Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Суханова, Многомерные знаковые и ранговые тесты независимости, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 5, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9226>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:35:59

Многомерные знаковые и ранговые тесты независимости

Е. М. Суханова

Введение. В данной работе предложены новые матричнозначные корреляционные меры, обобщающие на многомерный случай хорошо известные непараметрические коэффициенты корреляции Спирмена (1904), Кендалла (1938) и Бломквиста (1950). В основе трех новых определений лежит понятие матричной корреляции, недавно появившееся в литературе [1]. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ суть n независимых реализаций случайных векторов $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$ соответственно. Обозначим выборочные матрицы ковариаций $\mathbf{s}_{11} := \text{ave}_i (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})'$, $\mathbf{s}_{22} := \text{ave}_i (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})'$ и $\mathbf{s}_{12} := \text{ave}_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})'$. Матричной корреляцией $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называется

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{s}_{11}^{-1/2} \mathbf{s}_{12} \mathbf{s}_{22}^{-1/2}. \quad (1)$$

Непараметрические матричные корреляции получаются из определения (1) заменой наблюдений на их многомерные знаки, ранги или на знаки попарных разностей. Здесь мы будем использовать понятия аффинно-эквивариантного многомерного знака и ранга, основанные на медиане Ойа; см., например, [2].

Аффинно-эквивариантные ранги и знаки. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – выборка из p -мерного распределения с конечными первыми моментами. Положим $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, $J = \{i_1, \dots, i_{p-1}\}$ для упорядоченных наборов индексов $i_1 < \dots < i_{p-1} < i_p$; будем писать $\mathbf{x}_I = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}$ и аналогично $\mathbf{x}_J$. Аффинно-эквивариантная медиана Ойа $\hat{\mu}_{\mathbf{x}}$ (1983) минимизирует целевую функцию $V(x; \mathbf{x}) = \text{ave}_I V_p(x, \mathbf{x}_I)$, где $V_p(x, \mathbf{x}_I)/p!$ – это абсолютный объем p -мерного симплекса с вершинами x и $\mathbf{x}_I$.

Аффинно-эквивариантное расстояние между x и началом координат может быть определено как $V_0(x; \mathbf{x}) = \text{ave}_J V_p(x, \mathbf{x}_J, 0)$. Многомерными ранговой и знаковой функциями называются соответственно градиенты

$$R(x; \mathbf{x}) = \nabla_x V(x; \mathbf{x}), \quad S(x; \mathbf{x}) = \nabla_x V_0(x; \mathbf{x}). \quad (2)$$

Обозначим ранги наблюдений $R_{i\mathbf{x}} = R(x_i; \mathbf{x})$. Для вычисления многомерных знаков $\hat{S}_i$ наблюдений необходимо предварительно центрировать выборку с помощью медианы Ойа: $\hat{S}_{i\mathbf{x}} = S(x_i - \hat{\mu}_{\mathbf{x}}; \mathbf{x} - \hat{\mu}_{\mathbf{x}})$.

Также мы будем рассматривать знаки попарных разностей наблюдений $x_{ij} = x_i - x_j$, $1 \leq i < j \leq n$. Совокупность $\ddot{\mathbf{x}} := \{x_{ij}\}$ уже центрирована, поэтому используется непосредственно знаковая функция (2): $S_{ij\mathbf{x}} = S(x_{ij}; \ddot{\mathbf{x}})$.

Новые тестовые статистики и их предельные распределения. Пусть дана выборка $\{(x'_i, y'_i)\}_{i=1}^n$ из симметричных p - и q -мерных распределений с конечными вторыми моментами. Мы хотим проверить нулевую гипотезу H_0 : x_i и y_i независимы.

Матричными аналогами коэффициентов корреляции Спирмена, Кендалла и Бломквиста (см., например, [3; разд. 4.6]) будем называть соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_S &= (\text{ave}_i R_{i\mathbf{x}} R_{i\mathbf{x}}^T)^{-1/2} \text{ave}_i R_{i\mathbf{x}} R_{i\mathbf{y}}^T (\text{ave}_i R_{i\mathbf{y}} R_{i\mathbf{y}}^T)^{-1/2}, \\ \mathbf{r}_K &= (\text{ave}_{i,j,k} S_{ij\mathbf{x}} S_{ik\mathbf{x}}^T)^{-1/2} \text{ave}_{i < j} S_{ij\mathbf{x}} S_{ij\mathbf{y}}^T (\text{ave}_{i,j,k} S_{ij\mathbf{y}} S_{ik\mathbf{y}}^T)^{-1/2}, \\ \mathbf{r}_Q &= (\text{ave}_i \hat{S}_{i\mathbf{x}} \hat{S}_{i\mathbf{x}}^T)^{-1/2} \text{ave}_i \hat{S}_{i\mathbf{x}} \hat{S}_{i\mathbf{y}}^T (\text{ave}_i \hat{S}_{i\mathbf{y}} \hat{S}_{i\mathbf{y}}^T)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

ЛЕММА 1. Сингулярные значения матриц $\mathbf{r}_S$, $\mathbf{r}_K$ и $\mathbf{r}_Q$ инварианты относительно невырожденных аффинных преобразований $\{x_i \rightarrow A_1 x_i + b_1\}$, $\{y_i \rightarrow A_2 y_i + b_2\}$.

Новыми тестовыми статистиками для проверки гипотезы независимости H_0 будут служить нормы матричных корреляций $r_S = \|\mathbf{r}_S\|$, $r_K = \|\mathbf{r}_K\|$, $r_Q = \|\mathbf{r}_Q\|$, где $\|\mathbf{r}\|^2 = \text{Tr}(\mathbf{r}\mathbf{r}')$. Из леммы 1 немедленно получаем аффинную инвариантность предложенных тестов. Поскольку $\mathbf{r}_Q$ использует медианы Ойа $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$, то требуется, чтобы они были $\sqrt{n}$ -состоятельными оценками центров распределений (см. условия регулярности, например, в [4]).

ТЕОРЕМА 1. При H_0 асимптотическое распределение nr_S^2 , $nr_K^2/4$, nr_Q^2 есть χ_{pq}^2 .

Предельное распределение при близких альтернативах получено для достаточно широкого класса эллиптических распределений. Поскольку тесты аффинно-инвариантны, можно ограничиться изучением сферического случая. Мы примем следующую модель: пусть $\{x_i^*\}$ и $\{y_i^*\}$ независимы и имеют стандартные сферические распределения F и G ; последовательность альтернатив имеет вид

$$H_n : \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \Delta)I_p & \Delta M_1 \\ \Delta M_2 & (1 - \Delta)I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i^* \\ y_i^* \end{pmatrix}, \quad \text{где } \Delta = \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

Для стандартного сферического распределения $x_i^* \sim F$ теоретическая ранговая функция имеет простую структуру: $R(x; F) := \mathbf{E}R(x; \mathbf{x}^*) = \alpha_F(\|x\|)x/\|x\|$. Аналогичное представление справедливо также для пространственного ранга $R_1(x; F) := \mathbf{E}(x - x_i^*)/\|x - x_i^*\| = \beta_F(\|x\|)x/\|x\|$. Явный вид функций $\alpha_F(\|x\|)$, $\beta_F(\|x\|)$ для многомерного нормального и t -распределения можно найти в [2], [5]. Пусть $\mathbf{E}\alpha_F(\|x\|)^2 = a_F^2$, $\mathbf{E}\beta_F(\|x\|)^2 = b_F^2$. Эти обозначения также используем для сферического $y_i \sim G$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\min(p, q) > 1$. При гипотезе H_n асимптотическое распределение nr_S^2 , $nr_K^2/4$, nr_Q^2 есть $\chi_{pq}^2(\mathbf{m})$ с параметром нецентральности $\mathbf{m} = \delta^2 \|m_1 M_1 + m_2 M_2'\|^2 / (pq)$, где постоянные m_1 , m_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \text{для } r_S: \quad m_1 &= \frac{1}{a_F a_G} \left[(p-1) \mathbf{E} \frac{\alpha_F(\|x_1^*\|)}{\|x_1^*\|} + \mathbf{E} \alpha'_F(\|x_1^*\|) \right] \mathbf{E} \alpha_G(\|y_1^*\|) \|y_1^*\|, \\ m_2 &= \frac{1}{a_F a_G} \left[(q-1) \mathbf{E} \frac{\alpha_G(\|y_1^*\|)}{\|y_1^*\|} + \mathbf{E} \alpha'_G(\|y_1^*\|) \right] \mathbf{E} \alpha_F(\|x_1^*\|) \|x_1^*\|; \\ \text{для } r_K: \quad m_1 &= \frac{1}{2b_F b_G} (p-1) \mathbf{E} \frac{1}{\|x_{12}\|} \mathbf{E} \|y_{12}\|, \quad m_2 = \frac{1}{2b_F b_G} (q-1) \mathbf{E} \|x_{12}\| \mathbf{E} \frac{1}{\|y_{12}\|}; \\ \text{для } r_Q: \quad m_1 &= (p-1) \mathbf{E} \frac{1}{\|x_1^*\|} \mathbf{E} \|y_1^*\|, \quad m_2 = (q-1) \mathbf{E} \|x_1^*\| \mathbf{E} \frac{1}{\|y_1^*\|}. \end{aligned}$$

Здесь α'_F , α'_G обозначают производные (существование которых предполагается).

Автор выражает глубокую благодарность профессорам Ю. Н. Тюрину и Х. Ойа за полезные обсуждения и ценные замечания.

Список литературы

- [1] Е. М. Суханова, *Теория вероятн. и ее примен.* (в печати). [2] E. Ollila, *Sign and rank covariance matrices with applications to multivariate analysis*, Dissertation, Univ. of Jyväskylä, 2002. [3] J. Hájek, Z. Šidák, P. K. Sen, *Theory of rank tests*, 2nd ed., Probab. Math. Statist., Academic Press, San Diego, SA, 1999. [4] A. Arcones, Z. Chen, E. Giné, *Ann. Statist.*, **22**:3 (1994), 1460–1477. [5] J. Möttönen, H. Oja, J. Tienari, *Ann. Statist.*, **25**:2 (1997), 542–552.

Е. М. Суханова (Е. М. Sukhanova)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: suhanova_katya@mail.ru

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
20.06.2008