Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Берзин, Инварианты коприсоединенного представления для алгебр Ли
некоторого специального вида, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 141–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm923>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:07:23

ИНВАРИАНТЫ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ АЛГЕБР ЛИ НЕКОТОРОГО СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Д. В. БЕРЗИН

Введение. Пусть Θ – алгебра Ли, $\dim \Theta = n$ ($n \geq 2$), Θ^* – пространство, сопряженное с Θ , G – группа Ли, ассоциированная с алгеброй Ли Θ .

Пусть C_{ij}^k – структурный тензор алгебры Ли Θ в базисе e_i , x_i – координаты в Θ^* , соответствующие базису $e^1, \dots, e^n$ пространства Θ^* , такому, что $e^i(e_j) = \delta_j^i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Аналитическая функция F на Θ^* называется инвариантом коприсоединенного представления группы G , если $F(f) = F(\text{Ad}_g^* f)$ для любых $g \in G$, $f \in \Theta^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (см. [1, гл. 5]). *Аналитическая функция F на Θ^* является инвариантом коприсоединенного представления группы Ли G , ассоциированной с Θ , тогда и только тогда, когда*

$$(1) \quad \begin{cases} C_{1j}^k x_k \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ C_{nj}^k x_k \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0. \end{cases}$$

Настоящая работа посвящена нахождению инвариантов коприсоединенного представления в случае, когда алгебра Ли определяется билинейной и кососимметрической формой, задаваемой соотношениями:

$$(C_{nj}^k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} k, j &= 1, \dots, n-1, \\ C_{ij}^k &= 0 \text{ при } i \neq n, \quad j \neq n. \end{aligned}$$

1. Случай нулевых собственных значений. Рассмотрим сначала случай $\lambda = 0$. Система (1) примет вид системы из $(n-1)$ уравнения, из первых $(n-2)$ уравнений которой следует, что инварианты не зависят от x_n .

Последнее уравнение этой системы имеет вид:

$$(2) \quad x_1 \frac{\partial F}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_3} + \dots + x_{n-2} \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} = 0.$$

Это уравнение эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(3) \quad \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{x_2} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{x_{n-2}} = \frac{ds}{s}$$

в том смысле, что любой первый интеграл C системы (3) есть решение F системы (2), и наоборот.

$F_1 = C_1 = x_1$ – этот инвариант находится сразу. Сравнивая первый и второй, затем первый и третий члены в (3), получаем:

$$F_2 = C_2 = \frac{x_2^2}{2} - x_1 x_3, \quad F_3 = C_3 = -\frac{x_2^3}{3} + x_1 x_2 x_3 - x_1^2 x_4.$$

Опуская длинные выкладки, выпишем в явном виде инварианты для алгебр Ли вплоть до размерности $n = 11$:

$$\begin{aligned} F_4 &= \frac{x_2^4}{8} - \frac{x_1 x_2^2 x_3}{2} + x_1^2 x_2 x_4 - x_1^3 x_5, \\ F_5 &= -\frac{x_2^5}{30} + \frac{x_1 x_2^3 x_3}{6} - \frac{x_1^2 x_2^2 x_4}{2} + x_1^3 x_2 x_5 - x_1^4 x_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_6 &= \frac{x_2^6}{144} - \frac{x_1 x_2^4 x_3}{24} + \frac{x_1^2 x_2^3 x_4}{6} - \frac{x_1^3 x_2^2 x_5}{2} \\
&\quad + x_1^4 x_2 x_6 - x_1^5 x_7, \\
F_7 &= -\frac{x_2^7}{840} + \frac{x_1 x_2^5 x_3}{5!} - \frac{x_1^2 x_2^4 x_4}{4!} + \frac{x_1^3 x_2^3 x_5}{3!} - \frac{x_1^4 x_2^2 x_6}{2} \\
&\quad + x_1^5 x_2 x_7 - x_1^6 x_8, \\
F_8 &= \frac{x_2^8}{5760} - \frac{x_1 x_2^6 x_3}{6!} + \frac{x_1^2 x_2^5 x_4}{5!} - \frac{x_1^3 x_2^4 x_5}{4!} \\
&\quad + \frac{x_1^4 x_2^3 x_6}{3!} - \frac{x_1^5 x_2^2 x_7}{2} + x_1^6 x_2 x_8 - x_1^7 x_9, \\
F_9 &= -\frac{x_2^9}{45360} + \frac{x_1 x_2^7 x_3}{7!} - \frac{x_1^2 x_2^6 x_4}{6!} + \frac{x_1^3 x_2^5 x_5}{5!} - \frac{x_1^4 x_2^4 x_6}{4!} \\
&\quad + \frac{x_1^5 x_2^3 x_7}{6} - \frac{x_1^6 x_2^2 x_8}{2} + x_1^7 x_2 x_9 - x_1^8 x_{10}.
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1.

$$(4) \quad F_r = (-1)^r \frac{x_2^r}{r((r-2)!)!} + \sum_{k=1}^{r-2} (-1)^{r-k} \frac{x_1^k x_2^{r-k-1} x_{k+2}}{(r-k-1)!} - x_1^{r-1} x_{r+1}, \quad r = 4, 5, \dots, n-2.$$

2. Случай, когда λ отличны от нуля. Разберем теперь случай $\lambda \neq 0$. Система (1) в этом случае примет вид системы n уравнений, из первых $(n-1)$ уравнений которой следует, что инварианты не зависят от x_n . Последнее уравнение этой системы имеет вид:

$$(5) \quad \lambda x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (x_1 + \lambda x_2) \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + (x_{n-2} + \lambda x_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} = 0.$$

Оно эквивалентно (в указанном выше смысле) системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(6) \quad \frac{dx_1}{\lambda x_1} = \frac{dx_2}{x_1 + \lambda x_2} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{x_{n-2} + \lambda x_{n-1}} = \frac{ds}{s}.$$

Сравнивая первый и второй, первый и третий, затем первый и четвертый члены в (6), получаем: $F_1 = C_1 = x_1 \exp(-\lambda x_2/x_1)$, $F_2 = C_2 = \frac{x_2^2}{2x_1} - \frac{x_3}{x_1}$, $F_3 = \frac{1}{x_1^3}(-\frac{1}{3}x_2^3 + x_1 x_2 x_3 - x_1^2 x_4)$.

ТЕОРЕМА 2.

$$F_l = \frac{1}{x_1^l} \left((-1)^l \frac{x_2^l}{l((l-2)!)!} + \sum_{k=1}^{l-2} (-1)^{l-k} \frac{x_1^k x_2^{l-k-1} x_{k+2}}{(l-k-1)!} - x_1^{l-1} x_{l+1} \right), \quad l = 4, 5, \dots, n-2.$$

ТЕОРЕМА 3. *Инварианты коприсоединенного представления, полученные для случая $\lambda = 0$, функционально независимы. Функционально независимы и инварианты, полученные для случая $\lambda \neq 0$.*

Автор выражает благодарность В. В. Трофимову за ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Трофимов В. В. Введение в геометрию многообразий с симметриями. М.: Изд-во МГУ, 1989.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
16.01.1995