Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, О числе замкнутых геодезических на многограннике, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 5, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:26:47

О числе замкнутых геодезических на многограннике

В. Ю. Протасов

Геодезической на поверхности в $\mathbb{R}^3$ называется спрямляемая жорданова кривая, локально-кратчайшая в каждой точке. Нас будут интересовать только замкнутые несамопересекающиеся геодезические, по умолчанию любую геодезическую будем считать таковой. В 1905 г. А. Пуанкаре выдвинул гипотезу о существовании трех геодезических на гладкой выпуклой поверхности. В 1930 г. гипотеза была доказана Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом (см. [1]), позже было установлено существование бесконечного числа геодезических [2], [3]. Случай негладких поверхностей, в частности многогранников, исследовался в [4]–[10]. В отличие от гладких поверхностей, многогранник может вовсе не иметь геодезических [7]. Геодезические на многограннике суть ломаные с вершинами на ребрах, не проходящие через вершины многогранника и обладающие *свойством отражения*: любые два соседние звена ломаной образуют равные углы с соответствующим ребром. Далее вершины ломаной будем называть узлами. Если развернуть многогранник вдоль геодезической g (последовательно разворачиваем грани на плоскость в том порядке, как их пересекает геодезическая), то g перейдет в прямую на плоскости развертки. Две геодезические *изоморфны*, если они пересекают одну и ту же последовательность ребер. Если многогранник имеет одну геодезическую, то он имеет бесконечно много изоморфных ей геодезических; их длины равны, а соответствующие звенья параллельны. В дальнейшем будем отождествлять изоморфные геодезические и считать разные геодезические неизоморфными. Известно, что куб имеет три неизоморфные геодезические, а правильный октаэдр – две. Правильный симплекс имеет бесконечно много геодезических, все они классифицированы в [10]. То же верно и для равногранных симплексов (грани – равные треугольники). Неравногранный симплекс имеет конечное число геодезических, их число оценивается параметрами симплекса [10]. Возникает задача – описать все многогранники, имеющие бесконечно много геодезических (или, что то же, – сколь угодно длинные геодезические, или – геодезические со сколь угодно большим числом узлов).

ТЕОРЕМА 1. *Многогранник имеет бесконечно много геодезических тогда и только тогда, когда он является равногранным симплексом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть многогранник G имеет геодезические со сколь угодно большим числом звеньев N . Произвольная геодезическая g делит поверхность G на две области Γ_1 и Γ_2 . Рассмотрим область Γ_1 . Назовем узел V геодезической *правильным*, если найдется узел U такой, что интервал VU лежит в Γ_1 и является частью некоторого ребра G . Каждое ребро может содержать не более двух неправильных узлов. Поэтому при $N \rightarrow \infty$ геодезическая g будет иметь сколь угодно длинные участки, содержащие только правильные узлы $V_1, \dots, V_p$. Для любого i узлы V_{i-1} и V_i лежат на одной грани (на ребрах c и d) и соединены звеном a_i . Назовем *нарушением* ситуацию, когда соответствующие узлы U_{i-1} и U_i не соединены звеном. Это значит, что из них выходят два разных звена, лежащие на данной грани по одну сторону от a_i . Поскольку g не имеет самопересечений, каждой паре ребер c и d данной грани соответствует не более двух нарушений для g . Поэтому число всех нарушений ограничено. Следовательно, при $N \rightarrow \infty$ найдутся участки g сколь угодно большой длины L , содержащие только правильные узлы $V_1, \dots, V_{m-1}$ без нарушений, т. е. узлы $U_1, \dots, U_{m-1}$ также будут последовательными узлами ломаной g . Развернув грани G

на плоскость последовательно относительно ребер, содержащих данные узлы, получаем два отрезка: первый состоит из звеньев $a_1, \dots, a_m$, второй – из звеньев $b_1, \dots, b_m$, где a_i – отрезок $V_{i-1}V_i$, а b_i – отрезок $U_{i-1}U_i$. Можно считать, что выбранный участок правильных узлов – максимальный, т. е. узлы V_0 и V_m – неправильные. В противном случае оба отрезка продолжатся неограниченно вдоль развертки, следовательно, g не будет связна. При каждом i звенья a_i и b_i лежат на одной грани, полоса между ними является частью Γ_1 и, следовательно, не содержит других точек g . Площадь полосы на плоскости развертки между отрезками V_0V_m и U_0U_m не превосходит площади Γ_1 . Поэтому, выбирая длину L достаточно большой, считаем, что расстояние между отрезками (максимальная ширина полосы), а также угол между ними не превосходят заданного $\varepsilon > 0$. Обозначим через γ грань, в которой лежат звенья a_m и b_m . Поскольку узел V_m не правильный, он не лежит на одном ребре с узлом U_m . Значит, некоторые вершины грани γ находятся между a_m и b_m . Если ε мало, то между a_m и b_m может лежать только одна вершина, назовем ее A . Считаем, что $\varepsilon < 2\pi - \sigma(A)$, где $\sigma(A)$ – сумма плоских углов при вершине A . Пусть $s_1, \dots, s_k$ – лучи, идущие вдоль ребер, выходящих из A , $V_m \in s_1$, $U_m \in s_k$. Продолжим геодезическую g по плоскостям граней, сходящихся в вершине A , дальше за точку V_m , переходя через лучи $s_1, s_2, \dots$ по свойству отражения. Предположим, она пересечет лучи $s_1, \dots, s_r$ и не пересечет s_{r+1} . Это означает, что она выйдет из некоторого узла $V_{m+r-1} \in s_r$ и пойдет вдоль луча α , не пересекающего луч s_{r+1} . Продолжим так же второй участок g за точку U_m , переходя через лучи $s_k, s_{k-1}, \dots$. Элементарным подсчетом углов, пользуясь неравенством $\varepsilon < 2\pi - \sigma(A)$, показываем, что это продолжение пересечет луч s_{r+1} в некотором узле $U_{m+k-r-1}$, выйдет из этого узла вдоль некоторого луча β , пересекающего либо луч s_r (в узле U_{m+k-r}), либо луч α (в некоторой точке P). Если ε достаточно мало, то все новые узлы и точка P лежат внутри соответствующих граней G . Если β пересекает α , то g будет самопересекающейся; если β пересекает s_r и при этом $AU_{m+k-r} < AV_{m+r-1}$, то узел U_{m+k-r} лежит внутри Γ_1 , что также невозможно. Аналогично – со случаем $AU_{m+k-r} > AV_{m+r-1}$. Следовательно, узлы U_{m+k-r} и V_{m+r-1} совпадают и g зацепляется за вершину A . Это означает, что g пересекает все ребра, выходящие из A , причем точки пересечения являются последовательными узлами геодезической, и каждый из этих узлов является ближайшим к A на соответствующем ребре. Тогда угол между отрезками V_0V_m и U_0U_m равен $|\sigma(A) - \pi|$. Так как этот угол меньше произвольного ε , то $\sigma(A) = \pi$. Значит, V_0V_m и U_0U_m параллельны. Проведя те же рассуждения с другого конца – с узлами V_0 и U_0 , получаем, что g зацепляется за некоторую другую вершину B . Итак, область Γ_1 содержит всего две вершины A и B , причем $\sigma(A) = \sigma(B) = \pi$. Аналогично, Γ_2 содержит две вершины. Таким образом, многогранник G имеет четыре вершины, т. е. это – симплекс, а так как сумма плоских углов при каждой вершине равна π , то этот симплекс – равногранный.

Список литературы

- [1] Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, *УМН*, 2:1 (1947), 166–217. [2] J. Franks, *Invent. Math.*, 108:2 (1992), 403–418. [3] V. Bangert, *Internat. J. Math.*, 4:1 (1993), 1–10. [4] А. Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*, ОГИЗ, М.–Л., 1948. [5] А. В. Погорелов, *Матем. сб.*, 25:2 (1949), 275–306. [6] W. Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Grundlehren Math. Wiss., 230, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1978. [7] G. Galperin, *Regul. Chaotic Dyn.*, 8:1 (2003), 45–58. [8] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Acta Appl. Math.*, 66:3 (2001), 251–317. [9] A. V. Zorich, *International Congress of Mathematicians*, Vol. 3 (Madrid, 2006), Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, 121–146. [10] В. Ю. Протасов, *Матем. сб.*, 198:2 (2007), 103–120.

В. Ю. Протасов (V. Yu. Protasov)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: v-protasov@yandex.ru

Представлено В. М. Тихомировым
 Принято редколлегией
 20.06.2008