Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Джумадильдаев, А. Б. Бакирова, Коммутативные
центральные расширения алгебр Ли, *УМН*, 2008, том 63,
выпуск 4, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9218>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:06:44

Коммутативные центральные расширения алгебр Ли

А. С. Джумадильдаев, А. Бакирова

Нас интересуют алгебры с двумя кососимметрическими тождествами

$$[a, b] \circ c + [b, c] \circ a + [c, a] \circ b = 0, \quad (1)$$

$$a \circ [b, c] + b \circ [c, a] + c \circ [a, b] = 0, \quad (2)$$

где $[a, b] = a \circ b - b \circ a$ – обычный коммутатор. Очевидно, что такая алгебра является Ли-допустимой. Иными словами, относительно операции коммутирования она превращается в алгебру Ли. Более того, билинейное отображение

$$\psi(a, b) = a \circ b + b \circ a$$

удовлетворяет условиям

$$d\psi(a, b, c) = 0, \quad (3)$$

$$\psi(a, b) = \psi(b, a), \quad (4)$$

где

$$d\psi(a, b, c) = \psi([a, b], c) + \psi([b, c], a) + \psi([c, a], b).$$

ПРИМЕР. Алгебра Новикова $A = (\mathbb{K}[x], \circ)$ с умножением $a \circ b = a \frac{\partial b}{\partial x}$ удовлетворяет тождествам (1) и (2).

Билинейное отображение $\psi: L \times L \rightarrow M$, удовлетворяющее условиям (3), (4), будем называть *коммутативным коциклом* с коэффициентом в M . Пусть $Z_{\text{com}}^2(L, M)$ – пространство коммутативных коциклов с коэффициентами в M , и пусть $Z_{\text{com}}^2(L) = Z_{\text{com}}^2(L, \mathbb{K})$, где $\mathbb{K}$ – основное поле. Тогда

$$Z_{\text{com}}^2(L, M) \cong Z_{\text{com}}^2(L) \otimes M.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $(L, \circ)$ – алгебра Ли с векторным пространством L и коммутативным коциклом $\psi \in Z_{\text{com}}^2(L, L)$. Тогда L относительно нового умножения, заданного по правилу $a \star b = a \circ b + \psi(a, b)$, становится алгеброй с тождествами (1) и (2).

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть L – классическая алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ характеристики $\text{char } \mathbb{K} \neq 2, 3$. Тогда $Z_{\text{com}}^2(L) = 0$ за исключением случая $L = \mathfrak{sl}_2$, когда

$$\begin{aligned} Z_{\text{com}}^2(\mathfrak{sl}_2) &= \langle \eta_i, i = 1, \dots, 5 \rangle \cong \mathbb{K}^5, \\ \eta_1(e_{-1}, e_{-1}) &= 1, \quad \eta_2(e_{-1}, e_0) = \eta_2(e_0, e_{-1}) = 1, \\ \eta_3(e_{-1}, e_1) &= 1, \quad \eta_3(e_0, e_0) = 2, \quad \eta_3(e_1, e_{-1}) = 1, \\ \eta_4(e_0, e_1) &= \eta_4(e_1, e_0) = 1, \quad \eta_5(e_1, e_1) = 1 \end{aligned}$$

(не указанные компоненты равны 0).

СЛЕДСТВИЕ 2 ($p \neq 2, 3$). Пусть A – алгебра с тождествами (1), (2) и $A^{(-1)} \cong L$, где L – классическая простая алгебра Ли. Если ранг алгебры больше 1, то A – алгебра Ли, более того, A изоморфна L . Если $\text{rk } L = 1$, то умножение в $A = \{e_{-1}, e_0, e_1\}$

можно выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{-1} \star e_{-1} &= \alpha_{1,1}e_{-1} + \alpha_{1,2}e_0 + \alpha_{1,3}e_1, & e_{-1} \star e_0 &= e_{-1} + \alpha_{2,1}e_{-1} + \alpha_{2,2}e_0 + \alpha_{2,3}e_1, \\ e_0 \star e_{-1} &= -e_{-1} + \alpha_{2,1}e_{-1} + \alpha_{2,2}e_0 + \alpha_{2,3}e_1, & e_{-1} \star e_1 &= e_0 + \alpha_{3,1}e_{-1} + \alpha_{3,2}e_0 + \alpha_{3,3}e_1, \\ e_1 \star e_{-1} &= -e_0 + \alpha_{3,1}e_{-1} + \alpha_{3,2}e_0 + \alpha_{3,3}e_1, \\ e_0 \star e_0 &= 2(\alpha_{3,1}e_{-1} + \alpha_{3,2}e_0 + \alpha_{3,3}e_1), & e_0 \star e_1 &= e_1 + \alpha_{4,1}e_0 + \alpha_{4,2}e_0 + \alpha_{4,3}e_1, \\ e_1 \star e_0 &= -e_1 + \alpha_{4,1}e_{-1} + \alpha_{4,2}e_0 + \alpha_{4,3}e_1, \\ e_1 \star e_1 &= \alpha_{5,1}e_{-1} + \alpha_{5,2}e_0 + \alpha_{5,3}e_1, \end{aligned}$$

где $\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, $j = 1, 2, 3$. Обратно, для любой (5×3) -матрицы $(\alpha_{i,j})$ такая алгебра проста, удовлетворяет тождествам (1), (2) и ее алгебра Ли изоморфна $\mathfrak{sl}_2$.

Коммутативные коциклы также отвечают за алгебры с кососимметрическим тождеством

$$\{[a, b], c\} + \{[b, c], a\} + \{[c, a], b\} = 0, \quad (5)$$

где $\{a, b\} = a \circ b + b \circ a$ — антикоммутатор. Для любой антикоммутативной алгебры $(A, \star)$ с коммутативным коциклом ψ векторное пространство A относительно умножения $a \circ b = a \star b + \psi(a, b)$ превращается в алгебру с тождеством (5).

ПРИМЕР. Алгебра $(\mathbb{K}[x], \circ)$ с умножением

$$a \circ b = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$$

удовлетворяет тождеству (5).

Таким образом, мы получаем описание алгебр с тождеством (5), связанных с классическими алгебрами Ли.

А. С. Джумадильдаев (A. S. Dzhumadil'daev)
Университет им. С. Демиреля, Алматы, Казахстан
E-mail: askar56@hotmail.kz

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
07.06.2008

А. Бакирова (A. Bakirova)
Университет им. С. Демиреля, Алматы, Казахстан