Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Домрин, А. В. Домрина, О расходимости ряда
Концевича–Виттена, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 4, 185–
186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9219>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:06:19

О расходимости ряда Концевича–Виттена

А. В. Домрин, А. В. Домрина

Рассмотрим эволюционные уравнения на $\mathbb{C}^2$, получаемые редукциями из условий нулевой кривизны для связности вида $U(x, t, z) dx + V(x, t, z) dt$, где U есть полином первой степени от спектрального параметра z , а V есть полином степени $m \geq 2$ от z . Этот класс уравнений содержит уравнение Кортевега–де Фриза и кубическое нелинейное уравнение Шрёдингера вместе с их интегрируемыми модификациями и иерархиями, но не содержит уравнений типа $\sin$ -Гордон (см. [1; гл. I, § 8 и гл. III, § 6]). Известно (см. [2; теорема 4]), что необходимым условием разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для указанных уравнений с начальными данными при $t = t_0$ является принадлежность данных рассеяния начального условия классу Жеврея $1/m$. В утверждении 1 настоящей работы получены оценки класса Жеврея данных рассеяния для начальных данных, являющихся *мономами* от x . В утверждении 2 из этих оценок выводится, что формальный степенной ряд Концевича–Виттена (см. [3], [4]), являющийся решением иерархии Кортевега–де Фриза, имеет нулевой радиус сходимости по всем временным переменным, кроме первой.

Обозначим через $\text{gl}(n, \mathbb{C})$ множество всех комплексных $(n \times n)$ -матриц, а через $\mathcal{O}(x_0)$ – множество ростков всех голоморфных $\text{gl}(n, \mathbb{C})$ -значных отображений в точке $x_0 \in \mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ есть множество всех внедиагональных ростков $q \in \mathcal{O}(x_0)$ ($q_{ll}(x) \equiv 0$ при $l = 1, \dots, n$). Фиксируем произвольную диагональную матрицу $a \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$, все собственные значения которой различны. Тогда для любого внедиагонального голоморфного ростка $q \in \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ существует единственный формальный степенной ряд вида $m(x, z) = I + \sum_{s=0}^{\infty} m_s(x) z^{-(s+1)}$ с $m_s \in \mathcal{O}(x_0)$ для всех $s \geq 0$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению $\partial_x m = (az + q(x))m - maz$ и такой, что ряд $m(x_0, z) - I$ внедиагонален (см. [2; § 5]). Пусть $\alpha(q)$ есть точная нижняя грань всех значений $\alpha \geq 0$, для которых ряд $\sum_{s=0}^{\infty} (s!)^{-\alpha} m_s(x_0) x^s$ имеет ненулевой радиус сходимости.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $n = 2$ и все ненулевые элементы матрицы $q(x)$ имеют вид $q_{12} = b_1(x - x_0)^k$, $q_{21} = b_2(x - x_0)^l$ для некоторых $b_1, b_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и целых $k, l \geq 0$. Тогда $\alpha(q) \geq (k + l)/(k + l + 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$ и разность $a_{11} - a_{22}$ диагональных элементов матрицы a равна 1. Обозначим через $u_s(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \mu_t^s x^t$ элемент $(m_s)_{12}(x)$ матрицы $m_s(x)$. Из дифференциального уравнения, определяющего $m(x, z)$, получаем после исключения диагональных элементов, что $\mu_t^0 = -b_1 \delta_{tk}$ и (доопределяя $\mu_t^s = 0$ при $t < 0$)

$$\mu_t^s = (t + 1) \mu_{t+1}^{s-1} + b_1 b_2 (k - t)^{-1} \mu_{t-k-l-1}^{s-1}, \quad s, t \geq 0. \quad (*)$$

Отсюда видно, что μ_t^s отлично от 0, только если $s + t = k + j(k + l + 2)$ для какого-либо $j \in \{0, 1, \dots, s\}$. В частности, $u_s(x)$ есть полином степени $k - s + s(k + l + 2)$ со старшим коэффициентом $(-b_1)^{s+1} b_2^s (s!)^{-1} (k + l + 1)^{-s}$. Индукцией по $j \geq 0$ (а при каждом фиксированном j – индукцией по s от j до $k + j(k + l + 2)$) убеждаемся, что если оба слагаемых в правой части (*) отличны от 0, то их аргументы одинаковы. Тем самым $|\mu_t^s| \geq (t + 1) |\mu_{t+1}^{s-1}|$ для всех $s \geq 1$, $t \geq 0$. Теперь та же индукция дает оценку

$$|\mu_0^{k+j(k+l+2)}| \geq (k + j(k + l + 1))! |b_1|^{j+1} |b_2|^j (j!)^{-1} (k + l + 1)^{-j}$$

для всех целых $j \geq 0$ (остальные μ_0^s равны 0). Поскольку $\mu_0^s = u_s(0)$, из этой оценки и формулы Стирлинга вытекает, что ряд $\sum_{s=0}^{\infty} (s!)^{-\alpha} u_s(0) x^s$ имеет нулевой радиус сходимости при любом $\alpha < (k + l)/(k + l + 2)$. Утверждение 1 доказано.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00743, № 08-01-00014, № 06-02-04012) и программы “Ведущие научные школы” (гранты НШ-5966.2006.1, НШ-3877.2008.1).

Согласно теореме 1 работы [2] существует единственная последовательность дифференциальных полиномов $F_0, F_1, F_2, \dots$ (т.е. отображений $\mathcal{O}(x_0) \rightarrow \mathcal{O}(x_0)$, являющихся обычными полиномами от функции $\kappa \in \mathcal{O}(x_0)$ и ее производных) такая, что $F_0(\kappa) \equiv a$, $F_m(0) \equiv 0$ для всех $m \geq 1$ и формальный степенной ряд $F(\kappa, z) := \sum_{m=0}^{\infty} F_m(\kappa) z^{-m}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\partial_x F(\kappa, z) = [az + \kappa, F(\kappa, z)]$ тождественно по $\kappa \in \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ и по z . Зафиксируем целое число $m \geq 2$ и рассмотрим задачу Коши с начальным условием $q(x, t_0) = q_0(x)$ для уравнения

$$q_t = [a, F_{m+1}(q)], \quad (**)$$

где $q_0 \in \mathcal{O}(x_0)^{\text{od}}$ есть заданный внедиагональный голоморфный росток в точке $x_0 \in \mathbb{C}$, а $q(x, t)$ – искомая внедиагональная голоморфная функция в окрестности точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$. Уравнение $(**)$ эквивалентно условию нулевой кривизны $U_t - V_x + [U, V] = 0$ для связности $U(x, t, z) dx + V(x, t, z) dt$, где $U(x, t, z) = az + q(x, t)$ и $V(x, t, z) = \sum_{j=0}^m F_{m-j}(q)(x, t) z^j$ суть полиномы от z степеней 1 и m соответственно. Уравнение Кортевега–де Фриза $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$ на комплекснозначную функцию $u(x, t)$ получается из уравнения $(**)$ при

$$a = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x, t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m = 3.$$

Разрешая m принимать все нечетные значения $m = 2k + 1$ и соответственно обозначая переменную t в уравнении $(**)$ через t_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), получим бесконечный набор эволюционных уравнений на комплекснозначную функцию $u(x, t_1, t_2, \dots)$, называемый *иерархией уравнения Кортевега–де Фриза*. В статьях [3], [4] и многих последовавших за ними работах рассматривается формальный степенной ряд $u_0(x, t_1, t_2, \dots)$ от переменных $x, t_1, t_2, \dots$, удовлетворяющий всем уравнениям этой иерархии и начальному условию $u_0(x, 0, 0, \dots) = cx$ для некоторого вещественного $c \neq 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. При каждом фиксированном $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ радиус сходимости степенного ряда $u_0(x, t_1, t_2, \dots)$ по переменной t_1 равен конечному положительному числу, а по любой переменной t_j ($j \geq 2$) – нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетривиальная часть утверждения 2 (касающаяся нулевого радиуса сходимости при $j \geq 2$) вытекает из утверждения 1 (случай $k = 1$, $l = 0$) и следующего результата (см. [2; теорема 4]): если задача Коши $q(x, t_0) = q_0(x)$ для уравнения $(**)$ имеет локальное голоморфное решение, то $\alpha(q_0) \leq 1/m$. Утверждение 2 доказано.

Аналогичным образом из утверждения 1 выводится, что при любых целых $k \geq 2$ и комплексных $c \neq 0$ задача Коши $u(x, 0) = cx^k$ для нелинейного уравнения Шрёдингера $iu_t + u_{xx} \pm u|u|^2 = 0$ не имеет локальных вещественно-аналитических (по x и t) решений в окрестности начала координат в $\mathbb{R}^2$.

Список литературы

- [1] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния*, Наука, М., 1980. [2] А.В. Домрин, Тр. МИАН, **253**, 2006, 46–60. [3] M.L. Kontsevich, *Comm. Math. Phys.*, **147**:1 (1992), 1–23. [4] E. Witten, *Surveys in differential geometry* (Cambridge, MA, 1990), Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991, 243–310.

А. В. Домрин (A. V. Domrin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: domrin@mi.ras.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
Принято редколлегией
09.06.2008

А. В. Домрина (A. V. Domrina)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова