Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Глушак, Линейные вложения графов с шестью вершинами, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 4, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 10:39:37

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Линейные вложения графов с шестью вершинами

Е. Н. Глушак

Предмет работы. Под *графом* мы будем понимать подмножество евклидова пространства, снабженное конечной триангуляцией, все симплексы которой имеют размерность 0 или 1, одномерные симплексы являются отрезками.

Рассмотрим какое-нибудь вложение графа в пространство $\mathbb{R}^3$. Назовем это вложение *линейным*, если оно линейно на каждом ребре. Два линейных вложения графа в $\mathbb{R}^3$ назовем *жестко изотопными*, если в пространстве линейных вложений этого графа в $\mathbb{R}^3$ существует путь, соединяющий эти вложения.

Фундаментальная задача – для каждого графа расклассифицировать с точностью до жесткой изотопии линейные вложения этого графа в $\mathbb{R}^3$. Для графов с числом вершин, меньшим шести, решение этой задачи известно. (Для любого графа с четырьмя и менее вершинами несложная проверка показывает, что любые два линейных вложения этого графа в $\mathbb{R}^3$ жестко изотопны. Автор доказала, что для любого графа с пятью вершинами, не являющегося полным, любые два линейных вложения этого графа в пространство $\mathbb{R}^3$ жестко изотопны и что для полного графа с пятью вершинами существует ровно два класса жестко изотопных линейных вложений этого графа в пространство $\mathbb{R}^3$; ср. [1].) Предмет этой заметки – линейные вложения графов с шестью вершинами в $\mathbb{R}^3$.

Основные результаты. Для любого графа G через $\nu(G)$ мы будем обозначать число классов жестко изотопных линейных вложений графа G в $\mathbb{R}^3$. Из предыдущего ясно, что результаты этой работы относятся к вычислению числа $\nu(G)$ для случая, когда число вершин графа G равно шести.

Наш первый основной результат состоит в том, что

$$\nu(G) \leq 2^{19} \cdot 3^{33}$$

для всех графов G с шестью вершинами.

В [2; приложение 1] имеется полная таблица графов с шестью вершинами. Обозначим через $G_N(q)$ граф с шестью вершинами из этой таблицы, число ребер которого равно q и номер которого в этой таблице равен N . Наш второй основной результат состоит в том, что:

- а) если G – какой-нибудь из графов $G_{17}(6)$, $G_{23}(7)$, $G_{14}(8)$ или $G_6(9)$, то $\nu(G) \geq 3$;
- б) если G – какой-нибудь из графов $G_5(7)$, $G_6(7)$, $G_6(8)$, $G_{12}(8)$, $G_{16}(8)$, $G_2(9)$, $G_{13}(9)$, $G_{18}(9)$ или $G_1(10)$, то $\nu(G) \geq 5$;
- в) если G есть граф $G_5(8)$ или $G_{11}(9)$, то $\nu(G) \geq 7$;
- г) если G – какой-нибудь из графов $G_7(8)$, $G_{23}(8)$, $G_{10}(9)$, $G_{16}(9)$, $G_{20}(9)$, $G_3(10)$, $G_{14}(10)$, $G_{15}(10)$, $G_1(11)$ или $G_2(11)$, то $\nu(G) \geq 9$;
- д) если G – какой-нибудь из графов $G_9(9)$, $G_4(10)$ или $G_{11}(10)$, то $\nu(G) \geq 11$;

- е) если G есть граф $G_7(9)$ или $G_8(9)$, то $\nu(G) \geq 13$;
- ж) если G есть граф $G_{10}(10)$, то $\nu(G) \geq 15$;
- з) если G есть граф $G_2(10)$ или $G_8(10)$, то $\nu(G) \geq 17$;
- и) если G есть граф $G_5(11)$, то $\nu(G) \geq 19$;
- к) если G есть граф $G_7(10)$ или $G_3(11)$, то $\nu(G) \geq 21$;
- л) если G – какой-нибудь из графов $G_{17}(9)$, $G_{12}(10)$, $G_6(11)$, $G_8(11)$, $G_9(11)$ или $G_2(12)$, то $\nu(G) \geq 25$;
- м) если G есть граф $G_1(12)$, то $\nu(G) \geq 29$;
- н) если G есть граф $G_3(12)$, то $\nu(G) \geq 30$;
- о) если G есть граф $G_7(11)$, то $\nu(G) \geq 41$;
- п) если G есть граф $G_5(12)$, то $\nu(G) \geq 45$;
- р) если G есть граф $G_2(13)$, то $\nu(G) \geq 53$;
- с) если G есть граф $G_4(12)$, то $\nu(G) \geq 57$;
- т) если G есть граф $G_1(13)$, то $\nu(G) \geq 74$;
- у) если G есть граф $G_1(14)$, то $\nu(G) \geq 148$;
- ф) если G есть граф $G_1(15)$, то $\nu(G) \geq 260$.

Наш третий основной результат состоит в том, что $\nu(G_{13}(10)) = 2$ и $\nu(G_4(11)) = 2$ и что $\nu(G) = 1$ для любого графа G с шестью вершинами, содержащегося в таблице Харари, не упомянутого выше и отличного от графов $G_7(7)$, $G_{13}(7)$, $G_1(8)$, $G_9(8)$, $G_{15}(8)$, $G_{21}(8)$, $G_1(9)$, $G_5(9)$, $G_{19}(9)$, $G_5(10)$ и $G_7(6)$.

Имеется еще один результат, относящийся к точному значению числа $\nu(G)$. Согласно [3], имеет место равенство $\nu(G_7(6)) = 5$.

Первый основной результат настоящей работы следует из теоремы 2 статьи [4]. Доказательство второго основного результата состоит в явном построении линейных вложений графов и вычислении инвариантов жесткой изотопии: инварианта для полного подграфа с пятью вершинами (см. [1]), инварианта Калво для циклов с шестью вершинами и коэффициента зацепления пар треугольников. Третий основной результат следует из [1].

Автор выражает благодарность В. М. Нежинскому за постоянное внимание к ее работе, С. С. Подкорытову за полезные советы.

Список литературы

- [1] Е. Н. Глушак, “Линейные вложения полных графов с пятью вершинами”, *Материалы Всерос. науч.-метод. конф.* (Великий Новгород), 2004, 31–34.
- [2] Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. Harari, *Graph theory*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass. – Menlo Park, Calif. – London, 1969.
- [3] J. A. Calvo, *Topology Appl.*, **112**:2 (2001), 137–174.
- [4] H. E. Warren, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **133**:1 (1968), 167–178.

Е. Н. Глушак (Е. N. Glushak)
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: elena_n_gl@rambler.ru

Представлено И. А. Дынниковым
Принято редколлегией
20.06.2008