Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный,
Математические модели динамики сильношунтирован-
ного перехода Джозефсона, *УМН*, 2008, том 63, вы-
пуск 3, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9212>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:21:20

Математические модели динамики сильношунтированного перехода Джозефсона

В. М. Бухштабер, О. В. Карпов, С. И. Тертычный

Мы продолжаем начатое в [1] исследование уравнения

$$\dot{\varphi} + \sin \varphi = q(\tau), \quad (1)$$

которое при периодической функции $q(\tau)$ успешно моделирует динамику разности фаз параметра порядка в сильношунтированных переходах Джозефсона [2].

Рассмотрим общую линейную систему дифференциальных уравнений

$$j\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & jM_2 \\ jM_2^* & -M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

в форме, используемой для вывода соотношений Джозефсона [3], [4], где $*$ – символ комплексного сопряжения, $M_1 = M_1(t)$ и $M_2 = M_2(t)$ – соответственно вещественная и комплексная функции вещественного аргумента t и $j = \sqrt{-1}$.

Будем считать, что $M_2(t)$ – ненулевая периодическая функция с периодом T_2 и $\tau = 2\hbar^{-1} \int_0^t |M_2(t')| dt'$. Положим $\psi_l = \exp(\varsigma_l + j\chi_l)$, и $M_2 = |M_2| \exp(j\delta)$, где $\varsigma_l = \varsigma_l(t)$, $\chi_l = \chi_l(t)$ и $\delta = \delta(t)$ – вещественные функции времени t , $l = 1, 2$. Введем новые функции $j\tilde{\varphi}(\tau) = [\hat{\varsigma}_2(\tau) - \hat{\varsigma}_1(\tau)] + j[\hat{\chi}_2(\tau) - \hat{\chi}_1(\tau)] + j\hat{\delta}(\tau)$ и $\tilde{\xi}(\tau) = [\hat{\varsigma}_2(\tau) + \hat{\varsigma}_1(\tau)] + j[\hat{\chi}_2(\tau) + \hat{\chi}_1(\tau)]$, где $\hat{\varsigma}_l(\tau) = \varsigma_l(t)$, $\hat{\chi}_l(\tau) = \chi_l(t)$ и $\hat{\delta}(\tau) = \delta(t)$. Заметим, что из вида матрицы системы (2) следует закон сохранения: $|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2 = \rho_0 = \text{const}$.

ЛЕММА 1. Система уравнений (2) эквивалентна двум нелинейным уравнениям $\dot{\tilde{\varphi}} + \sin \tilde{\varphi} = q(\tau)$ и $\dot{\tilde{\xi}} - \cos \tilde{\varphi} = 0$, где $q(\tau) = M_1|M_2|^{-1} + \hat{\delta}(\tau)$.

Положим $\tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(\tau) - j\kappa(\tau)$ и $\tilde{\xi}(\tau) = \xi(\tau) - j\phi(\tau)$, где $\varphi(\tau)$, $\kappa(\tau)$, $\xi(\tau)$ и $\phi(\tau)$ – вещественные функции времени τ . Тогда два уравнения из леммы 1 преобразуются в следующие четыре уравнения:

$$\dot{\varphi} + \text{ch } \kappa \sin \varphi = q(\tau), \quad \dot{\kappa} + \text{sh } \kappa \cos \varphi = 0, \quad \dot{\xi} - \text{ch } \kappa \cos \varphi = 0, \quad \dot{\phi} + \text{sh } \kappa \sin \varphi = 0.$$

ТЕОРЕМА 1. Система (2) эквивалентна уравнению (1) с $q(\tau) = M_1|M_2|^{-1} + \hat{\delta}(\tau)$ тогда и только тогда, когда $\rho_0 = 0$, $|M_2| = \text{const}$ и $\dot{\xi} = \cos \varphi$.

Снимем условия $\rho_0 = 0$ и $|M_2| = \text{const}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q(\tau)$ – периодическая функция с периодом T . Решение системы уравнений из леммы 1 поточечно сходится к решению уравнения (1), когда существует и не равен нулю предел $\lambda = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left[T^{-1} \int_{\tau-T/2}^{\tau+T/2} \cos \varphi(\tau' + nT) d\tau' \right]$.

ЛЕММА 2. Функция $W(\tau) = W_0 \exp S(\tau)$, где $2S(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} [\cos \varphi(\tau') - j \sin \varphi(\tau')] d\tau'$ является решением уравнения

$$\ddot{W}(\tau) + jq(\tau)\dot{W}(\tau) - \frac{1}{4} W(\tau) = 0 \quad (3)$$

тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\tau)$ является решением уравнения (1).

Пусть $q(\tau) = b + a \cos(\mu\tau)$, где a , b и μ – вещественные константы. Пусть λ из теоремы 2 существует и имеет ненулевое значение. Так как $\langle \cos \varphi(\tau) \rangle = 2\lambda$ и $\langle \sin \varphi(\tau) \rangle = b - m\mu$ [2] (угловые скобки обозначают операцию усреднения по времени, использованную в теореме 2), то $W(\tau, m) = R(\tau) \exp(\Lambda\tau)$, где $2\Lambda = 2\lambda + j(m\mu - b)$, m – номер ступеньки Шапиро [2] и

$$R(\tau) = W_0(m) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} \{ [\cos \varphi(\tau') - \langle \cos \varphi(\tau') \rangle] - j[\sin \varphi(\tau') - \langle \sin \varphi(\tau') \rangle] \} d\tau' \right\}. \quad (4)$$

Перейдем из области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ на риманову поверхность функции $\ln z$ и произведем в (3) замену $\tau \rightarrow z = \exp(j\mu\tau)$ и $W(\tau) \rightarrow V(z)$. Аналитически продолжим функцию $q(\tau)$ на плоскость комплексной переменной z по формуле $\tilde{q}(z) = b + (a/2)(z + z^{-1})$. После преобразований получим уравнение на функцию $V(z) = V$ в виде

$$\mathbf{D}^2 V + [\gamma(z + z^{-1}) + c] \mathbf{D} V + \vartheta V = 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{D} = z d/dz$, $\gamma = a/(2\mu)$, $c = b/\mu$ и $\vartheta = (2\mu)^{-2}$. Заметим, что уравнение (5) эквивалентно дважды конфлюэнтному уравнению Гойна [5].

Решение уравнения (5) при условии захвата фазы ищем в виде $V(z) = z^\eta e^{-\gamma z} E(z)$, где η – аксессуарный комплекснозначный параметр, $E(z)$ – аналитическая по z функция, удовлетворяющая уравнению $\mathbf{L}E = 0$ с $\mathbf{L} = \gamma(\mathbf{D} + \eta) + z\{\mathbf{D}^2 + (2\eta - c)\mathbf{D} + [\eta^2 - \gamma^2 - \eta(c + 1) + \vartheta]\} - \gamma z^2(\mathbf{D} - c + \eta)$. Положим $E(z) = E_+(z) + E_-(z) - A_0$, где $E_\pm(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{\pm k} z^{\pm k}$.

ЛЕММА 3. Коэффициенты $A_{\pm k}$ в рядах $E_\pm(z)$ выражаются через сходящиеся бесконечные произведения явно заданных (2×2) -матриц.

Введем вспомогательную функцию $Q(\eta) = \gamma(1 + \eta)A_1 + [\eta^2 - \gamma^2 - \eta(c + 1) + \vartheta]A_0 + \gamma(c - 2\eta)A_{-1}$, тогда уравнение $\mathbf{L}E = 0$ становится эквивалентным условию $Q(\eta) = 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\eta = -[(b + \mu(1 - 2\varepsilon))/(2\mu) + jv]$ есть решение уравнения $Q(\eta) = 0$. Тогда если $v \neq 0$, то параметры a , b и μ функции $q(\tau)$ лежат внутри областей захвата фазы с порядковым номером m (см. [1], [2]). В этом случае $v = 2\lambda/\mu$, а номер m вычисляется как

$$m = \varepsilon + \frac{1}{\pi j} \oint \frac{E'(z)}{E(z)} dz, \quad \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{для } m \text{ четных,} \\ -1 & \text{для } m \text{ нечетных.} \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Решение уравнения (5) при условии захвата фазы может быть представлено в виде $V(z) = z^{-j(\Lambda/\mu)} e^{-\gamma z} \tilde{E}(z)$, где функция $\tilde{E}(z)$ переходит в $R(\tau)$ (см. (4)) при замене z на τ и $\oint [\tilde{E}'(z)/\tilde{E}(z)] dz = 0$.

Список литературы

- [1] В.М. Бухштабер, О.В. Карпов, С.И. Тертычный, УМН, 59:2 (2004), 187–188.
- [2] В.М. Бухштабер, О.В. Карпов, С.И. Тертычный, ЖЭТФ, 124:3(9) (2003), 691–699.
- [3] К.К. Лихарев, Б.Е. Ульрих, Системы с джозефсоновскими контактами, МГУ, М., 1978.
- [4] А. Бароне, Дж. Патерно, Эффект Джозефсона. Физика и применение, Мир, М., 1984.
- [5] С. Славянов, В. Лай, Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей, Невский диалект, С.-Петербург, 2002.

В. М. Бухштабер (V. M. Buchstaber)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Представлено С. П. Новиковым
Принято редколлегией
06.05.2008

О. В. Карпов (O. V. Karpov)
ВНИИФТРИ
E-mail: mera@vniiftri.org

С. И. Тертычный (S. I. Tertychnyi)
ВНИИФТРИ