Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Каменецкий, Рациональность производящих функций цикловых ладейных полиномов и цикловых перманентов кронекеровых произведений тёплицевых матриц и циркулянтов с матрицей J_k и их вычисление, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 4, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:57:24

Рациональность производящих функций цикловых ладейных полиномов и цикловых перманентов кронекеровых произведений тёплицевых матриц и циркулянтов с матрицей J_k и их вычисление

А. М. Каменецкий

Эта статья является непосредственным обобщением [1] и [2]. В приведенной ниже теореме 1 получены явные формулы, которые позволяют легко вычислять цикловые ладейные полиномы заявленных в заглавии матриц для фиксированных значений параметров r, t, k и произвольно больших n . Как отмечено в [2], зависимость от n задается рациональными производящими функциями.

Используемые в данной статье символы $N_n, m_{\bar{\alpha}}(i), T_n^{(t)}, P_n, J_k, L(\bar{\alpha}), i^{(\ell)}, G_t^{[k]}, v_i, w$, а также цикловые ладейные полиномы определены в [1]. В формулировке теоремы 1 участвуют матрицы $K_{[k],t}^{[s,r]}(a_0, a_1, \dots, a_t; z)$, которые мы определяем ниже.

Пусть $t \geq 1, k \geq 1, 0 \leq r \leq t, 0 \leq s \leq (t-r)k, 0 \leq d \leq (t+r)k$. Рассмотрим следующее множество последовательностей $G_{[k],d,t}^{(s,r)} = \{\bar{\alpha} = (x_1, \dots, x_{s+rk+d}) \in \{1, 2, \dots, t, v_1, \dots, v_r, w\}^{s+rk+d} \mid m_{\bar{\alpha}}(i) \leq k, 1 \leq i \leq t, m_{\bar{\alpha}}(v_j) \leq k, 1 \leq j \leq r, x_{s+rk+\ell} \neq w, 1 \leq \ell \leq d\}$. Определим на этом множестве последовательностей два отношения эквивалентности, слабое и сильное. Две последовательности $\bar{\alpha} = (x_1, \dots, x_{s+rk+d})$ и $\bar{\beta} = (y_1, \dots, y_{s+rk+d})$ считаются слабо эквивалентными, если $x_i = y_i$ при $1 \leq i \leq s+rk$ и $\{x_{s+rk+1}, \dots, x_{s+rk+d}\} = \{y_{s+rk+1}, \dots, y_{s+rk+d}\}$, и сильно эквивалентными, если $x_i = y_i$ при $1 \leq i \leq s, \{x_{s+(i-1)k+1}, x_{s+(i-1)k+2}, \dots, x_{s+ik}\} = \{y_{s+(i-1)k+1}, y_{s+(i-1)k+2}, \dots, y_{s+ik}\}$ при $1 \leq i \leq r$ и $\{x_{s+rk+1}, \dots, x_{s+rk+d}\} = \{y_{s+rk+1}, \dots, y_{s+rk+d}\}$. Множество классов слабо эквивалентных последовательностей мы по-прежнему будем обозначать через $G_{[k],d,t}^{(s,r)}$. Множество классов сильно эквивалентных последовательностей обозначим через $G_{[k],d,t}^{[s,r]}$. Положим также $G_{[k],d,t}^{(s,r)} = \{\bar{\alpha} = (x_1, \dots, x_{s+rk+d}) \in G_{[k],d,t}^{[s,r]} \mid \{\bar{\alpha}\} \cap \{i^{(k)}\} = \{x_{s+(i-1)k+1}, x_{s+(i-1)k+2}, \dots, x_{s+ik}\} \cap \{i^{(k)}\}, 1 \leq i \leq r\}$.

Пусть $A \subseteq N_{s+(r+1)k} \setminus N_{s+rk}$ и $\varphi \in \text{Inj}(A, N_{s+(r+1)k+d})$. Инъективное отображение φ индуцирует биективное отображение φ^* множества $\varphi(A) \setminus (\varphi(A) \cap A)$ на $A \setminus (A \cap \varphi(A))$: если $j \in \varphi(A) \setminus (\varphi(A) \cap A)$, то $\varphi^*(j) = j_m$, где j_m однозначно определяется из условий $j_0 = j, j_0, j_1, \dots, j_{m-1} \in \varphi(A), j_\ell = \varphi^{-1}(j_{\ell-1}), 1 \leq \ell \leq m, j_m \in A \setminus (\varphi(A) \cap A)$.

Пусть $\bar{\alpha} = (x_1, \dots, x_{s+rk+d}) \in G_{[k],d,t}^{(s,r)}, \bar{\alpha}' = (x_1, \dots, x_s, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, x_{s+1}, \dots, x_{s+rk+d}) = (x'_1, \dots, x'_{s+(r+1)k+d})$. Обозначим через $\bar{\varphi}(\bar{\alpha}' + 1)$ последовательность, которая получается из последовательности $\bar{\alpha}' + 1 = (x'_1 + 1, \dots, x'_{s+(r+1)k+d} + 1)$ (где “прибавление единицы” понимается в смысле [2]) следующим образом. Компоненты $x'_j + 1, j \in \varphi(A)$, вычеркиваются. При этом если $j \in \varphi(A) \setminus (\varphi(A) \cap A)$, то на место вычеркиваемой компоненты $x'_j + 1$ перемещается компонента $x'_{\varphi^*(j)} + 1$. Затем в полученной таким образом последовательности $(x''_1, \dots, x''_{s+rk+p})$ компоненты $x''_i = w$ вычеркиваются, если $i > s+rk$.

На множестве $\bigcup_{d=0}^{(t+r)k} G_{[k],d,t}^{(s,r)}$ определим квадратную матрицу $K_{[k],t}^{(s,r)}(a_0, a_1, \dots, a_t; z) = (a_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}})_{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \bigcup_{d=0}^{(t+r)k} G_{[k],d,t}^{(s,r)}}$ следующим образом: если $t = 0$, то $K_{[k],0}^{(0,0)}(a_0; z) = \sum_{d=0}^k \binom{k}{d} (k-d+z)^{(d)} a_0^d$; если же $t \geq 1$, то

$$a_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} = \sum_{A \subseteq N_{s+(r+1)k} \setminus N_{s+rk}} \sum_{\substack{\varphi \in \text{Inj}(A, N_{s+(r+1)k+d}) \\ \bar{\varphi}(\bar{\alpha}' + 1) = \bar{\beta}, x'_{\varphi(i)} \in \{0, 1, \dots, t\}, i \in A}} z^{|\varphi|} \prod_{i \in A} a_{x'_{\varphi(i)}},$$

где $(z)^{(k)} = \prod_{i=0}^{k-1} (z+i), k \geq 1, (z)^{(0)} = 1$ и $|\varphi|$ – число циклов отображения φ . На множестве упорядоченных пар $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ конечных последовательностей $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ элементов

множества X таких, что $\{\bar{\alpha}\} \subseteq \{\bar{\beta}\}$, определим функцию $f(z; (\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}))$ следующим образом. Пусть $\bar{\alpha} = (x_1, \dots, x_p) \in X^p$, $\bar{\beta} = (y_1, \dots, y_q) \in X^q$, $\{\bar{\alpha}\} = \{b_1^{(\ell_1)}, b_2^{(\ell_2)}, \dots, b_d^{(\ell_d)}\}$, $A_i = \{j \in N_p \mid x_j = b_i\}$, $B_i = \{j \in N_q \mid y_j = b_i\}$, $1 \leq i \leq d$. Тогда

$$f\left(z, \left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\right)\right) = \left(\prod_{i=1}^d |A_i|! \binom{|B_i|}{|A_i|}\right)^{-1} \sum_{\varphi \in \text{Inj}\left(\bigcup_{i=1}^d A_i, \bigcup_{i=1}^d B_i\right), \varphi(A_i) \subseteq B_i, 1 \leq i \leq d} z^{|\varphi|}.$$

Если $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \bigcup_{d=0}^{(t+r)k} G_{[k],d,t}^{(s,r)}$, то мы полагаем, по определению,

$$\begin{aligned} & K_{[k],t}^{[s,r]}(a_0, a_1, \dots, a_t; z) [L([\bar{\alpha}]), L([\bar{\beta})] \\ &= \sum_{\bar{\gamma} \in \bigcup_{d=0}^{(t+r)k} G_{[k],d,t}^{(s,r)}, \bar{\gamma} \sim \bar{\beta}} K_{[k],t}^{(s,r)}(a_0, a_1, \dots, a_t; z) [L(\bar{\alpha}), L(\bar{\gamma})], \end{aligned}$$

где $[\bar{\alpha}]$ – класс сильной эквивалентности, содержащий $\bar{\alpha}$. Пусть $K_{[k],t}^{(s,r)}(a_0, a_1, \dots, a_t; z)$ – подматрица матрицы $K_{[k],t}^{[s,r]}(a_0, a_1, \dots, a_t; z)$ на множестве $\bigcup_{d=0}^{tk} G_{[k],d,t}^{(s,r)}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $t \geq 0$, $0 \leq r \leq t$, $a_{-r}, a_{-r+1}, \dots, a_{-r+t}$ – элементы коммутативного кольца с единицей. Тогда для всех $n \geq 1$

$$\begin{aligned} R\left(x; z; \left(\sum_{i=0}^t a_{-r+i} P_n^{-r+i}\right) \otimes J_k\right) &= \sum_{s=0}^{(t-r)k} \sum_{\substack{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_t), \\ \ell_{r+1} + \ell_{r+2} + \dots + \ell_t = s}} \sum_{\substack{0 \leq \ell_i \leq k, \\ 1 \leq i \leq t}} \\ &\times \sum_M f\left(z; \left(\begin{array}{c} (r+1)^{\langle \ell_{r+1} \rangle}, (r+2)^{\langle \ell_{r+2} \rangle}, \dots, t^{\langle \ell_t \rangle}, v_1^{\langle \ell_1 \rangle}, v_2^{\langle \ell_2 \rangle}, \dots, v_r^{\langle \ell_r \rangle} \\ \bar{\gamma} \setminus (1^{\langle k-\ell_1 \rangle}, 2^{\langle k-\ell_2 \rangle}, \dots, r^{\langle k-\ell_r \rangle}) \end{array}\right)\right) \\ &\times \left(K_{[k],t}^{(s,r)}(a_{-r}x, a_{-r+1}x, \dots, a_{-r+t}x; z)\right)^n [L((r+1)^{\langle \ell_{r+1} \rangle}, (r+2)^{\langle \ell_{r+2} \rangle}, \dots, \\ &\dots, t^{\langle \ell_t \rangle}, 1^{\langle k-\ell_1 \rangle}, v_1^{\langle \ell_1 \rangle}, 2^{\langle k-\ell_2 \rangle}, v_2^{\langle \ell_2 \rangle}, \dots, r^{\langle k-\ell_r \rangle}, v_r^{\langle \ell_r \rangle}) \mid L(\bar{\gamma})], \end{aligned}$$

где область суммирования M определяется из условий $\bar{\gamma} \in \bigcup_{d=0}^{tk} G_{[k],d,t}^{(s,r)}$, $\{\bar{\gamma}\} \setminus (\{\bar{\gamma}\} \cap \{w^{\langle tk \rangle}\}) = \{1^{\langle k-\ell_1 \rangle}, 2^{\langle k-\ell_2 \rangle}, \dots, r^{\langle k-\ell_r \rangle}, (r+1)^{\langle \ell_{r+1} \rangle}, (r+2)^{\langle \ell_{r+2} \rangle}, \dots, t^{\langle \ell_t \rangle}, v_1^{\langle \ell_1 \rangle}, \dots, v_r^{\langle \ell_r \rangle}\}$,

$$\begin{aligned} & R\left(x; z; \left(\sum_{i=0}^t a_{-r+i} T_n^{(-r+i)}\right) \otimes J_k\right) \\ &= \sum_{\bar{\gamma} \in G_t^{[k]}, \{\bar{\gamma}\} \supseteq \{1^{\langle k \rangle}, 2^{\langle k \rangle}, \dots, r^{\langle k \rangle}\}} \left(K_{[k],t}^{(k)}(a_{-r}x, a_{-r+1}x, \dots, a_{-r+t}x; z)\right)^n \\ &\times [L(1^{\langle k \rangle}, 2^{\langle k \rangle}, \dots, r^{\langle k \rangle}) \mid L(\bar{\gamma})], \end{aligned}$$

где $K_{[k],t}^{(k)}(b_0, b_1, \dots, b_t; z)$ – подматрица матрицы $K_{[k],t}^{(0,r)}(b_0, b_1, \dots, b_t; z)$ на множестве $\bigcup_{d=0}^{(t-r)k} G_{[k],d,t}^{(r)}$, $G_{[k],d,t}^{(r)} = \{\bar{\alpha} \in G_{[k],d,t}^{(s,r)}, \{\bar{\alpha}\} \cap \{v_1, v_2, \dots, v_r\} = \emptyset\}$.

Для цикловых перманентов результаты аналогичны.

Список литературы

- [1] А. М. Каменецкий, УМН, 60:3 (2005), 177–178. [2] А. М. Каменецкий, УМН, 62:6 (2007), 175–176.

А. М. Каменецкий (А. М. Kamenetskii)
E-mail: kamenetsky_a@list.ru

Представлено С. К. Ландо
Принято редколлегией
05.06.2008