Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Горский, Симметрии мотивных интегралов, *УМН*,
2008, том 63, выпуск 4, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:28:11

Симметрии мотивных интегралов

Е. А. Горский

Пусть $\mu(\gamma)$ – число Милнора [1] ростка плоской кривой $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Рассмотрим семейство мотивных интегралов [2] $G_{k,m}(t) = \int_{\{\text{Ord } x(t)=k, \text{Ord } y(t)=m\}} t^{\mu(\gamma)} d\gamma$ по пространству параметризованных дуг на плоскости $(\mathbb{C}^2, 0)$.

УТВЕРЖДЕНИЯ. 1. $G_{k,m}(t)$ – рациональная функция от t и класса аффинной прямой $\mathbb{L}$.

$$2. G_{1,1}(t) = (\mathbb{L} - 1)^2 \mathbb{L}^{-2}.$$

$$3. G_{k,m}(t) = G_{m,k}(t).$$

$$4. G_{k,m}(t) = t^{k(k-1)} \mathbb{L}^{-k} G_{k,m-k}(t) \text{ при } m > k.$$

$$5. G_{k,k}(t) = (\mathbb{L} - 1) \sum_{m>k} G_{k,m}(t).$$

$$6. G_{k,k}(t) = \frac{(\mathbb{L} - 1)t^{k(k-1)} \mathbb{L}^{-k}}{1 - t^{k(k-1)} \mathbb{L}^{1-k}} \sum_{m<k} G_{k,m}(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 2 и 3 очевидны. Утверждение 4 следует из формулы замены переменных в мотивном интеграле ([2], см. также [3]). Утверждение 5 следует из того факта, что если порядки $x(t)$ и $y(t)$ равны, то $y(t) = \lambda x(t) + y'(t)$, где λ – ненулевое число, а порядок $y'(t)$ больше порядка $y(t)$. Докажем утверждение 6:

$$\begin{aligned} G_{k,k}(t) &= (\mathbb{L} - 1) \sum_{m>k} G_{k,m}(t) = (\mathbb{L} - 1)^2 \sum_{m>k} t^{k(k-1)} \mathbb{L}^{-k} G_{k,m-k}(t) \\ &= (\mathbb{L} - 1)^2 \sum_{m>k} t^{k(k-1)} \mathbb{L}^{-k} \left(\sum_{m<k} G_{k,m}(t) + G_{k,k}(t) + \sum_{m>k} G_{k,m}(t) \right) \\ &= (\mathbb{L} - 1)^2 \sum_{m>k} t^{k(k-1)} \mathbb{L}^{-k} \left(\sum_{m<k} G_{k,m}(t) + G_{k,k}(t) \left(1 + \frac{1}{\mathbb{L} - 1} \right) \right), \end{aligned}$$

откуда и следует искомым результат. Утверждение 1 следует из утверждений 2–4 и 6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Введем следующие многочлены от двух переменных:

$$S_{a,k}(t, \mathbb{L}^{-1}) = \sum_{1 \leq m < k, \text{НОД}(m,k)=a} t^{(k-1)(m-1)-(a-1)^2} \mathbb{L}^{2a-k-m}.$$

УТВЕРЖДЕНИЯ. 7. Если $\text{НОД}(k, m) = a$, то

$$G_{k,m}(t, \mathbb{L}) = t^{(k-1)(m-1)-(a-1)^2} \mathbb{L}^{2a-k-m} G_{a,a}(t, \mathbb{L}). \quad (1)$$

8. Имеет место равенство

$$G_{k,k}(t, \mathbb{L}) = \frac{(\mathbb{L} - 1)t^{k(k-1)} \mathbb{L}^{-k}}{1 - t^{k(k-1)} \mathbb{L}^{1-k}} \sum_{a|k} S_{a,k}(t, \mathbb{L}^{-1}) G_{a,a}(t).$$

9. Имеет место равенство

$$G_{k,k}(t, \mathbb{L}) = \sum_{1=a_0, a_1, \dots, a_r=k} \frac{(\mathbb{L} - 1)^{2+r} t^{\sum_{j=1}^r a_j(a_j-1)} \mathbb{L}^{-2-\sum_{j=1}^r a_j}}{\prod_{j=1}^r (1 - t^{a_j(a_j-1)} \mathbb{L}^{1-a_j})} \prod_{j=1}^r S_{a_{j-1}, a_j}(t, \mathbb{L}^{-1}),$$

где суммирование ведется по всем наборам $(1 = a_0 < a_1 < \dots < a_r = k)$, в которых $a_{j-1} | a_j$ для всех j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $(k-1)(m-1) = k(k-1) + k(m-k-1)$, поэтому, так как алгоритм Евклида для k и m сходится к a , то из свойства 4 получаем утверждение 7. Подставляя (1) в утверждение 6, получаем утверждение 8. Применяя утверждение 7 до тех пор, пока не дойдем до $a = 1$, и используя утверждение 2, получим утверждение 9.

Из формулы обращения Мёбиуса вытекает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть μ – функция Мёбиуса. Тогда

$$S_{a,k}(t, \mathbb{L}^{-1}) = t^{-(a-1)^2} \mathbb{L}^{2a} \sum_{a|b, b|k} \mu\left(\frac{b}{a}\right) \frac{t^{(k-1)(b-1)} \mathbb{L}^{-k-b} - t^{(k-1)^2} \mathbb{L}^{-2k}}{1 - t^{(k-1)b} \mathbb{L}^{-b}}. \quad (2)$$

Подставим (2) в утверждение 9 и приведем подобные члены. Получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a = \text{НОД}(k, m)$. Тогда

$$G_{k,m}(t, \mathbb{L}) = \int_{\{\text{Ord } x(t)=k, \text{Ord } y(t)=m\}} t^{\mu(\gamma)} d\gamma = (\mathbb{L} - 1)^2 t^{(k-1)(m-1)} \mathbb{L}^{-k-m} \times \sum_{\underline{a}, \underline{b}} \prod_{j=1}^r \mu\left(\frac{b_j}{a_{j-1}}\right) \frac{(\mathbb{L} - 1) t^{(a_j-1)b_j} \mathbb{L}^{-b_j} (1 - t^{(a_j-1)(a_j-b_j)} \mathbb{L}^{b_j-a_j})}{(1 - t^{a_j(a_j-1)} \mathbb{L}^{1-a_j})(1 - t^{(a_j-1)b_j} \mathbb{L}^{-b_j})}, \quad (3)$$

где суммирование ведется по всем наборам $(1 = a_0 \leq b_1 < a_1 \leq \dots < a_{r-1} \leq b_r < a_r = a)$, в которых $a_{j-1} | b_j$ и $b_j | a_j$ для всех j (число r не фиксировано).

Напомним, что в левой части (3) μ обозначает число Милнора, а в правой – функцию Мёбиуса, что, впрочем, не должно приводить к недоразумениям.

СЛЕДСТВИЕ 1. $G_{k,m}(t^{-1}, \mathbb{L}^{-1}) = t^{-2(k-1)(m-1)} \mathbb{L}^{2k+2m-2} G_{k,m}(t, \mathbb{L})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из того, что каждый из r сомножителей в правой части (3) инвариантен относительно замены $(t, \mathbb{L}) \mapsto (t^{-1}, \mathbb{L}^{-1})$.

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, Наука, М., 1982; англ. пер.: V. I. Arnold, S. M. Gusejn-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. I. The classification of critical points, caustics and wave fronts*, Monogr. Math., **82**, Birkhäuser, Boston, 1985; Vol. II. *Monodromy and asymptotics of integrals*, Monogr. Math., **83**, Birkhäuser, Boston, 1988. [2] J. Denef, F. Loeser, *Invent. Math.*, **135**:1 (1999), 201–232. [3] Е. А. Горский, *Алгебра и анализ*, **19**:4 (2007), 92–111; англ. пер.: E. A. Gorskii, *St. Petersburg Math. J.*, **19** (2008), 561–575.

Е. А. Горский (Е. А. Gorskii)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gorsky@mccme.ru

Представлено С. М. Гусейн-Заде
Принято редколлегией
20.06.2008