Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, О минимальных бинарных деревьях с правильной границей, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 139–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm922>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 03:11:04

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О МИНИМАЛЬНЫХ БИНАРНЫХ
ДЕРЕВЬЯХ С ПРАВИЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Задача описания всех локально минимальных сетей с правильной границей, т.е. плоских локально минимальных сетей, затягивающих вершины правильных многоугольников, была поставлена академиком А. Т. Фоменко [1]. В качестве первого шага на пути решения этой задачи авторы начали изучение локально минимальных бинарных деревьев с правильной границей [1]–[6]. Разработанная техника позволила авторам существенно продвинуться в понимании геометрии таких деревьев. В настоящей работе получены новые существенные ограничения на возможное устройство плоских локально минимальных бинарных деревьев (в дальнейшем, для краткости, *минимальных 2-деревьев*) с правильной границей.

Хорошо известно, что *минимальные 2-деревья* могут быть полностью описаны как плоские бинарные деревья, все ребра которых – прямолинейные отрезки, стыкующиеся между собой в вершинах степени 3 под углами, равными 120° . При этом, если граница M минимального 2-дерева Γ выпукла, т.е. лежит на границе своей выпуклой оболочки, то M совпадает с множеством всех вершин из Γ степени 1.

Напомним, что существует естественное взаимно однозначное соответствие (с точностью до планарной эквивалентности) между плоскими бинарными деревьями и триангуляциями диагоналями плоских многоугольников (двойственный граф каждой такой триангуляции является бинарным деревом).

Приведем необходимые определения из [2]–[5]. Пусть T – некоторая диагональная триангуляция многоугольника P . Треугольник из T назовем *крайним*, если не меньше двух его сторон лежит на границе многоугольника P . Назовем треугольник из T *внутренним*, если все его стороны лежат внутри P . Крайний треугольник называется *наростом*, если он примыкает к некоторому внутреннему треугольнику из T . Триангуляция T , не имеющая наростов, называется *скелетом*. По каждой триангуляции T можно построить (неоднозначно) ее скелет. Для этого достаточно для каждого внутреннего треугольника из T выбросить один примыкающий к нему нарост (если такой есть). Если триангуляция T , соответствующая плоскому 2-дереву Γ , является скелетом, то само дерево Γ также будем называть *скелетом*.

В работах [2]–[5] в терминах скелетов и наростов получена полная классификация всевозможных триангуляций, соответствующих минимальным 2-деревьям, затягивающим вершины выпуклых многоугольников. А именно, удалось предъяснить полное описание всевозможных скелетов

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда и Российского фонда фундаментальных исследований.

таких триангуляций и сформулировать правила расположения наростов на них. Эти результаты позволяют выделить в качестве первого этапа решения задачи описания минимальных 2-деревьев с правильной границей задачу описания таких деревьев, являющихся скелетами.

Из результатов [2]–[5] вытекает в частности, что если минимальное 2-дерево Γ затягивает вершины выпуклого многоугольника, то число k крайних треугольников каждого его скелета не превосходит 6. Назовем это k *числом концов скелета* Γ . В работах [2]–[7] авторы получили полное описание являющихся скелетами минимальных 2-деревьев с правильной границей и с числом концов равным 2 и 3. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Минимальных 2-деревьев, являющихся скелетами, имеющих 4 или 5 концов и затягивающих вершины правильного многоугольника, не существует.*

Отметим, что доказательство этого факта в случае скелетов с 4 концами натолкнулось на серьезные вычислительные трудности, которые были преодолены с помощью пакета Mathematica®, продукт компании Wolfram Research, Inc. Также отметим, что ряд вычислений относящихся к разбору случая скелетов с 5 концами, проделан студенткой механико-математического факультета МГУ Л. Сарычевой.

Таким образом, для завершения описания минимальных скелетов с правильной границей, остается описать лишь такие скелеты с 6 концами. В работе [6] авторы привели пример четырех таких минимальных скелетов, затягивающих вершины правильных n -угольников при $n = 24, 30, 36$ и 42. Мы предполагаем, что других минимальных скелетов с шестью концами, затягивающих вершины правильных многоугольников, не существует. К сожалению, эта гипотеза пока не доказана, хотя и подтверждается компьютерными экспериментами.

Авторы пользуются случаем выразить свою глубокую признательность академику А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фоменко А. Т. Топологические вариационные задачи. М.: Изд-во МГУ, 1984. [2] Иванов А. О., Тужилин А. А. // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 207–208. [3] Иванов А. О., Тужилин А. А. // Матем. сб. 1991. Т. 182. №12. С. 1813–1844. [4] Иванов А. О., Тужилин А. А. // УМН. 1992. Т. 47. №2(284). С. 53–115. [5] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. // Adv. Soviet Math. 1993. Т. 15. С. 15–92. [6] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. // Adv. Soviet Math. 1993. Т. 15. С. 93–131. [7] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations. CRC Press, 1994.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
13.11.1995