Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, f -полиномы простых многогранников
и двупараметрический род Тодда, *УМН*, 2008, том 63,
выпуск 3, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9211>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:15:22

f-полиномы простых многогранников и дупараметрический род Тодда

В. М. Бухштабер

Выпуклый n -мерный многогранник P^n называется *простым*, если в каждой его вершине сходится в точности n гиперграней. Сведения о простых многогранниках см. в [1], [2]. Два многогранника называются *комбинаторно эквивалентными*, если существует взаимно однозначное соответствие между их множествами граней, сохраняющее отношение включения. Класс комбинаторно эквивалентных выпуклых многогранников называется *комбинаторным многогранником*.

Обозначим через $\mathcal{P}_{2n}$ абелеву группу, порожденную комбинаторными простыми n -мерными многогранниками, в которой сумма соответствует несвязному объединению многогранников, а ноль – пустому множеству.

Прямое произведение $P_1^n \times P_2^n$ простых многогранников P_1^n и P_2^n также является простым многогранником.

Через $\mathcal{P} = \sum_{2n \geq 0} \mathcal{P}_{2n}$ обозначим градуированное коммутативное ассоциативное кольцо, в котором умножение соответствует прямому произведению простых многогранников, а единицей является P^0 = (точка). Каждая грань простого многогранника является простым многогранником и пересечением в точности $(n - k)$ гиперграней.

ЛЕММА 1. *Линейный оператор $d: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, сопоставляющий простому многограннику P^n несвязное объединение всех его гиперграней, является дифференцированием кольца $\mathcal{P}$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *f -полиномом (face-polynomial) простого многогранника P^n называется однородный полином*

$$f(P^n) = \alpha^n + f_{n-1,1}\alpha^{n-1}t + \cdots + f_{1,n-1}\alpha t^{n-1} + f_{0,n}t^n, \quad (1)$$

где $f_{k,n-k}$ – число граней размерности k в P^n .

ТЕОРЕМА 3. 1) *Линейное отображение $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}[\alpha, t]$, заданное формулой (1), является кольцевым гомоморфизмом таким, что*

$$f(dP^n) = \frac{\partial}{\partial t} f(P^n). \quad (2)$$

2) *Пусть $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}[\alpha, t]$ – линейное отображение такое, что $F(P^n)|_{t=0} = \alpha^n$ и $F(dP^n) = \frac{\partial}{\partial t} F(P^n)$. Тогда $F(P^n) = f(P^n)$.*

ТЕОРЕМА 4. *$f(P^n)(\alpha, t) = f(P^n)(-\alpha, \alpha + t)$, где P^n – простой многогранник.*

Соотношение (2) позволяет провести доказательство этой теоремы индукцией по n и получить вывод соотношений Дена–Соммервиля из формулы для эйлеровой характеристики комбинаторной сферы $S^{n-1} = \partial P^n$.

Положим $h(P^n)(\alpha, t) = f(P^n)(\alpha - t, t)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. 1) $h(P^n)(\alpha, t) = h(P^n)(t, \alpha)$.

2) *Образ кольцевого гомоморфизма $h: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}[\alpha, t]$, заданного формулой $P^n \rightarrow h(P^n)(\alpha, t)$, порожден полиномами $h(\Delta^1) = \alpha + t$ и $h(\Delta^2) = \alpha^2 + \alpha t + t^2$.*

3) *Пусть $H: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}[\alpha, t]$ – такое линейное отображение, что $H(P^n)|_{t=0} = \alpha^n$ и $H(dP^n) = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial t} \right) H(P^n)$. Тогда $H(P^n) = h(P^n)$.*

О сериях простых многогранников см. в [3]. Рассмотрим серию многогранников Сташефа (ассоциэдров) $\mathcal{A}s = \{As^n = K_{n+2}, n \geq 0\}$ и положим $U(\alpha, t, x; \mathcal{A}s) = \sum_{n \geq 0} f(As^n) x^{n+2}$. Каждая гипергрань многогранника As^n имеет вид $As^i \times As^j$, где $i \geq 0$, $i + j = n - 1$. Следовательно, $dAs^n = \sum_{i+j=n-1} (i+2)(As^i \times As^j)$ и $\frac{\partial}{\partial t} f(As^n) = \sum_{i+j=n-1} (i+2)f(As^i)f(As^j)$.

ТЕОРЕМА 6 [4]. Ряд $U(t, x) = U(\alpha, t, x; As)$ является решением уравнения Хопфа

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, x) = U(t, x) \frac{\partial}{\partial x} U(t, x) \quad (3)$$

с начальным условием $U(0, x) = x^2/(1 - \alpha x)$ и, следовательно, удовлетворяет квадратному уравнению

$$t(\alpha + t)U^2 - (1 - (\alpha + 2t)x)U + x^2 = 0.$$

Рассмотрим серию многогранников Ботта–Тaubса (циклоэдров) $\mathcal{C}y = \{Cy^n, n \geq 0\}$ и положим $U(\alpha, t, x; \mathcal{C}y) = \sum_{n \geq 0} f(Cy^n) x^n$. Имеем: $dCy^n = (n+1) \sum_{i+j=n-1} (Cy^i \times As^j)$.

ТЕОРЕМА 7. Функция $U(\alpha, t, x; \mathcal{C}y)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\alpha, t, x; \mathcal{C}y) = \frac{\partial}{\partial x} (U(\alpha, t, x; \mathcal{C}y) U(\alpha, t, x; \mathcal{A}s)) \quad (4)$$

с начальным условием $U(\alpha, 0, x; \mathcal{C}y) = 1/(1 - \alpha x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Пусть $U = U_0 + \mu U_1 + (\mu^2)$ – решение уравнения Бюргерса $U_t = UU_x - \mu U_{xx}$. Тогда U_0 – решение уравнения (3), а U_1 – решение уравнения $(U_1)_t = (U_0 U_1)_x - (U_0)_{xx}$, однородной частью которого является уравнение (4).

Пусть M^{2n} – компактное гладкое симплектическое многообразие с эффективным гамильтоновым действием компактного тора T^n . Рассмотрим отображение моментов $\Phi: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Получаем простой многогранник $P^n = \Phi(M^{2n}) = \text{Im } \Phi$. Многообразие M^{2n} является почти комплексным.

Пусть $\text{Td}_{a,b}$ – двухпараметрический род Тодда, соответствующий формальной группе $(u + v - auv)/(1 - buv)$.

ТЕОРЕМА 9. $f(\Phi(M^{2n})) = \gamma \text{Td}_{a,b} M^{2n}$, где γ – замена переменных $a \rightarrow \alpha + 2t$, $b \rightarrow \alpha t + t^2$.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть s_1 – операция Ландвебера–Новикова в комплексных кобор-дизмах. Тогда $\frac{\partial}{\partial t} f(\Phi(M^{2n})) = \gamma \text{Td}_{a,b}(s_1[M^{2n}])$.

Используя связь $\text{Td}_{a,b}$ с характеристическими числами, получаем известные формулы: для старшего числа Черна $c_n(M^{2n}) = f_{0,t^n}$; для рода Тодда $\text{Td}(M^{2n}) = \alpha^n$; для сигнатуры $\sigma(M^{2n}) = (-1)^n [2^n - 2^{n-1} f_{n-1,1} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 2 f_{1,n-1} + (-1)^n f_{0,n}] t^n$.

Частично результаты этой работы опубликованы в [5].

Список литературы

- [1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, Univ. Lecture Ser., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002. [2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004. [3] A. Postnikov, V. Reiner, L. Williams, *Faces of generalized permutohedra*, [arXiv: math/0609184](https://arxiv.org/abs/math/0609184), 2007. [4] В. М. Бухштабер, Е. В. Корицкая, *Функц. анализ и его прил.*, **41:3** (2007), 34–47. [5] V. M. Buchstaber, *Combinatorics of simple polytopes and differential equations*, <http://eprints.ma.man.ac.uk/1093/>, 2008.

В. М. Бухштабер (V. M. Buchstaber)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Представлено С. П. Новиковым
Принято редколлегией
30.04.2008