Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Комлов, Оценки классов Жеврея данных рассеяния для полиномиальных потенциалов, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 4, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9220>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 10:00:57

Оценки классов Жеврея данных рассеяния для полиномиальных потенциалов

А. В. Комлов

Известно, что необходимым условием разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для солитонных уравнений параболического типа является принадлежность данных рассеяния начального условия классу Жеврея $1/m$, где m – номер потока иерархии (см. [1; теорема 4]). Оказывается, что для мономиальных (2×2) -потенциалов удастся точно вычислить показатель класса Жеврея их данных рассеяния. В данной работе получена верхняя оценка этого показателя в более общем случае – для полиномиальных потенциалов. Она совпадает с нижней оценкой для данных рассеяния мономиальных потенциалов, которая получена в [2] в связи с вопросом о сходимости ряда Концевича–Виттена. (Эта нижняя оценка также может быть получена и методами данной работы.)

Фиксируем произвольную диагональную матрицу $a \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$, все собственные значения которой различны. Пусть q – произвольный внедиагональный $\text{gl}(n, \mathbb{C})$ -значный (т. е. $q_{jj} = 0$) голоморфный росток в точке $x_0 \in \mathbb{C}$. Тогда среди рядов вида $m(x, z) = I + \sum_{s=1}^{\infty} m_s(x) z^{-s}$, где $m_s(x)$ – $\text{gl}(n, \mathbb{C})$ -значный голоморфный росток в точке x_0 , существует единственный ряд $m(x, z)$, удовлетворяющий уравнению $m_x = [az, m] + qm$, такой, что все $m_s(x_0)$ внедиагональны (см. [1; § 5]). Локальными данными рассеяния потенциала q называется формальный степенной ряд $Lq(z) := m(x_0, z) - I$.

Формальный степенной ряд $\sum_{s=1}^{\infty} c_s z^{-s}$ ($c_s \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$) принадлежит классу Жеврея с показателем α (обозначаемому Gev_α), если ряд $\sum_{s=0}^{\infty} c_s (s!)^{-\alpha} y^s$ имеет ненулевой радиус сходимости.

Везде далее $n = 2$ (т. е. q есть (2×2) -матрица).

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть элементы $q_{12}(x)$ и $q_{21}(x)$ голоморфного внедиагонального $\text{gl}(2, \mathbb{C})$ -значного ростка $q(x)$ в точке x_0 – полиномы степеней k и l соответственно. Тогда Lq принадлежит классу Жеврея с показателем $(k + l)/(k + l + 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно положить $x_0 = 0$. Обозначим элементы $(m_s)_{12}(x)$ и $(m_s)_{21}(x)$ матрицы $m_s(x)$ через $u_s(x)$ и $v_s(x)$ соответственно. Также пусть $b := a_{11} - a_{22}$. Нам достаточно доказать, что ряды $\sum_{s=1}^{\infty} u_s(0) z^{-s}$ и $\sum_{s=1}^{\infty} v_s(0) z^{-s}$ принадлежат $\text{Gev}_{(k+l)/(k+l+2)}$. Мы сделаем это для первого из них, а для второго доказательство аналогично.

Из уравнения $m_x = [az, m] + qm$ получаем рекуррентное соотношение $[a, m_{s+1}(x)] = m'_s(x) - q(x)m_s(x)$ ($s \geq 1$) с начальным условием $[a, m_1(x)] = -q(x)$. Из этого соотношения и условия внедиагональности ряда $m(0, z)$ следует рекуррентное соотношение для $u_s(x)$:

$$bu_{s+1}(x) = u'_s(x) - q_{12}(x) \int_0^x q_{21}(t) u_s(t) dt \quad (1)$$

с начальным условием $bu_1(x) = -q_{12}(x)$. Далее считаем $b = 1$, так как случай произвольного b отличается от случая $b = 1$ умножением $u_s(x)$ на b^{-s} , что не влияет на принадлежность к классу Жеврея.

Зафиксируем s и оценим $u_{s+1}(0)$. Для этого распишем $u_{s+1}(x)$ по рекуррентной формуле (1) до выражения, зависящего только от $q_{12}(x)$ и $q_{21}(x)$ (применив формулу s раз). Поскольку $q_{12}(x) = \sum_{j=0}^k p_j x^j$ и $q_{21}(x) = \sum_{j=0}^l q_j x^j$ – полиномы степеней k и l соответственно, то, записав их как сумму мономов, получим выражение $u_{s+1}(x)$ через мономы. Всего слагаемых будет не более $2^s(k+1)^s(l+1)^s$. Каждое слагаемое получается из одного из мономов $u_1(x) = -q_{12}(x)$ за s шагов, на каждом шаге применяется

одна из двух операций: 1) дифференцирование, 2) интегрирование с умножением – берутся два монома $p_i x^i$ и $q_j x^j$ из полиномов $q_{12}(x)$ и $q_{21}(x)$ соответственно и $f(x)$ переходит в $-p_i q_j x^j \int_0^x t^i f(t) dt$. Ясно, что на каждом шаге моном переходит в моном.

Оценим модуль коэффициента при каждом из мономов нулевой степени в получившемся выражении для $u_{s+1}(x)$. Заметим, что если на некотором шаге сделано дифференцирование, а на следующем – интегрирование с умножением, то, поменяв операции местами, мы не изменим степени монома, а модуль коэффициента не уменьшится. Поэтому будем считать, что сначала идут все интегрирования с умножением, а затем все дифференцирования. Каждое дифференцирование уменьшает степень монома на 1, а интегрирование с умножением увеличивает степень монома не более чем на $k + l + 1$. Поскольку начальный моном (взятый из $u_1(x) = -q_{12}(x)$) имеет степень не больше k , а в итоге мы должны получить моном степени 0, то общее число дифференцирований не превосходит $d := \left\lceil \frac{(k + l + 1)s + k}{k + l + 2} \right\rceil$, а общее число интегрирований с умножением не меньше $s - d$. Каждое интегрирование с умножением увеличивает степень монома хотя бы на 1, поэтому число, появляющееся при этом в знаменателе, увеличивается на каждом шаге по крайней мере на 1. А после всех дифференцирований должен получиться моном нулевой степени, поэтому за все дифференцирования модуль коэффициента увеличится не более чем в $d!$ раз. Пусть M – максимум из 1, p_i и q_j . Тогда модуль коэффициента монома нулевой степени в выражении для $u_s(x)$ не превосходит $M^{2s+1} d! / (s - d)!$. Значит,

$$|u_{s+1}(0)| \leq 2^s (k + 1)^s (l + 1)^s M^{2s+1} \frac{d!}{(s - d)!}.$$

Используя формулу Стирлинга и формулу Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда, получаем требуемое утверждение.

Объединяя доказанное утверждение с нижней оценкой, упомянутой в начале работы, получаем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть k и l – целые неотрицательные числа, и пусть элементы $q_{12}(x)$ и $q_{21}(x)$ голоморфного внедиагонального $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ -значного роста $q(x)$ в точке x_0 равны $\alpha(x - x_0)^k$ и $\beta(x - x_0)^l$ соответственно, где α и β – ненулевые комплексные числа. Тогда Lq принадлежит классу Жеврея с показателем $(k + l)/(k + l + 2)$ и не принадлежит никакому классу Жеврея с меньшим показателем.

Список литературы

- [1] А. В. Домрин, *Тр. МИАН*, **253** (2006), 46–60. [2] А. В. Домрин, *УМН*, **63:4** (2008), 185–186.

А. В. Комлов (A. V. Komlov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: komlov@hotmail.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
Принято редколлегией
09.06.2008