Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Кочетова, Первичный радикал решеточно упорядоченных алгебр Ли, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 5, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:50:30

Первичный радикал решеточно упорядоченных алгебр Ли

Ю. В. Кочетова

Пусть $\langle L; +; 0; -; \lambda; [\cdot, \cdot]; \leq \rangle$ – решеточно упорядоченная алгебра Ли (l -алгебра Ли) над частично упорядоченным (ч.у.) полем K [1], [2]. Идеал I l -алгебры Ли L над ч.у. полем K называется l -идеалом, если I является выпуклым подмножеством и подрешеткой в L [3], [2]. l -идеал I l -алгебры Ли L над ч.у. полем K называется l -первичным идеалом, если произведение $[U, V] = \{z = \sum_{i=1}^{n=n(z)} [x_i, y_i], x_i \in U, y_i \in V\}$ любых двух ненулевых l -идеалов U, V факторалгебры L/I отлично от множества $\{I\}$.

Пусть I_a – наименьший l -идеал l -алгебры Ли L , содержащий элемент $a \in L$. Используя определение l -первичного идеала, теорему 1 из [4], а также теоремы 13 и 25 из [5], можно доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть P – l -идеал l -алгебры Ли L над ч.у. полем K . Идеал P является l -первичным идеалом в L тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \in L$ из $[I_a, I_b] \subseteq P$ следует, что $a \in P$ или $b \in P$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В любой l -алгебре Ли L над направленным полем K l -идеал I_a совпадает с множеством $M = \{x \in L \mid |x| \leq \gamma_x |a| + \sum_{i=1}^{n=n(x)} [l_i, |a|], l_i \in L, \gamma_x \in K\}$.

Доказательство предложения 2 проводится непосредственной проверкой соответствия множества M определению l -идеала с использованием предложений 1, 3 из [2] и предложения 1.4 из [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. l -первичным радикалом $l\text{-rad}(L)$ l -алгебры Ли L над ч.у. полем K называется пересечение всех l -первичных идеалов l -алгебры Ли L .

ТЕОРЕМА. Пусть L – l -алгебра Ли над направленным полем K , а $l\text{-rad}(L)$ – ее l -первичный радикал. Тогда для элемента $a \in L$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $a \in l\text{-rad}(L)$;
- 2) в любой последовательности $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$ вида $a_0 = |a|$, $a_{i+1} \in [I_{a_i}, I_{a_i}]$, начиная с некоторого места, все элементы равны нулю;
- 3) любая последовательность $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $a_0 = |a|$ и $a_{i+1} = [x_i, y_i]$, где $0 \leq x_i \leq \alpha_i |a_i|$, $0 \leq y_i \leq \beta_i |a_i|$ и $\alpha_i, \beta_i \in K$, содержит нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует элемент $a \in l\text{-rad}(L)$, не удовлетворяющий условию 2). Тогда найдется неисчезающая последовательность $\{a_i \in L \mid i \in \mathbb{N}\}$, где $a_0 = |a|$, $a_{i+1} \in [I_{a_i}, I_{a_i}]$. По лемме Цорна существует максимальный l -идеал P относительно свойства $P \cap \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Рассмотрим l -идеалы $\bar{U}$ и $\bar{V}$ в l -алгебре Ли L/P такие, что $\bar{U} \neq P$ и $\bar{V} \neq P$. По теореме 25 из [5] этим l -идеалам соответствуют l -идеалы U и V в l -алгебре Ли L . Поскольку $\bar{U} \neq P$ и $\bar{V} \neq P$, то $U \not\subseteq P$ и $V \not\subseteq P$. Следовательно, для l -идеалов $U + P$ и $V + P$ выполнены включения $U + P \supset P$ и $V + P \supset P$. Если $(U + P) \cap \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, то, в силу максимальной l -идеала P , $U + P = P$, откуда следует, что $U \subseteq P$. Это противоречит доказанному выше. Следовательно, существуют элементы a_n, a_m последовательности $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, для которых $a_m \in U + P$, $a_n \in V + P$ и $n \geq m$. Поскольку $a_m \in U + P$ и $U + P$ является l -идеалом, то $I_{a_m} \subseteq U + P$. Поэтому для элемента $a_{m+1} \in [I_{a_m}, I_{a_m}]$ выполняется цепочка включений: $a_{m+1} \in [I_{a_m}, I_{a_m}] \subseteq [U + P, U + P] \subseteq [U, U] + P \subseteq U + P$. Таким образом, $a_{m+1} \in U + P$. Аналогично, $a_n \in U + P$. Тогда $a_{n+1} \in [I_{a_n}, I_{a_n}] \subseteq [U + P, V + P] = [U, V] + P$. Так как $a_{n+1} \notin P$, то $[U, V] + P \neq P$. Поэтому $[U, V] \not\subseteq P$. Если $[\bar{U}, \bar{V}] \subseteq P$, то для любых элементов $x \in U$, $y \in V$ выполнено $x + P \in \bar{U}$, $y + P \in \bar{V}$ и $[x, y] + P = [x + P, y + P] \subseteq P$, откуда $[x, y] \in P$. Следовательно, $[U, V] \subseteq P$, что противоречит доказанному ранее. Таким образом, $[\bar{U}, \bar{V}] \not\subseteq P$ и l -алгебра Ли L/P

l -первична. Поэтому $a_0 = |a| \notin P$, где P – l -первичный идеал, т.е. $a \notin P$. Значит, $a \notin l\text{-rad}(L)$. Следовательно, $1) \Rightarrow 2)$.

По определению l -идеала из условия 2) следует выполнение условия 3). Покажем, что $3) \Rightarrow 1)$. Пусть существует элемент $r \in L$, удовлетворяющий условию 3) и не удовлетворяющий условию 1), т.е. $r \notin P$ для некоторого l -первичного идеала P из L . При этом $r_0 = |r| \notin P$. Так как $r_0 \notin P$, то $[I_{r_0}, I_{r_0}] \not\subseteq P$, поскольку иначе по предложению 1 выполнялось бы соотношение $r_0 \in P$. Следовательно, $[I_{r_0}, I_{r_0}] \not\subseteq P$, поэтому существуют такие элементы $x, y \in I_{r_0}$, что $[x, y] \notin P$. Так как по предложению 1 работы [2] $x = x^+ + x^-$ и $y = y^+ + y^-$, то $[x, y] = [x^+, y^+] + [x^+, y^-] + [x^-, y^+] + [x^-, y^-]$. Поскольку $[x, y] \notin P$, то хотя бы одно из слагаемых суммы не принадлежит P . В случае, когда $[x^+, y^+] \notin P$, имеем $x^+, y^+ \geq 0$. Если же $[x^+, y^-] \notin P$, то $-[x^+, y^-] = [x^+, -y^-] \notin P$, при этом $x^+, -y^- \geq 0$. Аналогично, $[-x^-, y^+] \notin P$ или $[-x^-, -y^-] \notin P$. Таким образом, можно считать, что в P не содержится элемент $[b, c]$, где $b, c \geq 0$ и $b, c \in I_{r_0}$.

Так как $b, c \in I_{r_0}$, то по предложению 2 $b = |b| \leq \gamma_b |r_0| + \sum_{i=1}^n [l_i, |r_0|]$ и $c = |c| \leq \gamma_c |r_0| + \sum_{i=1}^m [k_i, |r_0|]$. Откуда по предложениям 1, 2 из [2] имеют место соотношения $b \leq \gamma_b |r_0| + \sum_{i=1}^n |[l_i, |r_0|]| \leq \gamma_b |r_0| + \sum_{i=1}^n |r_0| = (\gamma_b + \sum_{i=1}^n 1) |r_0| = \alpha_0 |r_0|$ и, аналогично, $c \leq \beta_0 |r_0|$, где $\alpha_0, \beta_0 \in K$.

Учитывая данные неравенства, заключаем, что получен элемент $r_1 = [b, c] \notin P$, для которого $0 \leq b \leq \alpha_0 |r_0|$ и $0 \leq c \leq \beta_0 |r_0|$. Рассуждая аналогично, построим последовательность $\{r_n \in L \setminus P \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $r_0 = |r|$ и $r_{i+1} = [b_i, c_i]$, где $0 \leq b_i \leq \alpha_i |r_i|$ и $0 \leq c_i \leq \beta_i |r_i|$. Поскольку все члены этой последовательности принадлежат $L \setminus P$, то $r_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, r не удовлетворяет условию 3). Теорема доказана.

Применение условия 3) теоремы к l -алгебре Ли L_1 из примера 3 работы [2] позволяет доказать следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. l -алгебра Ли L_1 является l -радикальной алгеброй Ли.

Список литературы

- [1] В.М. Копытов, *Алгебра и логика*, **11:3** (1972), 295–325; англ. пер.: V.M. Kopytov, *Algebra Logic*, **11:3** (1972), 168–185. [2] Ю.В. Кочетова, *Вестник СамГУ. Естественнонауч. сер. Матем.*, **7:57** (2007), 73–83. [3] В.М. Копытов, *Решеточно упорядоченные группы, Современная алгебра*, Наука, М., 1984. [4] Ю.В. Кочетова, Е.Е. Ширшова, *Тезисы докладов Международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию В.Е. Воскресенского*, Самара, 2007, 29–30. [5] Ю.В. Кочетова, Е.Е. Ширшова, *Избранные вопросы алгебры: Сборник статей, посвященный памяти Н.Я. Медведева*, Изд-во Алт. ун-та, Барнаул, 2007, 131–142. [6] В.М. Копытов, *Сиб. матем. журн.*, **18:3** (1977), 595–607; англ. пер.: V.M. Kopytov, *Siberian Math. J.*, **18:3** (1977), 425–433.

Ю.В. Кочетова (Yu. V. Kochetova)
Московский педагогический государственный
университет
E-mail: jkochetova@mail.ru

Представлено А.В. Михалёвым
Принято редколлегией
20.06.2008