Конечномерные редукции, основанные на редуцирующих субмерсиях и маргинальных отображениях, позволяют без существенных препятствий переносить конечномерную теорию особенностей гладких функций на случай фредгольмовых особенностей гладких функционалов.

Схемы конечномерных редукций представляют также прикладной интерес в качестве аппарата исследования потенциальных физических систем с неединственностью допустимых состояний. К таким системам относятся, например, упругие конструкции в закритических упруго равновесных состояниях [11], [13], [14]. Часто введением конечного набора дополнительных фиктивных связей можно добиться единственности допустимого устойчивого состояния (зависящего от параметров связей). В этом случае основные устойчивые состояния (выделяемые без учета дополнительных связей) могут быть найдены минимизацией по параметрам связей значений функционала энергии на множестве условно устойчивых состояний. Такой метод используется, например, в статике упругих стержней [13]. Сходные математические идеи применяются в теории нелинейных волн и некоторых других разделах нелинейной физики [15], [16]. В работах многих специалистов по нелинейному анализу высказывалась общая мысль о том, что физические эффекты в системах с бесконечным числом

степеней свободы часто допускают адекватное качественное описание через конечные наборы переменных – так называемые существенные, или поведенческие, переменные [11], [16]. Исторически схемам Ляпунова–Шмидта и Морса–Ботта предшествовал локальный метод Пуанкаре понижения размерности в конечномерной экстремальной задаче [17], [18]. По-видимому, А. Пуанкаре предполагал, что его метод может быть применен и к системам с бесконечным числом степеней свободы. Впервые математически строго обоснованные схемы редукций бесконечномерных систем к конечномерным были предложены А. М. Ляпуновым [19] и Э. Шмидтом [20]. К сожалению, в работах [19], [20] и выросшей на их основе теории ветвления решений нелинейных уравнений [21] был утерян контекст вариационного происхождения. Возврат к вариационным корням произошел лишь в 70-е годы усилиями Н. А. Сидорова, В. А. Треногина, Н. А. Бобылева, М. А. Красносельского, Э. М. Мухамадиева, Дж. Марсдена и др. [2]–[5].

Впоследствии появились нелокальные версии схемы Ляпунова–Шмидта и ее новые применения в современных вариационных задачах [22]–[24].

Следует отметить также работы В. Койтера по анализу закритических равновесий упругих систем (см., например, [25]), в которых фактически использовалась (без математического обоснования) схема Ляпунова–Шмидта. В. Койтер отталкивался от упомянутого выше метода А. Пуанкаре и ритцевских конечномерных аппроксимаций.

Ритцевской аппроксимацией функционала V на банаховом пространстве E называется функция W , $W(\xi) := V(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$, где $\{e_1, \dots, e_n\}$ – некоторый линейно независимый набор функций (базис аппроксимации). Экстремалам $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)^T$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j e_j$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V . Точность ритцевских аппроксимаций повышается за счет увеличения количества базисных функций. Если, обобщая, рассмотреть аппроксимации вида

$$W(\xi) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi)\right),$$

где Φ – гладкое отображение из $N := \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ в $N^\perp$ (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то во многих задачах можно достигнуть любой точности аппроксимации экстремалей при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы. К аналогичным обобщениям можно прийти, отправляясь от конечно элементных аппроксимаций.

В данной статье изложены в современном виде схемы Пуанкаре, Ляпунова–Шмидта и Морса–Ботта с рассмотрением некоторых вариантов обобщений и примеров реализующих схем в конкретных задачах.

Автор глубоко благодарен В. И. Арнольду, Н. А. Бобылеву, Ю. Г. Борисовичу, П. П. Забрейко, В. Г. Звягину, М. А. Красносельскому, В. А. Кондратьеву, И. В. Скрыпнику, А. Т. Фоменко и В. В. Шарко за полезные высказывания и замечания по теме статьи, сделанные перечисленными математиками автору во время его выступлений на семинарах и в частных беседах.

Работа выполнена при финансовой поддержке международного научного фонда Сороса и Американского математического общества.

Глава 1. Понижение размерности в конечномерных экстремальных задачах

В данной главе дано описание редуцирующей схемы Пуанкаре с некоторыми обобщениями и примерами.

§ 1.1. Редукция Пуанкаре

Пусть задана гладкая экстремальная задача

$$(1.1.1) \quad V(x) \rightarrow \inf, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

(гладкость означает принадлежность V классу $C^\infty(\mathbb{R}^n)$). Если выполнено условие *коэрцитивности*

$$(1.1.2) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty,$$

то задача (1.1.1) разрешима. Если, дополнительно, выполнено условие выпуклости

$$(1.1.3) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h) > 0 \quad \forall (a, h) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0),$$

то решение этой задачи является единственным.

Для построения приближенного решения задачи (1.1.1) при условиях (1.1.2) и (1.1.3) в вычислительной математике разработано много эффективных методов. Снятие условия (1.1.3) приводит к необходимости рассмотрения функций, имеющих несколько точек локальных минимумов. Поиск решения задачи (1.1.1) в этом случае существенно затрудняется. Еще более сложной эта задача выглядит при наличии у функции V дополнительных параметров, изменение которых приводит к бифуркационным явлениям. А. Пуанкаре предложил процедуру, позволяющую во многих случаях облегчить изучение ветвления экстремалей за счет исключения “несущественных” переменных.

Пусть выполнено условие выпуклости V по части переменных:

$$(1.1.4) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a)(h, h) > 0 \quad \forall (a, h) \in \mathbb{R}^n \times (L \setminus 0),$$

L — l -мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Тогда вместо (1.1.1) можно рассмотреть аналогичную задачу с меньшим числом переменных

$$(1.1.5) \quad W(\xi) \rightarrow \inf, \quad \xi \in M,$$

где M — ортогональное дополнение к подпространству L в $\mathbb{R}^n$ (в стандартной метрике $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$), а W — функция, определенная соотношением

$$(1.1.6) \quad W(\xi) = \inf_{h: h \in L} V(\xi + h).$$

ТЕОРЕМА 1.1.1. *При выполнении условий (1.1.2) и (1.1.4) функция (1.1.6) является гладкой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи $V(\xi + h) \rightarrow \inf, h \in L$, задается системой уравнений

$$(1.1.7) \quad \frac{\partial V}{\partial e_j}(\xi + h) = 0, \quad j = 1, \dots, l,$$

где $\{e_1, \dots, e_n\}$ – произвольный фиксированный базис в L . Якобиан левой части этой системы является невырожденным вследствие (1.1.4). Поэтому гладкость решения $h = h(\xi)$ системы уравнений (1.1.7) обеспечивается теоремой о неявной функции. Существование и единственность решения обеспечивается условиями (1.1.2) и (1.1.4). Следовательно, функция $W(\xi) = V(\xi + h(\xi))$ является гладкой.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.1. Строго говоря, А. Пуанкаре определял функцию W не формулой (1.1.6), а системой уравнений (1.1.7). Функция W при этом определялась локально (условия (1.1.2) не было) и предназначалась для локального исследования бифуркации экстремалей [17], [18]. Смысл перехода от (1.1.1) к (1.1.5) состоял в замене многомерной задачи на маломерную.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1. Функция (1.1.6), полученная при условиях (1.1.2) и (1.1.4), называется *ключевой*. Координаты $\xi_j, j = 1, \dots, t = n - l$, вектора $\xi \in M$ относительно произвольного фиксированного базиса $f_1, \dots, f_m$ в M также называются *ключевыми*. Отображение $\varphi: \xi \mapsto \xi + h(\xi)$, где $h(\xi)$ определено системой уравнений (1.1.7), называется *маргинальным*.

ТЕОРЕМА 1.1.2. *Маргинальное отображение задает взаимно однозначное соответствие между множеством критических точек функции V и множеством критических точек ее ключевой функции W . При этом соответствию невырожденные критические точки переходят в невырожденные и только невырожденные критические точки с сохранением значений индексов Морса. А соответствующие друг другу вырожденные критические точки имеют изоморфные локальные кольца особенностей¹.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО становится очевидным после применения обобщенной леммы Морса (леммы о расщеплении особенности) [11], [26].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.2. Переход от задачи (1.1.1) к задаче (1.1.5), где W – ключевая функция V , называется *редукцией по схеме Пуанкаре* или, более кратко, *редукцией Пуанкаре*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.2. В формулировках теорем 1.1.1 и 1.1.2 условие (1.1.1) можно ослабить, заменив его *условием коэрцитивности по компоненте $h \in L$* .

¹Локальным кольцом особенности гладкой функции V в критической точке $a \in \mathbb{R}^n$ называется фактор $\mathcal{E}_a(\mathbb{R}^n)/\mathfrak{A}$ кольца ростков $\mathcal{E}_a(\mathbb{R}^n)$ гладких функций на $\mathbb{R}^n$ в точке a по якобиеву идеалу $\mathfrak{A}$, порожденному ростками функций $\frac{\partial V}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n$, [11], [26].

§ 1.2. Обобщенная редукция Пуанкаре

Описанная в § 1.1 схема допускает естественное обобщение, основанное на замене линейного отображения $p: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ гладкой субмерсией.

Пусть V — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$ и пусть задано гладкое отображение $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ с условием $\text{rk } \frac{\partial p}{\partial x}(a) = m \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$. Пусть область $\mathcal{O}$ является образом p в $\mathbb{R}^m$ ($\mathcal{O}$ — открытое связное подмножество в $\mathbb{R}^m$). Предположим, что выполняются следующие два условия:

А) для каждой точки $\xi \in \mathcal{O}$ подмногообразие $p^{-1}(\xi)$ в $\mathbb{R}^n$ является *геодезически выпуклым*, то есть для любой пары точек $a, b \in p^{-1}(\xi)$ существует единственная геодезическая кривая на $p^{-1}(\xi)$ (в индуцированной из $\mathbb{R}^n$ метрике), соединяющая эти точки;

В) для любой точки $\xi \in \mathcal{O}$ функция $V|_{p^{-1}(\xi)}$ является *геодезически строго выпуклой*: для любой геодезической кривой $x = x(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, на $p^{-1}(\xi)$ функция $\omega(t) = V(x(t))$ является строго выпуклой, то есть $\ddot{\omega}(s) > 0 \quad \forall s \in (\alpha, \beta)$.

Рассмотрим функцию W , определенную формулой

$$(1.2.1) \quad W(\xi) = \inf_{x: p(x)=\xi} V(x).$$

ТЕОРЕМА 1.2.1. *При выполнении для гладкой коэрцитивной функции V условий А) и В) функция W , определенная соотношением (1.2.1), является гладкой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из коэрцитивности V на $\mathbb{R}^n$ вытекает ограниченность V снизу. Следовательно, $W(\xi) > -\infty \quad \forall \xi \in \mathcal{O}$. Более того, для каждого ξ найдется единственная точка $\varphi(\xi) \in p^{-1}(\xi)$, для которой $W(\xi) = V(\varphi(\xi))$ (это следует из коэрцитивности и выпуклости $V|_{p^{-1}(\xi)}$). Если $x = x(t)$ — геодезическая на $p^{-1}(\xi)$, выходящая из точки $\varphi(\xi)$ с произвольно заданной скоростью $h \neq 0$, то для соответствующего приращению h значения второго дифференциала сужения $V|_{p^{-1}(\xi)}$, вычисленного в точке $\varphi(\xi)$, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(V|_{p^{-1}(\xi)})(\varphi(\xi))(h, h) = \frac{d^2}{dt^2}(V(x(t)))|_{t=0} > 0$$

(см. условие В)). Из этого соотношения вытекают невырожденность гессиана $V|_{p^{-1}(\xi)}$ в точке $\varphi(\xi)$ и, следовательно, гладкая зависимость $\varphi(\xi)$ от ξ (в силу теоремы о неявной функции). Следовательно, функция (1.2.1) является гладкой как композиция гладкой функции V и гладкого маргинального отображения

$$(1.2.2) \quad \xi \mapsto \varphi(\xi).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. Функция (1.2.1), определенная при условиях А) и В), называется *ключевой*, а субмерсия $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{O}$ называется *редуцирующим отображением*.

ТЕОРЕМА 1.2.2. *В условиях теоремы 1.2.1 маргинальное отображение (1.2.2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством критических точек функции V и множеством критических точек ключевой функции (1.2.1). При этом соответствующие друг другу критические точки имеют изоморфные локальные кольца особенностей и, в случае невырожденности критических точек, равные индексы Морса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (его решающий шаг) состоит в непосредственном применении леммы о расщеплении особенности [11], [26].

Описанная схема естественно распространяется на гладкие функции, заданные на полном римановом многообразии $\mathcal{M}$. Условие коэрцитивности V формулируется при этом следующим образом: если $\{a_k\}_{k=1}^n$ — не предкомпактная последовательность точек $\mathcal{M}$, то $\sup\{V(a_k)\} = \infty$.

Образом редуцирующего отображения также может быть гладкое многообразие $\mathcal{N}$.

Разумеется, существуют и другие варианты обобщения. Например, можно рассмотреть функцию V на римановом многообразии $\mathcal{M}$ с гладкой субмерсией $p: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ при условии существования такого значения c для V , что

А) множество $p^{-1}(\xi) \cap \{V \leq c\}$ компактно и геодезически выпукло $\forall \xi \in \mathcal{N}$,

В) для каждого $\xi \in \mathcal{N}$ функция $V|_{p^{-1}(\xi) \cap \{V \leq c\}}$ геодезически строго выпукла.

Если не задаваться целью указывать конкретные условия, гарантирующие однозначность маргинального отображения, то можно формулировать общие принципы редукции, подобные теоремам редукции Морса–Ботта [7].

ТЕОРЕМА 1.2.3. *Пусть на гладком не имеющем края многообразии $\mathcal{M}$ задана гладкая функция V , для которой*

- 1) *существует такое регулярное значение c , что многообразие $\{V \leq c\}^2$ компактно;*
- 2) *существует гладкая субмерсия $p: \{V \leq c\} \rightarrow \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — гладкое многообразие (вообще говоря, с краем), для которой $p^{-1}(\xi)$ имеет непустое пересечение с внутренностью множества $\{V \leq c\}$ $\forall \xi \in \mathcal{N} \setminus \partial\mathcal{N}$, это пересечение содержит единственную (в нем) критическую точку $\varphi(\xi)$ для $V|_{p^{-1}(\xi)}$, и точка $\varphi(\xi)$ является морсовской точкой минимума для $V|_{p^{-1}(\xi)}$;*
- 3) *если $\partial\mathcal{N} \neq \emptyset$, то $p^{-1}(\partial\mathcal{N}) \subset \{V = c\}$, и любая точка $a \in p^{-1}(\partial\mathcal{N})$ является морсовской критической точкой для $V|_{\tilde{p}^{-1}(\xi)}$, $\xi = p(a)$, где $\tilde{p}$ — любое гладкое продолжение отображения p на любую окрестность $\mathcal{O}$ точки a в $\mathcal{M}$ с множества $\mathcal{O} \cap \{V \leq c\}$.*

Тогда

- 1) *функция W , $W(\xi) := \inf_{x: x \in p^{-1}(\xi) \cap \{V \leq c\}} V(x)$, является гладкой;*
- 2) *отображение $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ является гладким и устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством критических точек V в $\{V \leq c\}$ и множеством критических точек W в $\mathcal{N} \setminus \partial\mathcal{N}$;*

² $\{V \leq c\}$ — краткое обозначение лебегова множества $\{x \in \mathcal{M} : V(x) \leq c\}$.

- 3) в соответствующих друг другу критических точках локальные кольца особенностей функций V и W изоморфны;
- 4) индексы Морса соответствующих друг другу невырожденных критических точек совпадают;
- 5) отображения $p: \{V \leq c\} \rightarrow \mathcal{N}$ и $\varphi: \mathcal{N} \rightarrow \{V \leq c\}$ гомотопически обратны друг другу (их композиции гомотопны единицам: $\varphi \circ p \sim I$, $p \circ \varphi \sim I$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий 1), 2) следует, что $\varphi(\xi)$ – точка минимума для $V|_{p^{-1}(\xi)} \forall \xi \in \mathcal{N} \setminus \partial\mathcal{N}$, и отображение φ вместе с функцией $W = V \circ \varphi$ являются гладкими.

Доказательства утверждений 3), 4) являются повторениями доказательств аналогичных утверждений теоремы 1.1.2 (после выбора подходящих локальных координат в окрестностях рассматриваемых точек).

Так как $p(\varphi(\xi)) \equiv \xi$, то проверка утверждения 5) сводится к проверке гомотопности единице отображения $\varphi \circ p$. Но данная гомотопия осуществляется простым стягиванием в точки $\varphi(\xi)$ слоев по линиям кратчайшего спуска: вдоль интегральных кривых векторного поля $-\text{grad}(V|_{p^{-1}(\xi)})$ (градиент определен по какой-либо фиксированной римановой метрике на $\{V \leq c\}$).

ПРИМЕР 1.2.1. Пусть двумерный тор T^2 “вертикально стоит” в $\mathbb{R}^3$ на плоскости переменных $\{x, y\}$ так, что меридианы тора параллельны плоскости переменных $\{x, z\}$ (рис. 1.2.1). Пусть V – функция высоты: $V(x, y, z) = z \forall (x, y, z) \in T^2$. Если $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ – критические значения V на T^2 , то для любого $c \in (c_1, c_2)$ множество $\{V \leq c\}$ можно рассматривать как график некоторой гладкой функции $z = \psi(x, y)$ на области $\mathcal{D}$, являющейся образом ортогональной проекции множества $\{V \leq c\}$ на плоскость переменных $\{x, y\}$. Функция V на $\{V \leq c\}$ допускает редукцию к функции одной переменной W :

$$W(\xi) := \inf_{y: (\xi, y) \in \mathcal{D}} \psi(\xi, y) = \psi(\xi, 0), \quad |\xi| \leq d,$$

где $d = \max\{x : \psi(x, y) = c\}$.

Рис. 1.2.1

Редуцирующая субмерсия и маргинальное отображение здесь задаются, соответственно, действиями $(x, y, z) \mapsto x$ и $\xi \mapsto (\xi, 0, \psi(\xi, 0))$.

В этом же примере можно осуществить другую редукцию. Введем на T^2 угловые координаты (α, β) , где α – угол вдоль параллели, отсчитываемый от самого “большого” меридиана до заданной точки τ , а β – угол вдоль меридиана, отсчитываемый от самой нижней параллели. Положим $\tilde{p}(\tau) = \alpha$. Субмерсия $\tilde{p}$ осуществляет редукцию V на области $\mathcal{M} = \{\tau \in T^2 : |\beta| < \pi\}$ к функции высоты $\tilde{W}$ на окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, канонически отождествленной с нижней параллелью. Маргинальное отображение $\varphi: S^1 \rightarrow \mathcal{M}$ является отображением естественного вложения параллели в тор. Вторая редукция является “более удачной”, так как она осуществлена на более широкой области и охватывает две критические точки, расположенные на многообразиях уровней $\{V = c_1\}$ и $\{V = c_2\}$.

ПРИМЕР 1.2.2. Среди аналитических конструкций, укладывающихся в схему Пуанкаре, по степени известности выделяется преобразование Лежандра. В классической механике оно осуществляет связь между лагранжевым и гамильтоновым формализмами [27]: если $L(\dot{q}, q, t)$ – лагранжиан какой-либо механической системы, то ее гамильтониан $H(p, q, t)$ получается из L преобразованием Лежандра:

$$(1.2.3) \quad H(p, q, t) = \sup_{\dot{q}} ((\dot{q}, p) - L(\dot{q}, q, t)) = -\inf_{\dot{q}} (L(\dot{q}, q, t) - (\dot{q}, p)), \quad \dot{q}, p, q \in \mathbb{R}^n.$$

С точки зрения редукции Пуанкаре соотношение (1.2.3) исключает переменную $\dot{q}$ в функции V , $V(\dot{q}, p, q, t) := L(\dot{q}, q, t) - (\dot{q}, p)$. Лагранжиан получается из гамильтониана повторным применением преобразования Лежандра.

В учебниках по аналитической механике обычно приводится лишь условие локальной редуцируемости, заключающееся в требовании выпуклости лагранжиана по переменной $\dot{q}$. Коэрцитивность же V по переменной $\dot{q}$ в реальных механических системах автоматически обеспечивается квадратичной зависимостью кинетической энергии от вектора скорости. После перехода к обобщенным координатам коэрцитивность V по вектору скорости сохраняется.

Общая механическая система, в которой соответствующее маргинальное отображение $\varphi: (p, q, t) \rightarrow (\dot{q}, p, q, t)$ глобально определяется соотношением (1.2.3), называется системой, удовлетворяющей условию двойственности Лагранжа–Гамильтона [28].

§ 1.3. Посткритические равновесия упругой цепи

Пусть дана система одинаковых абсолютно твердых прямолинейных стержней длины единица, последовательно соединенных одинаковыми упругими шарнирами в прямолинейную $(n + 1)$ -звенную упругую цепь (рис. 1.3.1). Предположим, что первое и последнее звенья закреплены так, что они остаются в вертикальном положении при всех деформациях цепи. Пусть φ_j – угол между j -м звеном и вертикалью, $j = 1, \dots, n + 1$, образованный в результате деформации цепи под воздействием продольно сжимающей нагрузки. Если принять соглашение о том, что упругие шарниры

“работают” по закону Гука (момент силы упругой реакции пропорционален углу между звеньями), то равновесная конфигурация цепи определится системой уравнений

$$(1.3.1) \quad \begin{cases} \varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1} + \lambda \sin \varphi_j = 0, & j = 2, \dots, n, \\ \varphi_1 = \varphi_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Рис. 1.3.1

Параметр λ в этих уравнениях пропорционален величине сжимающей силы. Масштаб длины предполагается выбранным здесь так, что соответствующее произведение входящих в уравнение упруго-механических и геометрических констант равно единице.

Система уравнений (1.3.1) потенциальна: ее левая часть состоит из компонент градиента функции полной энергии

$$(1.3.2) \quad V(\varphi, \lambda) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{(\varphi_{j+1} - \varphi_j)^2}{2} + \lambda(\cos \varphi_j - 1) \right) = \frac{1}{2}(A\varphi, \varphi) + \lambda \sum_{j=2}^n (\cos \varphi_j - 1)$$

(с учетом соотношений $\varphi_1 = \varphi_{n+1} = 0$), где $\varphi = (\varphi_2, \dots, \varphi_n)^T$ и

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Функция (1.3.2) отличается лишь постоянным множителем от разностной аппроксимации функционала полной энергии продольно сжатого упругого эйлера стержня с жестко заделанными концами [13]. Связь с эйлеровым стержнем проявляется и в спектральных характеристиках матрицы A . Действительно, собственными значениями A являются числа

$$\lambda_k = 2 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi k}{n} \right) \right), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

которым отвечают собственные векторы

$$g_k = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_{n-1}^k)^T, \quad \alpha_j^k = \sin \left(\frac{\pi k j}{n} \right).$$

Нетрудно заметить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \lambda_k = (\pi k)^2$, то есть k -е собственное значение матрицы $n^2 A$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к k -му собственному значению оператора $-\frac{d^2}{ds^2}$ на отрезке $[0, 1]$ (при краевых условиях $x(0) = x(1)$). Этому собственному значению оператора отвечает собственная функция $x_k(s) = \sin(\pi k s)$. Ее значения в узлах $s = j/n$ являются координатами собственного вектора g_k матрицы A .

Если $\lambda < \lambda_1$, то

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}(\varphi, \lambda)(h, h) = (Ah, h) - \lambda \sum_{j=2}^n (\cos \varphi_j) h_{j-1}^2 \geq (\lambda_1 - \lambda)|h|^2,$$

то есть при $\lambda < \lambda_1$ функция V выпукла по φ .

Коэрцитивность V очевидна.

Следовательно, при $\lambda < \lambda_1$ точка $\varphi = 0$ является единственной критической точкой V , и она же является точкой глобального минимума V .

Если задано ограничение $\lambda < \lambda_{m+1}$, то можно гарантировать лишь следующее неравенство

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}(\varphi, \lambda)(h, h) > 0 \quad \forall h \in L_m \setminus 0,$$

где $L_m = \text{span}(g_1, \dots, g_m)$.

Положим $e_k = g_k / |g_k|$. В соответствии с редуцирующей схемой Пуанкаре можно перейти к ключевой функции W

$$W(\xi, \lambda) := \inf_{h: h \in L_m^\perp} V \left(\sum_{j=1}^m \xi_j e_j + h, \lambda \right), \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

“отвечающей” за поведение V .

Приближенное вычисление W и дальнейший ее анализ требуют привлечения компьютера. Если же ограничиться локальной задачей анализа ветвления экстремалей

в окрестности нуля, то с помощью специальных асимптотических методов можно достигнуть достаточно полного результата “вручную”. Например, при $m = 1$ можно воспользоваться представлением

$$W(\xi, \lambda) = V(\xi e_1, \lambda) + o(\xi^5) + O(\lambda - \lambda_1)O(\xi^4),$$

легко проверяемым, если учесть четность $V(\cdot, \lambda)$ и представимость маргинального отображения в виде $\varphi(\xi, \lambda) = \xi e_1 + o(\xi^2)$.

Следовательно,

$$(1.3.3) \quad W(\xi, \lambda) = \alpha(\lambda) \frac{\xi^2}{2} + a^2 \lambda_1 \frac{\xi^2}{24} + o(\xi^5) + O(\lambda - \lambda_1)O(\xi^4),$$

где $\alpha(\lambda) = \lambda_1 - \lambda$, $a^2 = \gamma_1^4 + \dots + \gamma_{n-1}^4$, $\gamma_j - j$ -я компонента вектора e_1 .

Из теории нормальных форм особенностей гладких функций и их версальных деформаций [26], [11] следует – в случае представимости в форме (1.3.3) – приводимость функции W к виду $\frac{\alpha(\lambda)}{2}\xi^2 + \frac{a^2\lambda_1}{24}\xi^4$ посредством замены $\xi \mapsto \xi + o(\xi^2)$ (при λ , достаточно близком к λ_1). Таким образом, поведение функции $V(\cdot, \lambda)$ в окрестности нуля при малых $\lambda - \lambda_1$ определяется главной частью ее ключевой функции (с одной ключевой переменной).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.1. Изучение характера ветвления экстремалей и вычисление первых асимптотик ветвей бифурцирующих экстремалей по закритическому приращению $\delta = \lambda - \lambda_1$ можно осуществить, применив к функции (1.3.3) масштабирующее преобразование (преобразование Вейерштрасса, σ -процесс) $\xi = \delta^{1/2}\eta$ с последующим выделением главной части получаемой функции и применением теоремы о неявной функции.

§ 1.4. Стационарные вращения многомерных волчков. Редукция Смейла

Известно, что устойчивость стационарного вращения твердого тела вокруг оси, проходящей через точку опоры и центр тяжести (в режиме спящего волчка), определяется неравенством $C\omega^2 > 4Amgl$ – в случае динамической симметрии, и неравенством $\min\{C - A, C - B\}\omega^2 > mgl$ – для несимметричных волчков [27], [29]. Здесь A, B, C – главные моменты инерции тела, ω – угловая скорость вращения, l – расстояние от точки опоры до центра тяжести, mg – вес тела.

Бифуркации вращений твердого тела, возникающие в результате потери устойчивости стационарного вращения, описаны в монографии В. Н. Рубановского и В. А. Самсонова [29].

Один из современных способов, которым можно изучать устойчивость и бифуркации стационарных вращений несимметричного волчка, состоит в использовании эффективного потенциала, профакторизованного по действию группы симметрии. В результате факторизации получается функция на двумерной сфере. Ее точки минимума соответствуют устойчивым вращениям [27], [29], [30].

В случае многомерного волчка [27], [31]–[31.8] факторизация эффективного потенциала по орбитам группы симметрии не приводит к функции на сфере. Полученная функция зависит еще от дополнительных переменных, отвечающих за расположение подгруппы симметрий относительного кинетического момента в группе ортогональных преобразований, сохраняющих вертикаль [32], [33]. Если значение относительного кинетического момента регулярно (его аннулятор – подалгебра Картана), то эта подгруппа – максимальный тор в группе ортогональных преобразований, сохраняющих вертикаль. Дополнительные переменные можно исключить по редуцирующей схеме Пуанкаре. После исключения получается функция на сфере, критические точки которой соответствуют стационарным вращениям.

Движение n -мерного тела в поле тяготения задается обобщенными уравнениями Эйлера–Пуассона на группе $SO(n)$ [27], [31]–[31.7] (очерк по истории исследований динамики n -мерного твердого тела имеется в [31.8]):

$$(1.4.1) \quad \begin{cases} M\dot{\Omega} + \dot{\Omega}M + [\Omega, M\Omega + \Omega M] + \lambda r \wedge \gamma = 0, \\ \dot{\gamma} + \Omega\gamma = 0, \end{cases}$$

в которых $\Omega = f^{-1} \frac{df}{ds}$ – угловая скорость (в теле), $f(t)$ – функция со значениями в $SO(n)$, $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$, $m_j > 0$, λ – параметр величины силы тяжести, $\gamma = f^{-1}e_n$ – вектор Пуассона, $e_n = (0, \dots, 0, 1)^T$ – вертикальный орт. Через $[X, Y]$ обозначается коммутатор матриц $X, Y \in \mathfrak{so}(n)$, а через $r \wedge \gamma$ – бивектор (кососимметрическая матрица, определенная соотношением $(r \wedge \gamma)x = (r, x)\gamma - (\gamma, x)r$). Постоянный вектор r обозначает центр тяжести.

Система двух уравнений (1.4.1) сводится к одному уравнению

$$(1.4.2) \quad M\dot{\Omega} + \dot{\Omega}M + [\Omega^2, M] + \lambda r \wedge f^{-1}e_n = 0.$$

Пусть $E(f, \Omega) = K(\Omega, \Omega) + U(f)$ – полная энергия волчка, $K = (\Omega, \Omega) := \frac{1}{2} \langle \mathcal{M}(\Omega), \Omega \rangle$ – кинетическая энергия волчка ($\mathcal{M}(\Omega) := M\Omega + \Omega M$, $\langle X, Y \rangle := \frac{1}{2} \text{tr } X^T Y$), $U(f) := \lambda(r, \gamma)$ – потенциальная энергия поля тяготения. Отображение относительного кинетического момента $p: (f, \Omega) \mapsto \pi J(f, \Omega)$, где $J(f, \Omega) = f \mathcal{M}(\Omega) f^{-1}$, π – ортопроектор в метрике $K(X, Y)$ из $\mathfrak{so}(n)$ на $\mathfrak{N} := \text{Ann}(e_n) = \{Y \in \mathfrak{so}(n) : Y e_n = 0\}$, является интегралом уравнения (1.4.2) (см. [32]), а соответствующее интегральное множество F_p является гладким подмногообразием размерности $(n-1)(n+2)/2 \ \forall p \in \mathfrak{N}$. Кроме того, F_p – подрасслоение тривиального расслоения $SO(n) \times \mathfrak{so}(n) \rightarrow SO(n)$ со слоем $F_{p,f} = \{\Omega \in \mathfrak{so}(n) : p(f, \Omega) = p\} \ \forall f \in SO(n)$. Множество F_p инвариантно относительно действия $(g, (f, \Omega)) \rightarrow (gf, \Omega)$, $f \in G_p$, где $G_p \subset SO(n-1)$ – подгруппа изотропии в точке p действия $(g, p) \mapsto gpg^{-1}$ ($SO(n-1)$ отождествлена с подгруппой $\{u \in SO(n) : ue_n = e_n\}$).

Стационарные вращения соответствуют критическим орбитам действия G_p на F_p относительно $E(f, \Omega)$ [34], [26]. Их можно разыскивать посредством редукции Смейла к приведенному потенциалу [34]:

$$U_p(f) = \min_{\Omega: \Omega \in F_{p,f}} E(f, \Omega).$$

Так как $E(f, \Omega)$ выпукла и квадратично зависит от Ω , то для нее выполняются условия А) и В) §1.2. Следовательно, существует гладкое (по (f, p)) маргинальное отображение $h_p : \mathrm{SO}(n) \rightarrow F_p$, для которого $U_p(f) = E(f, h_p(f))$. Нетрудно проверить, что $h_p(g^{-1}f) = h_{pgg^{-1}}(f) \quad \forall g \in \mathrm{SO}(n-1)$. Следовательно, $U_p(g^{-1}f) = U_{pgg^{-1}}(f)$.

Таким образом, $U_p(f)$ допускает факторизацию:

$$U_p(f) = \widehat{U}_p([f]), \quad [f] \in \mathrm{SO}(n)/G_p.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $p \in \mathrm{Reg}(\mathfrak{N})$ (то есть $\mathrm{Ann}(p)$ – подалгебра Картана в $\mathfrak{N}$).

Действие (левое) $\mathrm{SO}(n-1) \times \mathrm{SO}(n) \rightarrow \mathrm{SO}(n)$ порождает действие

$$(1.4.3) \quad \mathrm{SO}(n-1) \times (\mathrm{SO}(n)/G_p) \rightarrow (\mathrm{SO}(n)/G_p),$$

все орбиты которого имеют общий диффеоморфный тип, равный $\mathrm{SO}(n-1)/G$.

Пусть выполнены следующие два условия:

1) задана такая окрестность $\mathcal{O}$ единицы в $\mathrm{SO}(n)$, что пересечение с $\mathcal{O}$ каждой орбиты действия (1.4.3) содержит не более одной критической точки сужения потенциала $\widehat{U}_p$ на эту орбиту;

2) критические точки сужений $\widehat{U}_p$ на пересечения $\mathcal{O}$ с орбитами действия (1.4.3) являются морсовскими точками минимумов.

Неравенства, которым должны подчиняться p и M при выполнении данных требований, приведены в [32], [33].

Анализ бифуркации стационарных вращений сводится при этих условиях к анализу бифуркации экстремалей ключевой функции W

$$W(\xi) := \inf_{f: \pi(f)=\xi} U_p(f), \quad \xi \in S^{n-1},$$

на сфере $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Через π здесь обозначено каноническое отображение $\mathrm{SO}(n) \rightarrow S^{n-1}$, $\pi(f) := fe_n$. Локальный анализ функции W проведен в [32], [33]. Там же приведены условия устойчивости стационарного вращения при $\gamma = r = e_n$, $n = 2k + 1$ (в четномерном пространстве спящих волчков нет).

Глава 2. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах на бесконечномерных многообразиях

В данной главе дано описание бесконечномерных аналогов редуцирующей схемы Пуанкаре. Основной упор сделан на схемы Ляпунова–Шмидта и Морса–Ботта. Бесконечномерность вносит свой специфический аспект в проблему, связанный с тем, что одна и та же экстремальная задача может рассматриваться в различных функциональных пространствах с различными геометрическими и топологическими свойствами. Задачи, в которых допускаются редуцирующие переходы к конечномерным экстремальным задачам, в некотором смысле инвариантны по отношению к смене функциональных пространств, так как за топологические свойства соответствующих функционалов отвечают функции (ключевые) на конечномерных подмногообразиях.

§ 2.1. Редукция Ляпунова–Шмидта

Пусть $f: E \rightarrow F$ — гладкое фредгольмово нулевого индекса отображение банаховых пространств [16], [21], [35]. Пусть f собственнo (прообраз любого компакта компактен) и потенциально:

$$(2.1.1) \quad \langle f(x), h \rangle \equiv \frac{\partial V}{\partial x}(x)h,$$

где V — гладкий функционал на E (потенциал отображения f), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в некотором гильбертовом пространстве H , содержащем E и F как непрерывно и плотно вложенные подпространства. Предполагается также, что E непрерывно вложено в F .

Если выполнено условие положительности (монотонности)

$$(2.1.2) \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (E \setminus 0),$$

то уравнение

$$(2.1.3) \quad f(x) = 0$$

однозначно разрешимо. Это верно в силу теоремы Банаха–Каччиополи–Маура [36], [35], [37]. Очевидно, что решение этого уравнения является и точкой глобального минимума V на E .

Уравнение (2.1.3) — абстрактный аналог уравнения Эйлера–Лагранжа из вариационного исчисления.

Если (2.1.2) заменить более слабым условием

$$(2.1.4) \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (R^* \setminus 0),$$

где $R^* = E \cap N^\perp$, $N = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$, $N^\perp$ — ортогональное дополнение к N в H , $\{e_1, \dots, e_n\}$ — некоторая ортонормированная в H система векторов в E , то можно определить ключевую функцию W

$$(2.1.5) \quad W(\xi) := \inf_{x: \langle x, e_j \rangle = \xi_j \forall j} V(x), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T,$$

“отвечающую” за поведение функционала V . Условие собственности f можно ослабить, заменив его условием собственности при каждом ξ отображения

$$(2.1.6) \quad f_*(\cdot, \xi): R^* \rightarrow R,$$

где $R = F \cap N^\perp$, $f_*(u, \xi) := f(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + u) - \sum_{j=1}^n \langle e_j, f(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + u) \rangle e_j$.

При выполнении этих условий уравнение

$$(2.1.7) \quad f_*(u, \xi) = 0$$

однозначно разрешимо при всех ξ , и его решение $u = h(\xi)$ гладко зависит от ξ — по теореме о неявной функции. Из (2.1.4) получаем

$$(2.1.8) \quad W(\xi) \equiv V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h(\xi)\right).$$

Переход от V к W , определенной соотношением (2.1.5) (или (2.1.8)), аналогичен редукции Пуанкаре в конечномерном случае.

Первые реализации идеи конечномерной редукции были сделаны А. М. Ляпуновым и Э. Шмидтом [19], [20]. Правда, вместо функции (2.1.8) они рассматривали так называемое уравнение разветвления

$$(2.1.9) \quad \theta(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $\theta(\xi) = (\theta_1(\xi), \dots, \theta_n(\xi))$, $\theta_j(\xi) = \langle f(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k + h(\xi)), e_j \rangle$.³

Нетрудно заметить, что

$$\theta(\xi) = \text{grad } W(\xi).$$

Подходы А. М. Ляпунова и Э. Шмидта получили дальнейшее развитие в работах многочисленных математиков, что впоследствии привело к созданию обширной теории ветвления решений нелинейных уравнений [21], [38]. В этой теории произошел отрыв от вариационных корней метода конечномерных редукций. Возврат к вариационным задачам в рамках общей теории ветвления произошел лишь в 70-е годы [2], [3], [4].

Следует отметить, что развитие упомянутых подходов шло, в основном, на уровне локальных задач — в виде схем построения так называемых малых решений, зависящих от малых параметров. Потребность в условиях типа собственности отображения (2.1.6) при этом не возникала. Нелокальное рассмотрение ключевых функций было востребовано в связи с некоторыми новыми задачами, пришедшими из симплектической топологии [22]. В работах [22], [23] для построения нелокальных редукций вместо условия собственности отображения (2.1.6) использовались более частные условия, приводящие к возможности применения принципа сжатых отображений. Впервые условие собственностив проблеме редукции было использовано, по-видимому, в работе [39]. В этой работе было сформулировано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1.1. Пусть отображение (2.1.6) является собственным, и пусть при этом выполняется условие положительности (2.1.4). Тогда маргинальное отображение $\varphi: \xi \mapsto \sum_{j=1}^n \xi_j e_j + h(\xi)$, где $h(\xi)$ определено уравнением (2.1.7), устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими точками ключевой функции (2.1.5) и заданного функционала V . При этом локальные

³Такое определение уравнения разветвления дал А. М. Ляпунов. Определение, данное Э. Шмидтом, выглядит несколько иначе, но приводит к эквивалентному уравнению [38].

кольца особенностей⁴ соответствующих функций в точках ξ и $\varphi(\xi)$ изоморфны. В соответствующих друг другу однократных критических точках имеет место совпадение индексов Морса⁵.

Доказательство изоморфности локальных колец проводится стандартными приемами, разработанными в конечномерной теории особенностей гладких функций [26]. Эти приемы легко переносятся на бесконечномерные пространства в случае фредгольмовых особенностей.

Доказательство остальных частей утверждения – дословное повторение соответствующих пунктов доказательств теорем 1.1.1 и 1.1.2.

Следующий шаг в развитии данной схемы – замена линейных функционалов p_j , $p_j(x) = \langle x, e_j \rangle$ (см. (2.1.5)) на более сложные линейные и нелинейные функционалы. Например, в двухточечной краевой задаче, отвечающей потенциалу $V(x) = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + u(x) \right) dt$, можно, следуя Морсу и Ботту [7], ввести ключевую функцию $\widetilde{W}$,

$$\widetilde{W}(\xi) := \inf_{x: \widetilde{p}_j(x) = \xi_j, j=1, \dots, n} V(x),$$

где $\widetilde{p}_j(x) := x(j/(n+1))$. Функция $\widetilde{W}$ стабильно гладко эквивалентна функции (2.1.5), определенной посредством системы векторов $\{e_j(t) = \sqrt{2} \sin(\pi j s)\}_{j=1}^n$ (функции называются стабильно эквивалентными, если они становятся эквивалентными после добавления к ним невырожденных квадратичных форм дополнительных переменных [26]). Более подробные сведения о редукциях в данной краевой задаче имеются в § 2.4 (см. также [39], [40]).

В следующем параграфе будет рассматриваться редуцирующая схема Морса–Ботта в ее естественном окружении.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.1. Условие собственности отображения (2.1.6) можно заменить на любое другое условие, гарантирующее существование условных экстремалей в слоях $p^{-1}(\xi)$, $p(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x))^T$. Например, если пространство E рефлексивно, то достаточно потребовать коэрцитивности V (наряду с выпуклостью) вдоль каждого слоя.

В этих же целях можно применять и известное условие (C) Пале–Смейла [41].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.2. Если на H зафиксировано ортогональное действие некоторой группы G с условием инвариантности подпространств, F , E , $N = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ и функционала V относительно этого действия, то ключевая функция (2.1.5) будет инвариантной относительно действия G на N .

⁴ Локальное кольцо особенности гладкого функционала V в критической точке a определяется как фактор кольца ростков гладких функционалов в точке a по идеалу, порожденному функционалами вида $\alpha(f(x))$, где α – произвольный гладкий функционал, заданный на произвольной окрестности нуля в пространстве F ($f = \text{grad}_H V$).

⁵ Индекс Морса в бесконечномерном случае определяется как максимальная размерность подпространства, на котором отрицательно определен второй дифференциал.

§ 2.2. Редукция Морса–Ботта

Пусть $\mathcal{M}$ – компактное связное риманово C^∞ -многообразие без края и a, b – фиксированная пара точек на $\mathcal{M}$. Через $\mathcal{X}$ обозначим множество H^1 -кривых $x: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$, соединяющих a и b ($x(0) = a, x(1) = b$). Принадлежность кривой $x = x(t)$ классу H^1 означает ее абсолютную непрерывность и суммируемость скалярного квадрата скорости $|\dot{x}(t)|^2 = (\dot{x}(t), \dot{x}(t))_{x(t)}$. Через $(\cdot, \cdot)_a$ обозначается скалярное произведение в касательном пространстве $T_a(\mathcal{M})$, $a \in \mathcal{M}$. В $\mathcal{X}$ естественно вводится бесконечномерная риманова структура [41] с модельным гильбертовым пространством

$$X = \{u(t) \in H^1([0, 1], \mathbb{R}^m) : u(0) = u(1) = 0\}, \quad m = \dim \mathcal{M}.$$

Функционал действия $V(x) = \int_0^1 \frac{\dot{x}^2}{2} dt$ на $\mathcal{X}$ является гладким и достигает своего минимального значения на кратчайшей кривой γ , соединяющей a и b [6], [7], [41]. Пусть c – регулярное значение V , $V(\gamma) > c$. Нетрудно установить существование такой величины $\varepsilon > 0$, что для любой кривой $x = x(t)$ в $\{V \leq c\}$ и любой пары точек $t, s \in [0, 1]$, для которой $|t - s| < \varepsilon$, точки $x(t)$ и $x(s)$ принадлежат геодезически выпуклому открытому подмножеству в $\mathcal{M}$. Пусть целое положительное число n таково, что $1/(n+1) < \varepsilon$. Рассмотрим $\mathcal{M}^n = \underbrace{\mathcal{M} \times \cdots \times \mathcal{M}}_n$ и подмножество $\mathcal{N}_c \subset \mathcal{M}^n$, состоящее из таких точек $(q_1, \dots, q_n)$, для которых

$$\sum_{j=0}^n \int_{j/(n+1)}^{(j+1)/(n+1)} |\dot{\gamma}_{j,q}|^2 dt \leq 2c,$$

$\gamma_{j,q}$ – кратчайшая параметрическая кривая с параметром $t \in [j/(n+1), (j+1)/(n+1)]$, соединяющая q_j и q_{j+1} ($q_0 = a, q_{n+1} = b$).

Легко увидеть, что отображения

$$\begin{aligned} p: \{V \leq c\} &\rightarrow \mathcal{N}_c, & \varphi: \mathcal{N}_c &\rightarrow \{V \leq c\}, \\ p(x) &= (x(1/(n+1)), \dots, x(n/(n+1)))^T, \\ \varphi(q)(t) &:= \gamma_{j,q}(t) \quad \forall t \in [j/(n+1), (j+1)/(n+1)], \end{aligned}$$

являются гладкими⁶. При этом $p(\varphi(q)) \equiv q$ и $V(\varphi(q)) = \inf_{x: p(x)=q} V(x)$.

Нетрудно проверить, что $\varphi(q)$ – невырожденная точка минимума для V .

Отображения p и φ гомотопически обратны друг другу. Процедура стягивания слоев $p^{-1}(q)$ в точки $\varphi(q)$ детально описана в [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.1. Если на $\mathcal{M}$ задано действие группы G с условиями $g(a) = a$, $g(b) = b \quad \forall g \in G$ и инвариантностью функционала действия относительно преобразований

$$x(t) \mapsto g(x(t)) \quad \forall g \in G,$$

то ключевая функция W , $W(q) := V(\varphi(q))$, будет инвариантной относительно преобразований $(q_1, \dots, q_n) \rightarrow (g(q_1), \dots, g(q_n))$.

⁶Гладкость отображения в точке края означает существование локального гладкого продолжения отображения за край (на открытую окрестность заданной точки края в объемлющем многообразии).

§ 2.3. Общая схема конечномерной редукции

Редукции Ляпунова–Шмидта и Морса–Ботта можно включить как частные случаи в общую схему.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.1. Пусть V – гладкий функционал, заданный на гладком банаховом многообразии $\mathcal{X}$. *Конечномерной редукцией* V на открытом подмножестве $\mathcal{O} \subset \mathcal{X}$ называется тройка $\{p, \varphi, \mathcal{N}\}$, в которой $\mathcal{N}$ – гладкое конечномерное многообразие, p – гладкая субмерсия из $\mathcal{O}$ на $\mathcal{N}$, φ – гладкое отображение из $\mathcal{N}$ в $\mathcal{O}$, секущее p ($p \circ \varphi = I$), при условии выполнения следующих двух требований:

- 1) $\varphi(\xi)$ – единственная критическая точка сужения $V|_{p^{-1}(\xi)} \quad \forall \xi \in \mathcal{N}$;
- 2) $\varphi(\xi)$ – невырожденная критическая точка $V|_{p^{-1}(\xi)} \quad \forall \xi \in \mathcal{N}$ (невырожденность критической точки означает невырожденность второго дифференциала

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(V|_{p^{-1}(\xi)})(\varphi(\xi))(h, h), \quad h \in T_{\varphi(\xi)}(p^{-1}(\xi))$$

как квадратичной формы на линейном пространстве).

Если к условиям определения 2.3.1 добавлено требование “ $\varphi(\xi)$ – точка глобального минимума $V|_{p^{-1}(\xi)} \quad \forall \xi \in \mathcal{N}$ ”, то редукция называется *эллиптической*.

Как и ранее, функция W

$$(2.3.1) \quad W(\xi) := \inf_{x: p(x)=\xi} V(x) = V(\varphi(\xi))$$

называется *ключевой*.

ТЕОРЕМА 2.3.1. Пусть $\{p, \varphi, \mathcal{N}\}$ – эллиптическая конечномерная редукция гладкого функционала V на области $\mathcal{O}$ гладкого банахова многообразия $\mathcal{X}$.

Тогда отображение (маргинальное) φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами критических точек маргинальной функции (2.3.1) и функционала V . При этом соответствующие друг другу критические точки одновременно являются либо вырожденными, либо нет. В случае невырожденности соответствующие критические точки имеют одинаковые значения индексов Морса.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.1. Снятие требования эллиптичности в формулировке теоремы 2.3.1 приводит к снятию утверждения о совпадении значений индексов Морса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из условия теоремы следует, что подмножество $\mathcal{L} = \{\varphi(\xi)\}_{\xi \in \mathcal{N}}$ является гладким подмногообразием в $\mathcal{X}$. Если $\bar{x} = \varphi(\xi)$, то $T_{\bar{x}}(\mathcal{X}) = T_{\bar{x}}(\mathcal{L}) \dot{+} T_{\bar{x}}(p^{-1}(\xi))$. Пусть $h = h_1 + h_2$, $h_1 \in T_{\bar{x}}(\mathcal{L})$, $h_2 \in T_{\bar{x}}(p^{-1}(\bar{\xi}))$. Так как $\bar{x}$ – критическая точка для $V|_{p^{-1}(\bar{\xi})}$, то $\frac{\partial V}{\partial x}(\bar{x})h_2 = 0$ и $\frac{\partial V}{\partial x}(\bar{x})h = \frac{\partial V}{\partial x}(\bar{x})h_1$. Из равенства $W(\xi) = V(\varphi(\xi))$ получаем $\frac{\partial W}{\partial \xi}(\xi)\eta = \frac{\partial V}{\partial x}(\bar{x})h_1$, где η – такой вектор в $T_{\bar{\xi}}(\mathcal{N})$, для которого $h_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\bar{\xi})\eta$. Следовательно, равенство нулю дифференциала

$\frac{\partial V}{\partial x}(\bar{x})$ равносильно равенству нулю дифференциала $\frac{\partial W}{\partial \xi}(\xi)$, что и доказывает первое утверждение теоремы.

Для доказательства остальных утверждений положим $\mathcal{N} = \mathbb{R}^n$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ (в силу локальности утверждений это предположение не ограничивает общности рассуждения). Далее, заметим, что из равенства $W(\xi) = V(\varphi(\xi))$ вытекает

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\bar{\xi}) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\bar{x}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}(\bar{\xi}), \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(\bar{\xi}) \right),$$

а из тождества

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x}(\varphi(\xi)) \right|_{T_{\varphi(\xi)}(p^{-1}(\xi))} = 0$$

следует

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\bar{x})(h_1, h_2) = 0, \quad h_1 \in T_{\bar{x}}(\mathcal{L}), \quad h_2 \in T_{\bar{x}}(p^{-1}(\bar{\xi})).$$

Но так как, по условию, квадратичная форма

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\bar{x})(h_2, h_2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(V|_{p^{-1}(\bar{\xi})}(\bar{x}))(h_2, h_2)$$

является невырожденной, то невырожденность формы

$$(2.3.2) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\bar{x})(h, h) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\bar{x})(h_1, h_1) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\bar{x})(h_2, h_2)$$

равносильна невырожденности первого слагаемого в правой части (2.3.2). И так как

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}(\bar{\xi})(\eta, \eta) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\bar{x})(h_1, h_1), \quad h_1 = \sum \eta_j \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(\bar{\xi}), \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)^T,$$

то невырожденность этого слагаемого равносильна невырожденности W в критической точке $\bar{\xi}$. Второе утверждение доказано.

При выполнении требования эллиптичности форма $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\bar{x})(h_2, h_2)$ будет положительной, и, следовательно, индекс Морса левой части (2.3.2) совпадает с индексом Морса формы $\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}(\bar{\xi})(\eta, \eta)$. Теорема полностью доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.2. Редукция $\{\tilde{p}, \tilde{\varphi}, \tilde{\mathcal{N}}\}$ функционала V на области $\mathcal{O} \subset \mathcal{X}$ называется *расширением* редукции $\{p, \varphi, \mathcal{N}\}$ этого же функционала V на области $\mathcal{O}$ (соответственно, $\{p, \varphi, \mathcal{N}\}$ называется *сужением* редукции $\{\tilde{p}, \tilde{\varphi}, \tilde{\mathcal{N}}\}$), если существует такая редукция $\{\pi, \psi, \mathcal{N}\}$ для $\tilde{W}$ на $\tilde{\mathcal{N}}$, что $p = \pi \circ \tilde{p}$ и $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.2. В условиях определения 2.3.2 имеет место соотношение $W(\xi) = \tilde{W}(\psi(\xi))$, где $W(\xi) = V(\varphi(\xi))$ и $\tilde{W}(\tilde{\xi}) = V(\tilde{\varphi}(\tilde{\xi}))$.

В случае эллиптичности всех редукций получаем $W(\xi) = \inf_{\tilde{\xi}: \pi(\tilde{\xi})=\xi} \tilde{W}(\tilde{\xi})$.

ТЕОРЕМА 2.3.2. Пусть пара редукций $\{p, \varphi, \mathcal{N}\}$ и $\{\tilde{p}, \tilde{\varphi}, \tilde{\mathcal{N}}\}$ функционала V на области $\mathcal{O} \subset \mathcal{X}$ имеют общее расширение (то есть обе редукции являются сужениями третьей редукции). Тогда локальные кольца особенностей функций W и $\tilde{W}$ в критических точках $a \in \mathcal{N}$ и $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{N}}$, в которых $\varphi(a) = \tilde{\varphi}(\tilde{a})$, изоморфны.

Доказательство достаточно провести лишь в случае, в котором $\{p, \varphi, \mathcal{N}\}$ – сужение $\{\tilde{p}, \tilde{\varphi}, \tilde{\mathcal{N}}\}$. Но в этом случае данное утверждение является следствием теоремы 1.1.2 (см. замечание 2.3.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.3. Из результатов работы [42] следует, что при $\dim \mathcal{N} = \dim \tilde{\mathcal{N}}$ и эллиптичности обеих редукций ростки функций W и $\tilde{W}$ в точках a и $\tilde{a}$, в которых $\varphi(a) = \tilde{\varphi}(\tilde{a})$, гладко эквивалентны. Создается впечатление, что W и $\tilde{W}$ должны быть и глобально гладко эквивалентными. Однако автор не располагает доказательством этого утверждения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.4. Пусть на $\mathcal{O} \subset \mathcal{X}$ и $\mathcal{N}$ зафиксированы действия $G \times \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ и $G \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ группы G с условиями инвариантности V относительно действия G на $\mathcal{O}$ и эквивариантности субмерсии относительно обоих действий (здесь $\{p, \varphi, \mathcal{N}\}$ – редукция для V на $\mathcal{O}$). Тогда ключевая функция $W(\xi) := V(\varphi(\xi))$ инвариантна относительно заданного действия G на $\mathcal{N}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.5. Для установления условий существования редукций функционала V на тех или иных областях многообразия $\mathcal{X}$ можно использовать дополнительные бесконечномерные римановы оснащения на $\mathcal{X}$. При этом могут, в отличие от конечномерного случая, появляться специфические трудности, связанные с отличием основной топологии на $\mathcal{X}$ от топологии, порожденной римановой метрикой.

Эти трудности иногда можно преодолеть, потребовав от функционала V выполнения дополнительных свойств типа фредгольмовости второго ковариантного дифференциала и т.п. Соответствующие точные определения и утверждения имеются в [40].

§ 2.4. Упругие равновесия эйлера стержня

Упругое равновесие продольно сжатого прямолинейного плоского (эйлерова) стержня описывается уравнением [13], [43]

$$(2.4.1) \quad \ddot{x} + \lambda \sin x = 0,$$

в котором λ – параметр силы продольного сжатия стержня, $x(s)$ – угловая функция (угол между касательной к упругой линии и вертикалью), s – параметр длины стержня. Если предположить, что концы стержня жестко закреплены, то к уравнению (2.4.1) необходимо добавить краевое условие

$$(2.4.2) \quad x(0) = x(1) = 0$$

(длина стержня предполагается единичной).

Пусть E – пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на $[0, 1]$, удовлетворяющих краевому условию (2.4.2). Отображение $f: E \rightarrow F$, $F = C([0, 1])$,

заданное левой частью уравнения (2.4.1), является фредгольмовым индексом нуль и потенциальным. Его потенциалом будет взятый с противоположным знаком функционал полной энергии V

$$(2.4.3) \quad V(x, \lambda) = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \lambda(\cos x - 1) \right) ds.$$

Пусть $p: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение, для которого

$$p(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x)), \quad p_j(x) = \int_0^1 e_j(s)x(s) ds, \quad e_j(s) = \sqrt{2} \sin(\pi j s).$$

Действуя в соответствии с редуцирующей схемой Ляпунова–Шмидта, рассмотрим функцию W

$$(2.4.4) \quad W(\xi, \lambda) := \inf_{x: p(x)=\xi} V(x, \lambda), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Если λ подчинено ограничению

$$(2.4.5) \quad \lambda < \pi^2(n+1)^2,$$

то функция (2.4.4) будет ключевой. Действительно, для функции (2.4.4) имеет место представление

$$W(\xi, \lambda) = V\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \varphi(\xi, \lambda), \lambda\right),$$

в котором вектор $u = \varphi(\xi, \lambda)$ ортогонален (в метрике $L_2([0, 1])$) подпространству $N = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ и является решением уравнения

$$f_*(u, \xi, \lambda) = 0, \quad u \in N^\perp,$$

где

$$f_*(u, \xi, \lambda) := f\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + u, \lambda\right) - \sum_{k=1}^n \left\langle f\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + u, \lambda\right), e_k \right\rangle e_k$$

$\left(\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(s)y(s) ds\right)$. Отображение $f_*(\cdot, \xi, \lambda): E_* \rightarrow F_*$, где $E_* = E \cap N^\perp$, $F_* = F \cap N^\perp$, представимо в виде суммы линейного изоморфизма $u \mapsto \tilde{u}$ и отображения с ограниченным образом. Следовательно, оно является собственным.

Дифференциал отображения $f_*(\cdot, \xi, \lambda)$ в произвольной точке $u \in E_*$ задается соответствием

$$h \mapsto \ddot{h} + \lambda(\cos \bar{x})h - \lambda \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 (\cos \bar{x}) h e_j ds \right) e_j,$$

где $\bar{x} = \sum \bar{\xi}_j e_j + u$. При ограничении (2.4.5) это соответствие задает положительный изоморфизм из E_* на F_* . Данное утверждение является следствием равенства нулю фредгольмова индекса f , соотношения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\bar{x})(h, h) = |\dot{h}|^2 - \lambda \langle (\cos \bar{x})h, h \rangle, \quad h \in E_*,$$

и оценок $|\dot{h}|^2 > \pi^2(n+1)^2|h|^2$, $|\langle (\cos x)h, h \rangle| < |h|^2$ (все скалярные произведения и нормы взяты из пространства $H = L_2([0, 1])$). Следовательно, выполнены все условия теоремы 2.1.1 и поэтому от (2.4.3) к (2.4.4) является редуцирующим.

Таким образом, анализ равновесных конфигураций эйлера стержня сводится к анализу поведения ключевой функции (2.4.4).

В этой же задаче можно воспользоваться редукцией Морса–Ботта, после применения которой (при ограничении (2.4.5)) анализ решений уравнения (2.4.1) сводится к анализу гладкой функции $\widetilde{W}$

$$\widetilde{W}(\xi, \lambda) := \inf_{x: \widetilde{p}(x) = \xi} V(x, \lambda), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $\widetilde{p}(x) = (x(1/(n+1)), \dots, x(n/(n+1)))$. Значения маргинального отображения в этой редуцирующей схеме “выходят” в более широкое пространство функций, допускающих разрывы производных в точках $1/(n+1), 2/(n+1), \dots, n/(n+1)$. Сравнение обеих редукций можно провести, если их рассмотреть при $E = F = H = \overset{\circ}{W}_2^1$ ($\overset{\circ}{W}_2^1$ – пространство соболевских функций класса $W_2^1([0, 1])$, удовлетворяющих краевому условию (2.4.3)). Обе редукции имеют общее расширение, полученное на основе объединения компонент редуцирующих отображений p и $\widetilde{p}$. Таким образом, можно утверждать, что ключевые функции W и $\widetilde{W}$ имеют одинаковые топологические и аналитические свойства (см. [39], [40]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.1. Так как уравнение (2.4.1) интегрируемо [43], то маргинальное отображение и ключевая функция допускают в данном случае явное представление через эллиптические функции Якоби и интегралы от них. Соответствующие точные вычисления проведены О. Н. Левченко [49], [50] (см. §2.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.2. При переходе λ через первое критическое значение $\lambda = \pi^2$ (критическую нагрузку Эйлера) происходит потеря устойчивости стержня в его нулевом (прямолинейном) состоянии. Анализ возникающей при этом бифуркации устойчивых ненулевых состояний сводится к изучению локального поведения функции W

$$W(\xi, \lambda) := \inf_{x: \langle x, e_1 \rangle = \xi} V(x, \lambda), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Поведение $W(\xi, \lambda)$ (при (ξ, λ) , близких к точке $(0, \pi^2)$) в основном определяется главной частью этой функции, имеющей вид $-(\delta/2)\xi^2 + a\xi^4$, $a > 0$, $\delta = \lambda - \lambda_1$. Точно такую же главную часть имеет и ритцевская аппроксимация потенциала W_R , $W_R(\xi, \lambda) := V(\xi e_1, \lambda)$.

§ 2.5. Редукция Морса–Ботта для кирхгофа стержня

Задача о формах равновесия пространственного упругого стержня в модели Кирхгофа [43], [44] исследовалась многими на основе кинетической аналогии с задачей о движении твердого тела вокруг неподвижной точки [43]–[45]. При этом детально были проанализированы ситуации, отвечающие случаям полной интегрируемости уравнений равновесия. В [46]–[48] были исследованы бифуркации закритических равновесий кирхгофа стержня локальным методом Ляпунова–Шмидта без предположения интегрируемости.

Применение метода Ляпунова–Шмидта требует предварительного введения системы координат на окрестности единицы в $SO(3)$. Для исследования поведения кирхгофа стержня в целом, по-видимому, целесообразнее использовать метод Морса–Ботта [49].

Равновесные конфигурации прямолинейного и продольно сжатого кирхгофа стержня длины единица с жестким закреплением концов описываются краевой задачей

$$(2.5.1) \quad \begin{cases} A\dot{\omega} + [A\omega, \omega] + \lambda[r_3, f^{-1}r_3] = 0, \\ f(0) = f(1) = I. \end{cases}$$

Здесь λ – параметр сжимающей нагрузки, $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор упругости в поперечном сечении ($A_j > 0$), для которого выполняется условие Е. Л. Николаи: $A_3^{-1} > \frac{1}{2}(1 + \nu)(A_1^{-1} + A_2^{-1})$ (ν – коэффициент Пуассона), $\omega(s)$ – угловая скорость движения нормального сечения стержня в зависимости от параметра длины s средней линии стержня, записанная в координатах тройки ортов $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$, направленных по осям инерции нормального сечения, $r_3 = f_3(0)$. Орт $f_3(s)$ является касательным вектором к средней линии стержня, $f(s)$ – матричная функция, столбцами которой являются векторы $f_1(s), f_2(s)$ и $f_3(s)$ ($f_j(s) = f(s)r_j$).

Уравнение (2.5.1) является уравнением Эйлера–Лагранжа экстремалей функционала полной энергии V

$$(2.5.2) \quad V(f, \lambda) := \frac{1}{2} \langle A\omega, \omega \rangle + \lambda \langle r_3, f r_3 \rangle$$

$$\left(\text{здесь } \langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 (\varphi(s), \psi(s)) ds \right).$$

Вектор $\omega = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3$ канонически отождествляется [27] с матрицей

$$(2.5.3) \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

для которой имеет место представление

$$\Omega(s) = f^{-1}(s) \frac{df}{ds}(s).$$

Пусть $\mathcal{M}$ – банахова группа Ли C^2 -петель на $\mathrm{SO}(3)$ в единице:

$$\mathcal{M} = \{f \in C^2([0, 1], \mathrm{SO}(3)) : f(0) = f(1) = I\}.$$

Отображение $p: f(s) \mapsto \tau(s) := f(s)r_3$ задает гладкую субмерсию из $\mathcal{M}$ на гладкое банахово многообразие $\widetilde{\mathcal{M}}$ петель класса C^2 на двумерной сфере S^2 :

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \{\tau \in C^2([0, 1], S^2) : \tau(0) = \tau(1) = r_3\}.$$

Прообраз $p^{-1}(\tau)$ любой петли $\tau \in \widetilde{\mathcal{M}}$ является орбитой правого действия

$$G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad (g(s), f(s)) \mapsto f(s)g(s),$$

банаховой группы Ли $G = \{g : g(s) = \exp(\varphi(s)R_3)\}$. Через R_3 обозначается представление вида (2.5.3) для вектора r_3 . Функция $\varphi(s)$ принадлежит классу C^2 и для нее выполняется условие

$$(2.5.4) \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, $p^{-1}(\tau)$ состоит из счетного набора компонент связности $\mathcal{N}_k(\tau)$, определяемых выбором k в (2.5.4).

ТЕОРЕМА 2.5.1. *В случае симметричного стержня ($A_1 = A_2$) имеет место представление*

$$(2.5.5) \quad V(fg, \lambda) = \int_0^1 \left(A_1 \frac{|\dot{\tau}|^2}{2} + A_3 \frac{(\omega_3 + \dot{\varphi})^2}{2} \right) ds + \lambda \langle \tau, r_3 \rangle,$$

где $g(s) = \exp(\varphi(s)R_3)$, ω_3 – третья компонента угловой скорости, $|\dot{\tau}(s)|$ – кривизна средней линии стержня.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из соотношения $|\dot{\tau}(s)|^2 = \omega_1^2(s) + \omega_2^2(s)$, вытекающего из равенства

$$\tau(s) = f(s)r_3, \quad |\dot{f}(s)r_3| = |f^{-1}(s)\dot{f}(s)r_3| = |\Omega r_3| = |[\omega, r_3]|$$

и соотношения

$$(fg)^{-1} \frac{d}{ds} (fg) = g^{-1} f^{-1} (\dot{f}g + f\dot{g}) = g^{-1} (\Omega + \dot{\varphi}R_3)g.$$

Из представления (2.5.5) получаем, что $V|_{p^{-1}(\tau)}$ имеет ровно по одной точке минимума на каждой компоненте $\mathcal{N}_k(\tau)$. Причем $f \in \mathcal{N}_k(\tau)$ является точкой минимума $V|_{p^{-1}(\tau)}$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$(2.5.6) \quad \int_0^1 \omega_3^2 ds = c_k^2,$$

где $c_k = 2\pi k + \int_0^1 \omega_3 ds$ (интеграл $\int_0^1 \omega_3 ds$ является инвариантом правого действия G на $\mathcal{M}$). Нетрудно установить, что ограничение $V|_{p^{-1}(\tau)}$ является геодезически выпуклым в бесконечномерной римановой метрике, в которой расстояние между $f(s)$ и $f(s)g(s)$, $g(s) = \exp(\varphi(s)R_3)$, измеряется интегралом $\int_0^1 \varphi^2(s) ds$. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.5.2. Пусть $\mathcal{O} = \left\{ f \in \mathcal{M} : \left| \int_0^1 \omega_3 ds \right| < \pi \right\}$. Тогда функционал $\tilde{V}$

$$\tilde{V}(\tau, \lambda) := \inf_{f: f \in \mathcal{O} \cap p^{-1}(\tau)} V(f, \lambda), \quad \tau \in p(\mathcal{O}),$$

является гладким и для него имеет место представление

$$(2.5.7) \quad \tilde{V}(\tau, \lambda) = \int_0^1 \left(A_1 \frac{|\dot{\tau}|^2}{2} + \lambda(\tau, r_3) \right) ds + \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \omega_3 ds \right)^2.$$

Данная теорема означает возможность редукции (бесконечномерной), позволяющей сводить изучение поведения V на области $\mathcal{O}$ к изучению $\tilde{V}$ на области $p(\mathcal{O}) \subset \widetilde{\mathcal{M}}$. Из геодезической выпуклости V на $p^{-1}(\tau)$ следует, что критические точки V на $\mathcal{O}$ взаимно однозначно соответствуют критическим точкам $\tilde{V}$ на $p(\mathcal{O})$. При этом невырожденные критические точки переходят в невырожденные и только невырожденные с сохранением значений индекса Морса, а соответствующие друг другу вырожденные критические точки имеют изоморфные локальные кольца особенностей.

Если $\lambda < 4\pi^2$, то дальнейший анализ функционала (2.5.7) можно осуществить через конечномерную редукцию Морса–Ботта к ключевой функции W

$$(2.5.8) \quad W(\xi, \lambda) := \inf_{\tau: \tau(1/2) = \xi} \tilde{V}(\tau, \lambda), \quad \xi \in S^2.$$

ТЕОРЕМА 2.5.3. Если $\lambda < 4\pi^2$, то функция (2.5.8) является гладкой на $S^2 \setminus \{-r_3\}$. При этом ее критические точки взаимно однозначно соответствуют критическим точкам $\tilde{V}$ на $p(\mathcal{O})$ с сохранением значений индексов Морса и типов локальных колец особенностей.

Доказательство вытекает из теорем 2.3.1, 2.3.2 и 2.1.1 (см. [40]).

Функцию (2.5.8) можно получить в явном виде [49], [50]. Действительно, маргинальное отображение $\xi \mapsto \tau_\xi$ здесь допускает представление в виде

$$\tau_\xi(s) = (\cos \varphi(s))r_3 + (\sin \varphi(s))r, \quad r \perp r_3,$$

где $\varphi(s)$ получено склейкой решений $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ уравнения

$$(2.5.9) \quad \ddot{\varphi} + \lambda \sin \varphi = 0,$$

отвечающих краевым условиям $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(1/2) = \psi$ и $\varphi_2(1/2) = \psi$, $\varphi_2(1) = 0$, $\psi = \arccos(r_3, \xi)$. Произведя в уравнении (2.5.9) стандартную подстановку [13], [43]

$$(2.5.10) \quad \varphi_1 = 2 \arcsin(k \sin u),$$

где k – константа, $0 < k < 1$, получим, что u является решением уравнения $\dot{u} = \lambda^{1/2}(1 - k^2 \sin^2 u)^{1/2}$. Следовательно,

$$(2.5.11) \quad u(s) = \text{am}(\sqrt{\lambda s}; k),$$

где $\operatorname{am}(\sqrt{\lambda}s; k)$ – так называемая амплитуда, полученная обращением эллиптического интеграла первого рода (в нормальной тригонометрической форме Лежандра):

$$\sqrt{\lambda}s = F(u; k) := \int_0^u \frac{dy}{(1 - k^2 \sin^2 y)^{1/2}}.$$

Из (2.5.10) и (2.5.11) получаем явную формулу решения

$$\varphi_1(s) = 2 \arcsin(k \operatorname{sn}(\sqrt{\lambda}s; k)),$$

где $\operatorname{sn}(\tau; k) := \sin \operatorname{am}(\tau; k)$ – эллиптический синус, $k = \sin(\psi/2) / \operatorname{sn}(\sqrt{\lambda}/2; k)$.

Для производной функции φ_1 получаем представление

$$\dot{\varphi}_1(s) = 2\sqrt{\lambda} \operatorname{cn}(\sqrt{\lambda}s; k),$$

где $\operatorname{cn}(\tau; k) = \cos \operatorname{am}(\tau; k)$ – эллиптический косинус. Соответственно, для лагранжиана $L = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \lambda(\cos \varphi - 1)$ на решении $\varphi = \varphi_1(s)$ имеем представление

$$L = 2\lambda k^2 (\operatorname{cn}^2(\sqrt{\lambda}s; k) - \operatorname{sn}^2(\sqrt{\lambda}s; k)) = 2\lambda k^2 (2 \operatorname{cn}^2(\sqrt{\lambda}s; k) - 1).$$

Решение $\varphi = \varphi_2(s)$ уравнения (2.5.10) получается продолжением $\varphi_1(s)$ с интервала $[0, 1/2]$ на интервал $[1/2, 1]$ по симметрии: $\varphi_2(s) = \varphi_1(1 - s)$. Следовательно, $\int_0^1 L ds = 2 \int_0^{1/2} L ds$, и для ключевой функции (2.5.8) получаем представление

$$W(\xi, \lambda) = 4\lambda k^2 \left(2 \int_0^{1/2} \operatorname{cn}^2(\sqrt{\lambda}s; k) ds - \frac{1}{2} \right).$$

§ 2.6. Равновесия тонкой упругой пластины

Равновесное состояние упругой прямолинейной пластины, продольно сжатой и шарнирно закрепленной на крае, описывается уравнениями Кармана (промасштабированными) [51], [52]:

$$(2.6.1) \quad \Delta^2 w - [w, \varphi] + \lambda w_{xx} = \Delta^2 \varphi + \frac{1}{2}[w, w] = 0$$

при краевых условиях

$$(2.6.2) \quad w = \Delta w = \varphi = \Delta \varphi = 0 \Big|_{\partial \Omega_a}.$$

Через w и φ в этих уравнениях обозначены функции прогиба и напряжения пластины, $\Omega_a = [0, a] \times [0, 1]$, Δ – гармонический оператор Лапласа, $[w, \varphi] = w_{xx}\varphi_{yy} + w_{yy}\varphi_{xx} - 2w_{xy}\varphi_{xy}$, λ – параметр нагрузки.

Пусть H^4 – пространство соболевских функций класса W_2^4 , удовлетворяющих (2.6.2). Уравнение (2.6.1) является уравнением Эйлера–Лагранжа экстремалей функционала V

$$(2.6.3) \quad V(w, \varphi, \lambda) = \frac{1}{2}(|\Delta w|^2 - \lambda|w_x|^2 - |\Delta \varphi|^2 - \langle [w, w], \varphi \rangle)$$

на пространстве $H^4 \times H^4$. Здесь $|\varphi|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle := \iint_{\Omega_a} \varphi^2(x, y) dx dy$. Как правило, исследование функционала (2.6.3) проводится через редукцию к функционалу $\widehat{V}$

$$(2.6.4) \quad \widehat{V}(w, \lambda) := \sup_{\varphi: \varphi \in H^4} V(w, \varphi, \lambda).$$

Маргинальное отображение $H^4 \rightarrow H^4 \times H^4$, отвечающее данной редукции, задается соответствием

$$w \mapsto \left(w, -\frac{1}{2}\Delta^{-2}[w, w] \right).$$

Следовательно, для (2.6.4) имеет место представление

$$(2.6.5) \quad \widehat{V}(w, \lambda) = \frac{1}{2}(|\Delta w|^2 - \lambda|w_x|^2) + \frac{1}{8}|\Delta^{-1}[w, w]|^2.$$

Через Δ^{-1} обозначается оператор Грина $\psi \rightarrow \varphi$, где φ – решение уравнения Пуассона $\Delta \varphi = \psi$, $\varphi|_{\partial\Omega_a} = 0$ (см. [53]). В [53] установлено, что оператор Δ действует как изоморфизм из пространства функций φ гильбертовского класса $C^{2+\alpha}(\Omega_a)$, удовлетворяющих условию $\varphi|_{\partial\Omega_a} = 0$, на F_0 – подпространство функций ψ в пространстве $F = C^{0+\alpha}(\Omega_a)$, удовлетворяющих условию согласования:

$$\psi(0, 0) = \psi(a, 0) = \psi(0, 1) = \psi(a, 1) = 0.$$

Обозначим теперь через E банахово пространство $\{w \in H^4 : \Delta^2 w \in F\}$ с нормой $\|w\|_E := \|\Delta^2 w\|_{C^{0+\alpha}(\Omega_a)}$.

Через функционал (2.6.5) в теории упругих оболочек оценивается устойчивость равновесных состояний: состояние устойчиво, если оно реализует точку локального минимума функционала (2.6.5). Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия ($w = 0$) происходит при переходе λ через критическое значение (верхнюю критическую нагрузку):

$$\lambda^*(a) = \sup \left\{ \bar{\lambda} : \frac{\partial^2 \widehat{V}}{\partial w^2}(0, \lambda)(h, h) > 0, \lambda < \bar{\lambda}, h \neq 0 \right\}.$$

Верхняя критическая нагрузка непрерывно и кусочно гладко зависит от длины a пластины. Разрыв производной $\lambda^*(a)$ происходит в точках $a_m = \sqrt{m(m+1)}$, $m = 1, 2, \dots$. При $a = a_m$ и $\lambda = \lambda_m := \lambda^*(a_m)$ в нуле теряется устойчивость по двум модам:

$$e_1 = 2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin(\pi y), \quad e_2 = 2 \sin\left(\frac{(m+1)\pi x}{a}\right) \sin(\pi y).$$

Анализ соответствующих закритических равновесий сводится к изучению критических точек ключевой функции W

$$(2.6.6) \quad W(\xi, \lambda, a) := \inf_{u: u \in \mathcal{O}_*} V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + u, \lambda), \quad \xi \in \mathcal{O}^2$$

(при (λ, a) достаточно близких к (λ_m, a_m)). Здесь $\mathcal{O}^2$ и $\mathcal{O}_*$ — достаточно малые окрестности нулей в $\mathbb{R}^2$ и $E_* = \{u \in E : \langle u, e_1 \rangle = \langle u, e_2 \rangle = 0\}$. Локальный анализ (2.6.6) успешно осуществляется благодаря тому, что имеет место представление

$$W(\xi, \lambda, a) = \frac{1}{2}(\alpha_1(\lambda, a)\xi_1^2 + \alpha_2(\lambda, a)\xi_2^2) + \sum_{i,j=1}^2 h_{i,j}\xi_i^2\xi_j^2 + \dots,$$

где α_1, α_2 — собственные значения оператора $\Delta^2 + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, отвечающие собственным векторам e_1, e_2 ,

$$h_{j,j} = \frac{1}{8}|\Delta^{-1}[e_j, e_j]|^2, \\ h_{1,2} = h_{2,1} = \frac{1}{8}(\langle \Delta^{-1}[e_1, e_1], \Delta^{-1}[e_2, e_2] \rangle + 2|\Delta^{-1}[e_1, e_2]|^2).$$

Из результатов вычислений, опубликованных в [54], следует, что при нескольких начальных значениях m выполняется неравенство

$$(2.6.7) \quad h_{1,2} > (h_{1,1}h_{2,2})^{1/2},$$

благодаря которому можно осуществить полный локальный анализ бифуркации равновесий (см. [55], [56]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6.1. Неравенство (2.6.7) означает положительную определенность формы $\sum_{i,j=1}^2 h_{i,j}\eta_i\eta_j$ в положительной четверти плоскости $\mathbb{R}^2$. Вопрос о знакоопределенности этой формы при произвольном m пока остался открытым.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6.2. Вопрос о существовании нелокальной редукции (гладкого продолжения ключевой функции (2.6.6) на конечную область при $\lambda > \lambda_1$) для прямоугольной пластины тоже пока открыт.

В аналогичной ситуации для круглой пластины вопрос глобальной конечномерной редуцируемости решен положительно [57].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
- [2] Треногин В. А., Сидоров Н. А. Исследование точек бифуркации и нетривиальных ветвей решений нелинейных уравнений // Дифференциальные и интегральные уравнения. № 1. Изд-во Иркутского ун-та, 1972. С. 216–247.
- [3] Красносельский М. А., Бобылев Н. А., Мухамадиев Э. М. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления // ДАН СССР. 1978. Т. 240. № 3. С. 530–533.
- [4] Marsden J. E. On the geometry of the Lyapunov–Schmidt procedure // Lect. Notes in Math. 1979. V. 755. P. 77–82.
- [5] Заваровский Ю. Н. О методе Ляпунова–Шмидта для вариационных задач с параметром. Воронеж: ВГУ, 1981. Деп. в ВИНТИ. № 478-82.
- [6] Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
- [7] Постников М. М. Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971.
- [8] Chillingworth D. A global genericity theorem for bifurcations in variational problems // J. Funct. Anal. 1980. V. 35. P. 251–278.
- [9] Magnus R. J. Universal unfolding in Banach spaces: reduction and stability // Mathematics Report 107. Geneva: Battele, 1977.
- [10] Gromoll D., Meyer W. On differentiable functions with isolated critical points // Topology. 1969. V. 8. P. 361–370.
- [11] Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.
- [12] Бобылев Н. А., Бурман Ю. М. Леммы Морса для функционалов вариационного исчисления // Функц. анализ и его прилож. 1971. Т. 25. № 3. С. 1–11.
- [13] Попов Е. П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. М.: ОГИЗ, 1948.
- [14] Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1988.
- [15] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
- [16] Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. М.: Наука, 1990.
- [17] Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том 2: Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. М.: Наука, 1972.
- [18] Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. М.–Л.: ОНТИ, 1936.
- [19] Ляпунов А. М. Sur les figures d'équilibre peu differentes des éllipsöides d'une masse liquide homogène donée d'un mouvement de rotation, p. 1. С.-Петербург: Зап. Акад. наук, 1906.
- [20] Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Theil 3, Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und Verzweigung ihrer Lösungen // Math. Ann. 1908. P. 65.
- [21] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука.
- [22] Conley C. C., Zehnder E. The Birkhoff–Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnol'd // Invent. Math. 1983. V. 73. P. 33–49.
- [23] Болотин С. В. Периодические решения системы с гироскопическими силами // Прикл. матем. и механ. 1987. Т. 51. № 4. С. 686–687.
- [24] Борисович А. Ю. Редукция задачи о бифуркации минимальных поверхностей к операторным уравнениям и отыскание бифуркаций от катеноида, геликоида, поверхностей Шерка и Эннепера // УМН. 1986. Т. 41. № 5. С. 165–166.
- [25] Койтер В. Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика. Периодический сборник переводов иностр. статей 1960. № 5. С. 99–110.

- [26] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.
- [27] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
- [28] Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.
- [29] Рубановский В. Н., Самсонов В. А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988.
- [30] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. С. 1–304.
- [31] Арнольд В. И. Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела и идеальной жидкости // УМН. 1969. Т. 24. № 3. С. 225–226.
- [31.1] Мищенко А. С. Интегралы геодезических потоков на группах Ли // Функц. анализ и его прилож. 1970. Т. 4. № 3. С. 73–78.
- [31.2] Манаков С. В. Замечания об интегрируемости уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела // Функц. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 4. С. 93–94.
- [31.3] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 2. С. 396–415.
- [31.4] Фоменко А. Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. М.: Изд-во МГУ, 1983.
- [31.5] Вишик С. В., Должанский Ф. В. Аналогии уравнений Эйлера–Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли // ДАН СССР. 1978. Т. 238. № 5. С. 1032–1035.
- [31.6] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли // УМН. 1984. Т. 39. № 32. С. 3–56.
- [31.7] Болсинов А. В. Критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента // ДАН СССР. 1988. Т. 301. № 5. С. 1037–1040.
- [31.8] Богоявленский О. И. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. М.: Наука, 1991.
- [32] Сапронов Ю. И. Многомерные спящие волчки // Глобальный анализ и математическая физика. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. С. 95–109.
- [33] Сапронов Ю. И. Бифуркации стационарных вращений многомерного асимметричного твердого тела из режима спящего волчка // Глобальный анализ и нелинейные уравнения. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1988. С. 141–152.
- [34] Смейл С. Топология и механика // УМН. 1972. Т. 27. № 2. С. 77–133.
- [35] Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере–Шаудера // УМН. 1977. Т. 32. № 4. С. 3–54.
- [36] Banach S., Mazur S. Über mehrdeutige stetige Abbildungen // Studia Math. 1934. № 5. P. 174–178.
- [37] Nash M. Z., Hermander J. E. Global invertibility in nonlinear functional analysis // Fixed Point Theory and Applications. River Edge: World Scientific Publishing, NJ-1992. P. 229–247.
- [38] Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутцкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенные решения операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
- [39] Сапронов Ю. И. Нелокальные конечномерные редукции в вариационных краевых задачах // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 1. С. 94–103.
- [40] Sapronov Yu. I. Smooth marginal analysis of bifurcation of extremals // Geometry in Partial Differential Equations. Singapore: World Scientific Publishing, 1994. P. 345–375.
- [41] Клингенберг В. Лекция о замкнутых геодезических. М.: Мир, 1982.
- [42] Weinstein A. Singularities of families of functions // Differential Geometrie in Grossen. 1971. V. 4. Oberwolfach. P. 323–330.
- [43] Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: НКТИ СССР, 1935.

- [44] Николаи Е. Л. К задаче об упругой линии двойкой кривизны // Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. С. 45–277.
- [45] Илюхин А. А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наукова думка, 1979.
- [46] Заваровский Ю. Н., Сапронов Ю. И. Нормальная форма ключевой функции в задачах о критических нагрузках упругих стержней. Воронеж, 1981. Деп. в ВИНТИ. № 4185-81.
- [47] Заваровский Ю. Н. Ветвление решений уравнения Кирхгофа симметричного пространственного стержня. Воронеж: ВГУ, 1981. Деп. в ВИНТИ. № 4610-81.
- [48] Заваровский Ю. Н. Нормальная форма ключевой функции обобщенного уравнения Кирхгофа // УМН. 1983. Т. 38. № 3. С. 177–178.
- [49] Левченко О. Н. Маргинальный анализ равновесия эйлера стержня // Тезисы 6-й Межвузовской научной конференции молодых ученых. Липецк, 1992.
- [50] Levchenko O. N., Sapronov Yu. I. Morse-Bott reduction for a symmetric Kirchhoff rod // Methods and Applications of Global Analysis. Voronezh Univ. Press, 1993. P. 95–100.
- [51] Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989.
- [52] Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956.
- [53] Волков Е. А. О решении краевых задач для уравнений Пуассона в прямоугольнике // ДАН СССР. 1962. Т. 147. № 2. С. 13–16.
- [54] Holder E. J., Schaeffer D. Boundary conditions and mode jumping in the Karman equations // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. № 3. P. 446–457.
- [55] Сапронов Ю. И. Многомодовые бифуркации упругих равновесий // Прикл. матем. и механ. 1988. Т. 52. № 6. С. 997–1006.
- [56] Сапронов Ю. И. Двумодовая бифуркация решений уравнения Кармана // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1078–1081.
- [57] Гнездилов А. В., Сапронов Ю. И. Нелокальные конечномерные редукции в теории изгиба тонких упругих пластин // Понтрягинские чтения - V. Тезисы докладов. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1994.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
06.12.1994