Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гонцов, В. А. Побережный, Различные варианты проблемы Римана–Гильберта для линейных дифференциальных уравнений, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 4, 3–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9230>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:24:02

УДК 517.927.7+517.936

Различные варианты проблемы Римана–Гильберта для линейных дифференциальных уравнений

Р. Р. Гонцов, В. А. Побережный

Контрпример к 21-й проблеме Гильберта был найден А. А. Болибрухом в 1988 г. (и опубликован в 1989 г.). При дальнейшем исследовании этой проблемы им был существенно развит подход, использующий голоморфные векторные расслоения и мероморфные связности. Мы излагаем наиболее известные результаты прошедшего времени, полученные с помощью данного подхода (как по 21-й проблеме Гильберта, так и по некоторым ее обобщениям).

Библиография: 61 название.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
§ 1. Основные определения и постановка классической проблемы	4
§ 2. Метод решения	8
§ 3. Проблема Римана–Гильберта для скалярных фуксовых уравнений ...	19
§ 4. Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности	25
§ 5. Проблема Римана–Гильберта для систем с иррегулярными особенностями	29
§ 6. Некоторые геометрические свойства отображения монодромии	36
Список литературы	39

Введение

Работа посвящена 21-й проблеме Гильберта (проблеме Римана–Гильберта), которая в том или ином виде рассматривалась еще Б. Риманом в середине XIX столетия, и некоторым ее обобщениям, возникшим в конце XX века. Эта проблема относится к аналитической теории дифференциальных уравнений и состоит в построении линейного дифференциального уравнения (или системы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00667), NWO (грант № 047.017.2004.015) и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-3038.2008.1).

уравнений) определенного класса, имеющего заданные особые точки и характер ветвления решений в этих особых точках.

Наиболее существенные достижения в решении проблемы Римана–Гильберта связаны с именем А. А. Болибруха. До него долгое время она ошибочно считалась решенной в положительном смысле. Однако А. А. Болибрух построил первый контрпример к этой проблеме, что послужило развитию теории в новом направлении, намеченном в обзорной статье “Проблема Римана–Гильберта” [1].

В данной работе мы остановимся на основных достижениях последнего времени в исследовании проблемы Римана–Гильберта и ее обобщений, а также обозначим некоторые вопросы, естественно возникающие при рассмотрении этих результатов.

Основные понятия аналитической теории линейных дифференциальных уравнений и общий подход к исследованию классической проблемы Римана–Гильберта для фуксовых систем на сфере Римана, вместе с наиболее известными результатами, изложены в первых двух параграфах.

В §3 рассматривается проблема Римана–Гильберта для скалярных фуксовых уравнений и ее связь с нелинейными дифференциальными уравнениями (уравнения Пенлеве VI, системы Гарнье).

Возможные обобщения классической проблемы Римана–Гильберта на случай фуксовых систем, заданных на компактной римановой поверхности произвольного рода, изложены в §4.

В §5 рассматривается обобщенная проблема Римана–Гильберта для линейных систем с иррегулярными особыми точками.

В §6 приводится краткое описание некоторых геометрических понятий и конструкций, связанных с проблемой Римана–Гильберта.

Авторы выражают глубокую благодарность Д. В. Аносову, В. П. Лексину и И. В. Вьюгину за полезные замечания и обсуждения, которыми они помогли при подготовке данной работы.

§ 1. Основные определения и постановка классической проблемы

Рассмотрим систему p линейных дифференциальных уравнений на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, записанную в матричном виде

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p, \quad (1)$$

где $B(z)$ – мероморфная на сфере Римана матрица коэффициентов системы, имеющая особенности в точках $a_1, \dots, a_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Особая точка a_i системы (1) называется *фуксовой*, если матрица $B(z)$ имеет в этой точке полюс первого порядка.

Особая точка a_i системы (1) называется *регулярной*, если в ее окрестности любое решение системы имеет не более чем степенной рост. Особая точка, не являющаяся регулярной, называется *иррегулярной*.

Фуксовы особенности со многих точек зрения представляют собой наиболее простой тип особых точек системы (1). Согласно теореме Соважа [2], фуксова особая точка линейной системы всегда является регулярной (см. также [3; теорема 11.1]).

Регулярные особенности линейной системы – следующие по сложности после фуксовых. Матрица коэффициентов системы в регулярной особой точке, вообще говоря, может иметь полюс порядка выше единицы¹. В таком случае выяснить, будет ли особенность регулярной или нет, оказывается непросто. (Проверка всех существующих критериев регулярности особой точки линейной системы в общем случае довольно затруднительна. Один из первых таких критериев получен Ю. Мозером [4], впоследствии появлялись и другие, см. [5], [6].) Имеется, однако, простое *необходимое* условие регулярности особой точки, полученное Й. Горном [7] и состоящее в следующем. Запишем ряд Лорана для матрицы $B(z)$ коэффициентов системы (1) в окрестности ее особой точки $z = a$ в виде

$$B(z) = \frac{B_{-r-1}}{(z-a)^{r+1}} + \cdots + \frac{B_{-1}}{z-a} + B_0 + \cdots, \quad B_{-r-1} \neq 0.$$

(Число r называется *рангом Пуанкаре* системы (1) в этой точке или рангом Пуанкаре особой точки $z = a$. Например, ранг Пуанкаре фуксовой особенности равен нулю.)

Если $z = a$ – регулярная особая точка системы (1) и $r > 0$, то B_{-r-1} – нильпотентная матрица.

Приведем еще одно простое *необходимое* условие регулярности особой точки линейной системы.

Если $z = a$ – регулярная особая точка системы (1) и $r > 0$, то $\operatorname{tr} B_{-r-1} = \cdots = \operatorname{tr} B_{-2} = 0$.

Данное условие следует из того, что определитель фундаментальной матрицы $Y(z)$ системы (1) (матрицы, столбцы которой образуют базис в пространстве решений системы) в силу известной теоремы Лиувилля удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dz} \det Y = \operatorname{tr} B(z) \det Y$. Если особая точка $z = a$ системы (1) является регулярной, то она будет регулярной (следовательно, фуксовой) особенностью последнего уравнения. Поэтому функция $\operatorname{tr} B(z)$ должна иметь простой полюс в этой точке.

Иррегулярные особые точки образуют самый сложный тип особенностей линейной системы.

Система (1) называется *фуксовой*, если все ее особые точки фуксовы. Если бесконечность не входит в число особенностей фуксовой системы, то система может быть записана в виде

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{z-a_i} \right) y, \quad \sum_{i=1}^n B_i = 0.$$

¹Только в случае, когда система состоит из одного уравнения ($p = 1$), понятия регулярной и фуксовой особых точек совпадают. Это проверяется непосредственным интегрированием уравнения.

(Если одна из особенностей, например a_n , расположена в бесконечности, то матрица коэффициентов имеет вид $B(z) = \sum_{i=1}^{n-1} B_i/(z - a_i)$, но сумма вычетов B_i уже отлична от нулевой матрицы.)

Одной из важных характеристик линейной системы является ее *представление монодромии* (или *монодромия*), которое определяется следующим образом.

В окрестности неособой точки z_0 рассмотрим фундаментальную матрицу $Y(z)$ системы (1). Результатом аналитического продолжения матрицы $Y(z)$ вдоль петли γ , начинающейся в точке z_0 и лежащей в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, будет, вообще говоря, другая фундаментальная матрица $\tilde{Y}(z)$. Два базиса связаны с помощью невырожденной матрицы перехода G_γ , соответствующей петле γ :

$$Y(z) = \tilde{Y}(z)G_\gamma.$$

Отображение $[\gamma] \mapsto G_\gamma$ (которое зависит только от гомотопического класса $[\gamma]$ петли γ) задает представление

$$\chi: \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, z_0) \rightarrow \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$$

фундаментальной группы пространства $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ в пространство невырожденных комплексных матриц порядка p . Это представление и называется монодромией системы (1).

Матрицей монодромии системы (1) в особой точке a_i (относительно фундаментальной матрицы $Y(z)$) называется матрица G_i , соответствующая простой петле γ_i , обходящей точку a_i , т. е. $G_i = \chi([\gamma_i])$. Матрицы $G_1, \dots, G_n$ являются образующими *группы монодромии* – образа отображения χ и в силу условия $\gamma_1 \cdots \gamma_n = e$ в фундаментальной группе связаны соотношением $G_1 \cdots G_n = I$ (здесь и далее I обозначает единичную матрицу).

Если изначально вместо фундаментальной матрицы $Y(z)$ рассмотреть другую фундаментальную матрицу $Y'(z) = Y(z)C$, $C \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$, то соответствующие ей матрицы монодромии будут иметь вид $G'_i = C^{-1}G_iC$. Аналогичным образом устроена и зависимость матриц G_i от выбора начальной точки z_0 . Таким образом, монодромия линейной системы определена с точностью до сопряжения на постоянную невырожденную матрицу и, говоря точнее, является элементом пространства

$$\mathcal{M}_a = \mathrm{Hom}(\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}), \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})) / \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$$

классов сопряженности представлений группы $\pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$.

Число параметров, от которых зависит монодромия, можно подсчитать, рассмотрев только неприводимые представления (поскольку при $n > 2$ приводимые образуют подпространство некоторой положительной коразмерности). В таком случае размерность класса сопряженности

$$\{(S^{-1}G_1S, \dots, S^{-1}G_nS) \mid S \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})\} \cong \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) / \mathrm{st}(G_1, \dots, G_n)$$

элемента $(G_1, \dots, G_n)$ равна $\dim \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) - \dim \mathrm{st}(G_1, \dots, G_n) = p^2 - 1$. (Согласно лемме Шура, если матрица S коммутирует со всеми матрицами G_i , то

она скалярна, поэтому $\dim \operatorname{st}(G_1, \dots, G_n) = 1$.) Следовательно, размерность пространства

$$\mathcal{M}_a \cong \{(G_1, \dots, G_n) \mid G_1 \cdots G_n = I\} / \operatorname{GL}(p, \mathbb{C})$$

равна $(n-1)p^2 - (p^2 - 1) = (n-2)p^2 + 1$.

Классическая проблема Римана–Гильберта формулируется следующим образом.

Возможно ли заданный набор особых точек $a_1, \dots, a_n$ и заданное представление

$$\chi: \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, z_0) \rightarrow \operatorname{GL}(p, \mathbb{C}) \quad (2)$$

реализовать фуксовой системой (т.е. построить фуксову систему с заданными особенностями и монодромией)?

Таким образом, проблема Римана–Гильберта является вопросом о сюръективности отображения монодромии $\mu_a: \mathcal{M}_a^* \rightarrow \mathcal{M}_a$ из пространства

$$\mathcal{M}_a^* \cong \{(B_1, \dots, B_n) \mid B_i \in \operatorname{Mat}(p, \mathbb{C}), B_1 + \dots + B_n = 0\} / \operatorname{GL}(p, \mathbb{C})$$

фуксовых систем с фиксированными особенностями $a_1, \dots, a_n$ (рассмотренных с точностью до эквивалентности $B_i \sim S^{-1}B_iS$, $i = 1, \dots, n$) в пространстве $\mathcal{M}_a$. Хотя размерности этих пространств одинаковы, отображение μ_a не сюръективно, и в общем случае проблема имеет отрицательное решение. Первый контрпример появляется в размерности $p = 3$ для числа особых точек $n = 4$ (А. А. Болибрух [8], см. также [9; гл. 2]). Подробнее об отображении монодромии мы скажем в § 6.

Существует множество достаточных условий положительного решения классической проблемы Римана–Гильберта. Мы приведем наиболее известные из них, а на некоторых аналогах их остановимся также и при исследовании различных обобщений классической проблемы (наиболее простые доказательства большинства из этих достаточных условий изложены в [10]).

1) Если одна из образующих $G_1, \dots, G_n$ представления (2) диагонализирована, то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение² (Й. Племель [12]).

2) Если представление (2) двумерно ($p = 2$), то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение (В. Деккерс [13]).

3) Если представление (2) неприводимо, то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение (А. А. Болибрух [14], В. П. Костов [15]).

4) Если представление (2) является монодромией некоторого скалярного линейного дифференциального уравнения порядка p с регулярными особенностями $a_1, \dots, a_n$, то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение (А. А. Болибрух [16]).

² Данное условие улучшено В. П. Костовым [11]. Если одна из матриц $G_1, \dots, G_n$ в своей жордановой форме имеет не более одной клетки размера 2, а остальные клетки размера 1, то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение. Дальнейшее улучшение этого условия в терминах жордановой формы одной из матриц монодромии невозможно, поскольку существуют контрпримеры к проблеме Римана–Гильберта, когда жорданова форма матриц монодромии содержит одну клетку размера 3 или две клетки размера 2.

Сделаем несколько пояснений к последнему достаточному условию. Монодромия линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^p y}{dz^p} + b_1(z) \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}} + \dots + b_p(z) y = 0 \quad (3)$$

порядка p с особыми точками $a_1, \dots, a_n$ (полюсами коэффициентов) определяется так же, как и для системы (1), нужно только вместо фундаментальной матрицы $Y(z)$ рассмотреть строку $(y_1, \dots, y_p)$, элементы которой образуют базис в пространстве решений уравнения.

В отличие от системы, для скалярного уравнения существует простой критерий регулярности особой точки этого уравнения, полученный Л. Фуксом [17] (см. также [3; теорема 12.1]): *особенность a_i уравнения (3) является регулярной тогда и только тогда, когда коэффициент $b_j(z)$ имеет в этой точке полюс порядка не более j ($j = 1, \dots, p$)*. Скалярные дифференциальные уравнения с регулярными особыми точками называются *фуксовыми*.

Изначально Б. Риман [18] сформулировал задачу о построении именно *фуксова дифференциального уравнения* с заданными особыми точками и монодромией. Однако А. Пуанкаре [19] было показано, что, в отличие от фуксовой системы, число параметров, от которых зависит фуксово уравнение, меньше размерности пространства $\mathcal{M}_a$ представлений монодромии³. После этого Д. Гильберт [20] включил в число своих “Математических проблем” задачу о построении *фуксовой системы* с заданными особенностями и монодромией, которая и получила название проблемы Римана–Гильберта (подробно история исследований по проблеме Римана–Гильберта и ее окончательного решения изложена в [21], [22]).

§ 2. Метод решения

При исследовании задач, связанных с проблемой Римана–Гильберта, весьма полезным инструментом служат линейные калибровочные преобразования вида

$$y' = \Gamma(z) y \quad (4)$$

неизвестной функции $y(z)$. Преобразование (4) называется *голоморфно* (мероморфно) *обратимым* в некоторой точке z_0 , если матрица $\Gamma(z)$ голоморфна (мероморфна) в этой точке и $\det \Gamma(z_0) \neq 0$ ($\det \Gamma(z) \not\equiv 0$). Данное преобразование переводит систему (1) в систему

$$\frac{dy'}{dz} = B'(z) y', \quad B'(z) = \frac{d\Gamma}{dz} \Gamma^{-1} + \Gamma B(z) \Gamma^{-1}, \quad (5)$$

которая называется соответственно *голоморфно* или *мероморфно эквивалентной* исходной системе в окрестности точки z_0 .

³Поэтому в общем случае при построении фуксова уравнения с заданной монодромией необходимо возникают дополнительные (помимо $a_1, \dots, a_n$) *ложные* особые точки, в которых коэффициенты уравнения имеют особенности, но решения являются однозначными мероморфными функциями и, следовательно, матрицы монодромии в этих точках единичны. В дальнейшем под дополнительными особыми точками уравнения или системы будем понимать именно такие особенности.

Важным свойством мероморфных калибровочных преобразований является то, что они сохраняют монодромию (в силу мероморфности матрица $\Gamma(z)$ однозначна на проколотой сфере Римана, поэтому ветвление фундаментальной матрицы $\Gamma(z)Y(z)$ новой системы совпадает с ветвлением матрицы $Y(z)$).

Голоморфно обратимое в окрестности особой точки a_i системы (1) преобразование не изменяет ранг Пуанкаре этой особенности, тогда как мероморфно обратимое преобразование может повысить или понизить его.

Локально, в окрестности каждой точки a_k , нетрудно предъявить систему, для которой a_k была бы фуксовой особенностью, а матрица монодромии в этой точке совпадала бы с соответствующей образующей $G_k = \chi([\gamma_k])$ представления (2). Это – система

$$\frac{dy}{dz} = \frac{E_k}{z - a_k} y, \quad E_k = \frac{1}{2\pi i} \ln G_k, \quad (6)$$

с фундаментальной матрицей $(z - a_k)^{E_k} := e^{E_k \ln(z - a_k)}$ (ветвь логарифма матрицы G_k выбирается таким образом, чтобы собственные значения ρ_k^j матрицы E_k удовлетворяли условию $0 \leq \operatorname{Re} \rho_k^j < 1$). Действительно,

$$\frac{d}{dz}(z - a_k)^{E_k} = \frac{E_k}{z - a_k} (z - a_k)^{E_k},$$

а однократный обход точки a_k против часовой стрелки преобразует матрицу $(z - a_k)^{E_k}$ в матрицу

$$e^{E_k(\ln(z - a_k) + 2\pi i)} = e^{E_k \ln(z - a_k)} e^{2\pi i E_k} = (z - a_k)^{E_k} G_k.$$

Заметим, что в случае, когда представление (2) коммутативно (т. е. когда матрицы $G_1, \dots, G_n$ попарно коммутируют), проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение. Приведенные выше рассуждения нужно применить к фундаментальной матрице $Y(z) = (z - a_1)^{E_1} \cdots (z - a_{n-1})^{E_{n-1}} (z - a_n)^{E_n - D}$, $D = \sum_{i=1}^n E_i$, глобальной фуксовой системы

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{E_i}{z - a_i} + \frac{E_n - D}{z - a_n} \right) y$$

с особенностями $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. (В данном случае существенно используются соотношения $[G_i, G_j] = 0$ и следующие из них соотношения $[G_i, (z - a_j)^{E_j}] = [G_i, (z - a_n)^{E_n - D}] = 0$. Коммутативность также влечет $\ln G_1 \cdots G_n = \ln G_1 + \cdots + \ln G_n$ и, ввиду условия $G_1 \cdots G_n = I$, обеспечивает, что D является диагональной целочисленной матрицей и не влияет на монодромию в точке a_n .)

Интересно, что положительное решение проблемы Римана–Гильберта в случае коммутативности представления (2) впервые получено И. А. Лапшо-Данилевским [23] и это достаточное условие до него не отмечалось (он упоминает об этом в своей речи, произнесенной на защите диссертации в 1929 г.).

Конечно, не всякая система с фуксовой особенностью a_k и матрицей G_k локальной монодромии голоморфно эквивалентна в окрестности этой точки системе (6).

Пусть $\Lambda_k = \text{diag}(\lambda_k^1, \dots, \lambda_k^p)$ – диагональная целочисленная матрица, элементы λ_k^j которой образуют невозрастающую последовательность, а S_k – невырожденная матрица, приводящая матрицу E_k к верхнетреугольному виду $E'_k = S_k E_k S_k^{-1}$. Тогда, согласно (5), преобразование

$$y' = \Gamma(z) y, \quad \Gamma(z) = (z - a_k)^{\Lambda_k} S_k,$$

переводит систему (6) в систему

$$\frac{dy'}{dz} = \left(\frac{\Lambda_k}{z - a_k} + (z - a_k)^{\Lambda_k} \frac{E'_k}{z - a_k} (z - a_k)^{-\Lambda_k} \right) y', \quad (7)$$

для которой точка a_k является также фуксовой особенностью (из вида матриц Λ_k и E'_k следует голоморфность матрицы $(z - a_k)^{\Lambda_k} E'_k (z - a_k)^{-\Lambda_k}$), а матрица G_k – матрицей монодромии.

Согласно теореме Левеля [24], любая фуксова система в окрестности особой точки a_k голоморфно эквивалентна системе вида (7). В то же время, класс мероморфной эквивалентности системы в окрестности регулярной (в частности, фуксовой) особой точки a_k однозначно определяется матрицей G_k ее локальной монодромии, поскольку такая система мероморфно эквивалентна системе вида (6).

Будем называть набор $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n, S_1, \dots, S_n\}$ матриц, обладающих описанными выше свойствами, набором *допустимых матриц*.

Проблема Римана–Гильберта решается положительно, если от локальных систем (7) удастся перейти к глобальной фуксовой системе, заданной на всей сфере Римана. При исследовании этого вопроса эффективным оказывается использование голоморфных векторных расслоений и мероморфных связностей.

Напомним вкратце основные понятия теории голоморфных векторных расслоений (подробное изложение в объеме, вполне достаточном для приложения к линейным дифференциальным уравнениям в комплексной области, содержится в [10], а также в [25; гл. 3]).

Голоморфное векторное расслоение $\pi: E \rightarrow B$ ранга p над (одномерным) комплексным многообразием B обладает следующими свойствами:

а) для любой точки $z \in B$ слой $\pi^{-1}(z)$ является p -мерным векторным пространством, а также существует окрестность U точки z такая, что прообраз $\pi^{-1}(U)$ биголоморфно эквивалентен $U \times \mathbb{C}^p$ (при этом биголоморфная эквивалентность отображает $\pi^{-1}(z)$ на $\{z\} \times \mathbb{C}^p$ изоморфно как векторные пространства);

б) для любых окрестностей U_α, U_β с непустым пересечением локальные карты $U_\alpha \times \mathbb{C}^p, U_\beta \times \mathbb{C}^p$ согласованы:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^p, & \varphi_\beta: \pi^{-1}(U_\beta) &\rightarrow U_\beta \times \mathbb{C}^p; \\ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^p &\rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^p, \\ &(z, y) \mapsto (z, g_{\alpha\beta}(z)y), \end{aligned}$$

где $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(p, \mathbb{C})$ – голоморфное отображение.

Набор $\{g_{\alpha\beta}(z)\}$ голоморфно обратимых матричных функций, удовлетворяющих условиям

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}, \quad g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = I \quad (\text{при } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset),$$

называется *склеивающим коциклом*, отвечающим покрытию $\{U_\alpha\}$ многообразия B .

Расслоения E и F над B (голоморфно) эквивалентны, если найдется набор $\{h_\alpha(z)\}$ голоморфных отображений $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow \text{GL}(p, \mathbb{C})$ такой, что

$$h_\alpha g_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} h_\beta \quad (8)$$

для склеивающих коциклов $\{g_{\alpha\beta}(z)\}$, $\{f_{\alpha\beta}(z)\}$ этих расслоений.

Расслоение E голоморфно тривиально, если оно эквивалентно прямому произведению $B \times \mathbb{C}^p$, т. е. если для коцикла $\{g_{\alpha\beta}(z)\}$ выполнены соотношения (8), где все $f_{\alpha\beta}(z) \equiv I$.

Подрасслоение $E' \subset E$ ранга q характеризуется тем, что для любой точки $z \in B$ множество $\pi^{-1}(z) \cap E'$ является q -мерным векторным подпространством в $\pi^{-1}(z)$. Коцикл $\{g_{\alpha\beta}(z)\}$ при этом может быть выбран блочно-верхнетреугольным:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}^1 & * \\ 0 & g_{\alpha\beta}^2 \end{pmatrix},$$

где $g_{\alpha\beta}^1$ – матрицы размера $q \times q$, образующие коцикл расслоения E' .

Сечением расслоения E называется отображение $s: B \rightarrow E$ такое, что $\pi \circ s \equiv \text{id}$. В локальных картах $U_\alpha \times \mathbb{C}^p$ голоморфное (мероморфное) сечение задается набором $\{s_\alpha(z)\}$ голоморфных (мероморфных) функций $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^p$ таких, что $\varphi_\alpha(s(z)) = (z, s_\alpha(z))$, и на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ удовлетворяющих условиям $s_\alpha(z) = g_{\alpha\beta}(z)s_\beta(z)$.

Голоморфная связность $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\tau_B^* \otimes E)$ является линейным отображением пространства $\Gamma(E)$ голоморфных сечений расслоения E в пространство голоморфных сечений расслоения $\tau_B^* \otimes E$, где τ_B^* – кокасательное расслоение над B . Сечения расслоения $\tau_B^* \otimes E$ – это E -значные дифференциальные 1-формы на B . Такие сечения задаются набором $\{\Omega_\alpha\}$ (векторных) дифференциальных 1-форм, определенных в соответствующих окрестностях U_α и на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ удовлетворяющих условиям $\Omega_\alpha = g_{\alpha\beta}(z)\Omega_\beta$.

В локальных координатах $U_\alpha \times \mathbb{C}^p$ связность задается набором $\{\omega_\alpha\}$ матричных голоморфных дифференциальных 1-форм, определенных в соответствующих окрестностях U_α . Координатное действие связности ∇ на функции $s_\alpha(z)$, задающие сечение s , имеет вид

$$s_\alpha \mapsto \Omega_\alpha = ds_\alpha - \omega_\alpha s_\alpha.$$

Тогда условия согласования для $\{s_\alpha\}$ и $\{\Omega_\alpha\}$ переписываются для $\{\omega_\alpha\}$ как

$$\omega_\alpha = (dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\omega_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \quad (\text{при } U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset). \quad (9)$$

Аналогично, *мероморфная связность* $\nabla: M(E) \rightarrow M(\tau_B^* \otimes E)$ является линейным отображением соответствующих пространств мероморфных сечений

и задается набором матричных мероморфных дифференциальных 1-форм. Мероморфная связность называется *логарифмической* (*фуксовой*), если все особые точки этих 1-форм суть полюсы первого порядка.

Сечение s называется *горизонтальным* (относительно связности ∇), если $\nabla(s) = 0$, или, в координатах, $ds_\alpha = \omega_\alpha s_\alpha$. Таким образом, горизонтальные сечения голоморфного векторного расслоения с мероморфной связностью определяются решениями систем линейных дифференциальных уравнений. В то же время всякий набор p линейно независимых сечений можно рассматривать как базис в пространстве горизонтальных сечений относительно некоторой мероморфной связности.

Монодромия связности характеризует ветвление горизонтальных сечений при аналитическом продолжении вдоль замкнутых путей в B , не задевающих особые точки связности, и определяется аналогично монодромии системы (1).

Подход к решению проблемы Римана–Гильберта, основанный на использовании голоморфных векторных расслоений, возник в работах Х. Рёрля [26], А. Левеля [24], П. Делиня [27], был развит А. А. Болибрухом и позволил ему получить различные достаточные условия положительного решения проблемы (некоторые из них были приведены выше, еще одно мы приведем далее). Изложим вкратце этот подход (подробно см. в [9], [10]).

1. Сначала по представлению (2) над проколотой сферой Римана $B = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ строится голоморфное векторное расслоение F ранга p с голоморфной связностью ∇ , имеющей заданную монодromию (2). Расслоение F над B получается из голоморфно тривиального расслоения $\tilde{B} \times \mathbb{C}^p$ над универсальным накрытием $\tilde{B}$ проколотой сферы Римана после отождествлений вида $(\tilde{z}, y) \sim (\sigma\tilde{z}, \chi(\sigma)y)$, где $\tilde{z} \in \tilde{B}$, $y \in \mathbb{C}^p$ и σ – элементы группы накрывающих преобразований пространства $\tilde{B}$, отождествленной с фундаментальной группой $\pi_1(B)$. Таким образом, $F = \tilde{B} \times \mathbb{C}^p / \sim$ и $\pi: F \rightarrow B$ – естественная проекция.

Покажем, что склеивающий коцикл $\{g_{\alpha\beta}\}$ расслоения F постоянен. Рассмотрим набор $\{U_\alpha\}$ малых окрестностей, покрывающих B , и набор $\tilde{z}_\alpha: U_\alpha \rightarrow \nu^{-1}(U_\alpha)$ локальных голоморфных сечений универсального накрытия $\nu: \tilde{B} \rightarrow B$. На непустых пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ функции $\tilde{z}_\alpha(z)$, $\tilde{z}_\beta(z)$ связаны соотношением

$$\tilde{z}_\alpha(z) = \delta_{\alpha\beta} \tilde{z}_\beta(z), \quad \delta_{\alpha\beta} \in \pi_1(B)$$

(отображения $\delta_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \pi_1(B)$ локально постоянны, поэтому мы можем даже считать их постоянными, например, когда все $U_\alpha \cap U_\beta$ связны). Локальные отображения $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^p$ задаются соотношениями

$$\varphi_\alpha: [\tilde{z}_\alpha(z), y] \mapsto (z, y),$$

где $[\tilde{z}_\alpha(z), y]$ – класс эквивалентности элемента $(\tilde{z}_\alpha(z), y) \in \tilde{B} \times \mathbb{C}^p$. Поэтому для $z \in U_\alpha \cap U_\beta$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(z, y) &= \varphi_\alpha([\tilde{z}_\beta(z), y]) = \varphi_\alpha([\delta_{\alpha\beta}^{-1} \tilde{z}_\alpha(z), y]) \\ &= \varphi_\alpha([\tilde{z}_\alpha(z), \chi(\delta_{\alpha\beta})y]) = (z, \chi(\delta_{\alpha\beta})y), \end{aligned}$$

т. е. $g_{\alpha\beta}(z) = \chi(\delta_{\alpha\beta}) = \text{const.}$

Теперь связность ∇ можно задать набором $\{\omega_\alpha\}$ матричных дифференциальных 1-форм $\omega_\alpha \equiv 0$, на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ очевидно удовлетворяющих условиям склейки (9). При этом из построения расслоения F следует, что монодромия связности ∇ совпадает с χ .

2. Далее пара (F, ∇) продолжается до расслоения F^0 с логарифмической связностью ∇^0 над всей сферой Римана. Для этого набор $\{U_\alpha\}$ нужно дополнить малыми окрестностями $O_1, \dots, O_n$ точек $a_1, \dots, a_n$ соответственно. Продолжение расслоения F в каждую точку a_i выглядит следующим образом. Для некоторого непустого пересечения $O_i \cap U_\alpha$ положим $g_{i\alpha}(z) = (z - a_i)^{E_i}$ в этом пересечении. Для любой другой окрестности U_β , имеющей непустое пересечение с O_i , определим $g_{i\beta}(z)$ как аналитическое продолжение матричной функции $g_{i\alpha}(z)$ в $O_i \cap U_\beta$ вдоль подходящего пути (так, чтобы набор $\{g_{\alpha\beta}, g_{i\alpha}(z)\}$ определял коцикл для покрытия $\{U_\alpha, O_i\}$ сферы Римана). Продолжение связности ∇ в каждую точку a_i задается матричной дифференциальной 1-формой $\omega_i = \frac{E_i}{z - a_i} dz$, имеющей простой полюс в этой точке. Тогда набор $\{\omega_\alpha, \omega_i\}$ определяет логарифмическую связность ∇^0 в расслоении F^0 , поскольку наряду с условиями (9) для непустых пересечений $U_\alpha \cap U_\beta$ также выполняются условия

$$(dg_{i\alpha})g_{i\alpha}^{-1} + g_{i\alpha}\omega_\alpha g_{i\alpha}^{-1} = \frac{E_i}{z - a_i} dz = \omega_i, \quad O_i \cap U_\alpha \neq \emptyset$$

(см. (6)). Пара (F^0, ∇^0) называется *каноническим продолжением* пары (F, ∇) .

3. Аналогично построению пары (F^0, ∇^0) можно построить семейство $\mathcal{F}$ расслоений F^Λ с логарифмическими связностями ∇^Λ , имеющими заданные особенности и монодромию. Для этого нужно заменить матрицы $g_{i\alpha}(z)$ в построении пары (F^0, ∇^0) матрицами

$$g_{i\alpha}^\Lambda(z) = (z - a_i)^{\Lambda_i} S_i (z - a_i)^{E_i},$$

а формы ω_i – формами

$$\omega_i^\Lambda = (\Lambda_i + (z - a_i)^{\Lambda_i} E_i' (z - a_i)^{-\Lambda_i}) \frac{dz}{z - a_i},$$

где $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n, S_1, \dots, S_n\}$ – всевозможные наборы допустимых матриц. При этом снова будут выполнены условия

$$(dg_{i\alpha}^\Lambda)(g_{i\alpha}^\Lambda)^{-1} + g_{i\alpha}^\Lambda \omega_\alpha (g_{i\alpha}^\Lambda)^{-1} = \omega_i^\Lambda \quad (10)$$

на непустых пересечениях $O_i \cap U_\alpha$ (см. (7)).

Строго говоря, расслоение F^Λ зависит также от набора $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ матриц S_i , приводящих матрицы монодромии G_i к верхнетреугольному виду. Поэтому, учитывая эту зависимость, расслоения из семейства $\mathcal{F}$ следует обозначать $F^{\Lambda, S}$, но в дальнейшем нам понадобится лишь зависимость от набора $\Lambda = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$, и под F^Λ будем подразумевать расслоение, построенное по данному набору Λ и некоторому набору S . (Сказанное не относится к каноническому продолжению F^0 расслоения F , которое не зависит от выбора матриц S_i .)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Собственные значения $\beta_i^j = \lambda_i^j + \rho_i^j$ матрицы $\Lambda_i + E'_i$ называются *показателями* логарифмической связности ∇^Λ в точке $z = a_i$. (Из вида форм ω_i^Λ следует, что показатели в точке $z = a_i$ – это собственные значения матрицы-вычета $\text{res}_{a_i} \omega_i^\Lambda$.)

Отмеченная выше зависимость расслоения F^Λ от наборов $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ существенна только в случае, когда хотя бы одна из особых точек a_i связности ∇^Λ является *резонансной* особенностью (т.е. когда среди показателей связности в этой точке найдутся два, отличающиеся на натуральное число). Данное замечание следует из того, что класс голоморфной эквивалентности фуксовой системы вида (7) в окрестности нерезонансной особой точки a_i однозначно определяется локальной монодромией системы в этой точке и допустимой матрицей Λ_i (см., например, [10; упражнение 14.5]).

Если некоторое расслоение F^Λ семейства $\mathcal{F}$ окажется голоморфно тривиальным, то соответствующая связность ∇^Λ будет определять глобальную систему (1), решающую проблему Римана–Гильберта. Действительно, тривиальность расслоения F^Λ означает, что для покрытия $\{U_\alpha, O_i\}$ сферы Римана найдется соответствующий набор $\{h_\alpha(z), h_i(z)\}$ голоморфно обратимых матриц таких, что

$$h_\alpha(z)g_{\alpha\beta} = h_\beta(z), \quad h_i(z)g_{i\alpha}^\Lambda(z) = h_\alpha(z) \quad (11)$$

соответственно в $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ и $O_i \cap U_\alpha \neq \emptyset$. Эти соотношения наряду с условиями (10) влекут совпадение форм

$$\omega'_i = (dh_i)h_i^{-1} + h_i\omega_i^\Lambda h_i^{-1}, \quad \omega'_\alpha = (dh_\alpha)h_\alpha^{-1} + h_\alpha\omega_\alpha h_\alpha^{-1} \quad (12)$$

на соответствующих непустых пересечениях, что определяет глобальную форму $\omega = B(z)dz$ на всей сфере Римана. По построению глобальная система $dy = \omega y$ имеет фуксовы особенности $a_1, \dots, a_n$ и заданную монодрию (2).

С другой стороны, ввиду упомянутой выше теоремы Левеля, из существования глобальной фуксовой системы с заданными особыми точками $a_1, \dots, a_n$ и монодромией (2) следует тривиальность некоторого расслоения семейства $\mathcal{F}$.

Таким образом, *проблема Римана–Гильберта, разрешима тогда и только тогда, когда хотя бы одно из расслоений семейства $\mathcal{F}$ голоморфно тривиально.*

Согласно теореме Биркгофа–Гротендика, любое голоморфное векторное расслоение E ранга p над сферой Римана эквивалентно прямой сумме

$$E \cong \mathcal{O}(k_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(k_p)$$

линейных расслоений, имеющей координатное описание вида

$$(U_1 = \mathbb{C}, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1\}, g_{1\infty} = (z - a_1)^K), \quad K = \text{diag}(k_1, \dots, k_p),$$

где $k_1 \geq \dots \geq k_p$ – набор целых чисел, который называется *типом расщепления* расслоения E .

Из этого следует, что для коцикла $\{g_{\alpha\beta}, g_{i\alpha}^\Lambda(z)\}$, задающего расслоение F^Λ из семейства $\mathcal{F}$, найдется набор $\{h_\alpha(z), h'_i(z)\}$ голоморфно обратимых матриц таких, что

$$\begin{aligned} h_\alpha(z)g_{\alpha\beta} &= h_\beta(z), & h'_1(z)g_{1\alpha}^\Lambda(z) &= (z - a_1)^K h_\alpha(z), \\ h'_i(z)g_{i\alpha}^\Lambda(z) &= h_\alpha(z), & i &\neq 1, \end{aligned}$$

в соответствующих непустых пересечениях (где матрица K задает тип расщепления расслоения F^Λ). Эти соотношения можно записать в виде (11), где все матрицы $h_i(z)$, за исключением $h_1(z)$, голоморфно обратимы в соответствующих окрестностях O_i , а матрица $h_1(z)$ имеет вид $h_1(z) = (z - a_1)^{-K} h'_1(z)$.

Следовательно, всегда найдется глобальная система $dy = \omega y$ с заданными особенностями $a_1, \dots, a_n$ и монодромией (2), но только ее особая точка a_1 может оказаться не фуксовой, поскольку

$$\omega = -\frac{K}{z - a_1} dz + (z - a_1)^{-K} \omega'_1(z - a_1)^K \quad (13)$$

в O_1 , где $\text{ord}_{a_1} \omega'_1 = -1$. Этот результат называется теоремой Племеля.

ТЕОРЕМА 1 (Й. Племель [12]). *Заданный набор точек $a_1, \dots, a_n$ и представление (2) всегда можно реализовать системой (1), фуксовой во всех точках, кроме, быть может, одной, в которой система регулярна.*

Заметим, что система, о которой говорится в теореме Племеля, всегда может быть выбрана так, что ее ранг Пуанкаре в регулярной особой точке будет не выше чем $(n - 1)(p - 1)$ (см. [28]).

При работе с векторными расслоениями полезным оказывается понятие стабильности (введенное Д. Мамфордом), позволившее в последнее время получить ряд важных результатов, в частности, в исследовании проблемы Римана–Гильберта. Дадим необходимые предварительные определения.

Всякое голоморфное векторное расслоение над римановой поверхностью X обладает глобальным мероморфным сечением, не равным тождественно нулю (см. [29; следствие 29.17, предложение 30.4]). *Степенью* голоморфного линейного расслоения E_1 (т. е. расслоения ранга 1) называется сумма порядков нулей минус сумма порядков полюсов глобального мероморфного сечения этого расслоения. (Нетрудно показать, что данное число не зависит от выбора сечения, если X компактна. Это и будет предполагаться далее.)

Если глобальное мероморфное сечение расслоения E_1 задано набором мероморфных функций $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$, соответствующих покрытию $\{U_\alpha\}$ поверхности X , то набор $\{ds_\alpha/s_\alpha\}$ дифференциальных 1-форм определяет мероморфную связность в расслоении E_1 . Таким образом, степень расслоения E_1 совпадает с суммой вычетов данной связности. Также нетрудно показать, что эта сумма одинакова для любой мероморфной связности в расслоении E_1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Степенью* $\deg E$ расслоения E (над компактной римановой поверхностью X), заданного коциклом $\{g_{\alpha\beta}(z)\}$, называется степень *детерминантного* расслоения $\det E$, заданного коциклом $\{\det g_{\alpha\beta}(z)\}$.

Если в расслоении E определена связность ∇ , заданная набором $\{\omega_\alpha\}$ матричных дифференциальных 1-форм, то в расслоении $\det E$ можно определить связность $\text{tr } \nabla$, заданную набором дифференциальных 1-форм $\text{tr } \omega_\alpha$. В этом случае степень расслоения E совпадает также с суммой вычетов связности $\text{tr } \nabla$.

Число $\varkappa(E) = \deg E/p$ называется *наклоном* расслоения E ранга p .

Для расслоения F^Λ (согласно определению 2) имеем

$$\deg F^\Lambda = \sum_{i=1}^n \text{res}_{a_i} \text{tr } \omega_i^\Lambda = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \beta_i^j.$$

Степень голоморфного векторного расслоения E над сферой Римана совпадает с суммой коэффициентов k_i типа расщепления этого расслоения. Действительно, если $E \cong \mathcal{O}(k_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(k_p)$, то расслоение $\det E$ имеет координатное описание вида

$$(U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, g_{0\infty} = z^{\text{tr } K}), \quad K = \text{diag}(k_1, \dots, k_p).$$

Глобальное мероморфное сечение этого расслоения можно задать функциями $s_0(z) = z^{\text{tr } K}$, $s_\infty(z) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Векторное расслоение E называется *стабильным* (полустабильным), если наклон $\varkappa(E')$ любого собственного подрасслоения E' этого расслоения меньше (не превосходит) наклона $\varkappa(E)$.

Нетрудно убедиться в том, что над сферой Римана стабильных векторных расслоений нет (наклон k_1 подрасслоения $\mathcal{O}(k_1)$ расслоения $E \cong \mathcal{O}(k_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(k_p)$ не меньше наклона $(k_1 + \dots + k_p)/p$ расслоения E), а полустабильными являются только расслоения с типом расщепления $(k, \dots, k)$. Таким образом, голоморфно тривиальные расслоения над сферой Римана – это полустабильные расслоения степени нуль и только они.

Как видно, понятия стабильности и полустабильности векторного расслоения над сферой Римана не слишком глубоки по смыслу, но они окажутся содержательными и полезными при обобщении проблемы на случай компактной римановой поверхности положительного рода. Пока же вспомним, что при решении проблемы Римана–Гильберта исследуются не просто расслоения, а расслоения вместе с логарифмическими связностями на них. Эффективным оказалось введение понятия *стабильной пары* (E, ∇) , состоящей из векторного расслоения и связности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Говорят, что подрасслоение F' расслоения F^Λ *стабилизируется* связностью ∇^Λ , если $\nabla^\Lambda(M(F')) \subset M(\tau_{\mathbb{C}}^* \otimes F')$. (Вообще говоря, под действием отображения ∇^Λ сечение подрасслоения F' переходит в сечение расслоения $\tau_{\mathbb{C}}^* \otimes F^\Lambda$.)

Это определение эквивалентно тому, что любое горизонтальное сечение расслоения F^Λ , проходящее через точку $s_0 \in F'$, остается в F' при аналитических продолжениях.

Практически существование подрасслоения $F' \subset F^\Lambda$, которое стабилизируется связностью, означает, что пара $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$ допускает координатное описание $\{g_{\alpha\beta}, g_{i\alpha}^\Lambda\}, \{\omega_\alpha, \omega_i^\Lambda\}$ следующего блочно-верхнетреугольного вида:

$$g_{\alpha\beta} (g_{i\alpha}^\Lambda) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}^1 (g_{i\alpha}^1) & * \\ 0 & g_{\alpha\beta}^2 (g_{i\alpha}^2) \end{pmatrix}, \quad \omega_\alpha (\omega_i^\Lambda) = \begin{pmatrix} \omega_\alpha^1 (\omega_i^1) & * \\ 0 & \omega_\alpha^2 (\omega_i^2) \end{pmatrix},$$

где размеры всех блоков $g_{\alpha\beta}^1, g_{i\alpha}^1$ и $\omega_\alpha^1, \omega_i^1$ одинаковы (коцикл $\{g_{\alpha\beta}^1, g_{i\alpha}^1\}$ задает координатное описание подрасслоения F' , а формы $\omega_\alpha^1, \omega_i^1$ определяют ограничение ∇' связности ∇^Λ на подрасслоение F').

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пара $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda) \in \mathcal{F}$ называется *стабильной* (соответственно *полустабильной*), если для любого собственного подрасслоения $F' \subset F^\Lambda$, которое стабилизируется связностью ∇^Λ , имеет место неравенство $\varkappa(F') < \varkappa(F^\Lambda)$ (соответственно $\varkappa(F') \leq \varkappa(F^\Lambda)$).

Приведем еще одно достаточное условие положительного решения проблемы Римана–Гильберта.

5) Если среди элементов семейства $\mathcal{F}$ расслоений с логарифмическими связностями, имеющими заданные особенности $a_1, \dots, a_n$ и монодромию (2), найдется хотя бы одна стабильная пара $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$, то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение (А. А. Болибрух [30]).

Таким образом, для исследования проблемы Римана–Гильберта с помощью понятий стабильности и полустабильности пар семейства $\mathcal{F}$ можно рассмотреть подмножество $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}$, состоящее из полустабильных пар.

Если множество $\mathcal{F}^0$ пусто, то проблема Римана–Гильберта имеет отрицательное решение (отсутствие полустабильных пар $\Rightarrow$ отсутствие полустабильных расслоений $\Rightarrow$ отсутствие тривиальных расслоений).

Если множество $\mathcal{F}^0$ не пусто, но среди его элементов нет стабильных пар, то вопрос о разрешимости проблемы Римана–Гильберта остается открытым.

Если множество $\mathcal{F}^0$ содержит хотя бы одну стабильную пару, то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение.

Следует отметить, что для поиска стабильных или полустабильных пар не нужно перебирать все элементы семейства $\mathcal{F}$, а можно ограничиться парами $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$, построенными по наборам $\Lambda = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$ матриц, элементы которых не превосходят некоторой константы $N(n, p)$, зависящей только от размерности p представления (2) и числа n особых точек. В некоторых частных случаях это позволяет предъявить эффективный алгоритм проверки наличия стабильной или полустабильной пары среди элементов семейства $\mathcal{F}$ (см. [31]).

Первый контрпример к проблеме Римана–Гильберта, полученный А. А. Болибрухом ($p = 3, n = 4$), технически достаточно сложен. Впоследствии им были получены более простые контрпримеры для представлений специального типа – *В-представлений*. Так называются приводимые представления, жорданова форма образующих G_i которых состоит ровно из одной клетки. Контрпримеры основаны на следующей теореме (см. [10; теорема 11.2 и следствие 11.2]).

ТЕОРЕМА 2 (А.А. Болибрух). *Если Б-представление может быть реализовано как представление монодромии некоторой фуксовой системы, то наклон канонического продолжения F^0 расслоения F , построенного по этому представлению, является целым числом.*

ПРИМЕР 1 (А.А. Болибрух). Рассмотрим матрицы

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

и произвольный набор точек a_1, a_2, a_3 . Приводимое представление χ с особыми точками a_1, a_2, a_3 и образующими G_1, G_2, G_3 , соответствующими обходу этих точек, не может быть реализовано в качестве представления монодромии какой-либо фуксовой системы.

Заметим, что $G_1 G_2 G_3 = I$, матрица G_2 может быть преобразована к матрице G_1 , а матрица G_3 может быть преобразована к жордановой клетке с собственным значением -1 :

$$S_2^{-1} G_2 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$S_3^{-1} G_3 S_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 0 & 16 & 4 & 3 \\ 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -12 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения ρ_k матриц $E_k = (2\pi i)^{-1} \ln G_k$ таковы:

$$\rho_1 = \rho_2 = 0, \quad \rho_3 = \frac{1}{2},$$

и они, согласно определению 2, совпадают с показателями β_k логарифмической связности ∇^0 в точках a_k .

Степень канонического продолжения F^0 , согласно определению 3, равна

$$\deg F^0 = 4\beta_1 + 4\beta_2 + 4\beta_3 = 2,$$

следовательно, $\varkappa(F^0) = 1/2 \notin \mathbb{Z}$. Поэтому Б-представление χ не может быть реализовано как представление монодромии какой-либо фуксовой системы (в силу теоремы 2).

§ 3. Проблема Римана–Гильберта для скалярных фуксовых уравнений

Как говорилось ранее, задача о построении фуксова дифференциального уравнения (3) с заданными особенностями $a_1, \dots, a_n$ и монодромией (2) в общем случае имеет отрицательное решение, поскольку число параметров, от которых зависит такое уравнение, меньше числа параметров, от которых зависит множество классов сопряженности представлений (2). (Напомним, что последнее равно $(n-2)p^2 + 1$, в то время как первое не превосходит $p + (n-2)p(p+1)/2$, см. [10; предложение 7.1].) Поэтому возникают вопросы об оценке числа дополнительных особых точек фуксова уравнения с заданной монодромией, а также о нахождении условий, при которых построение уравнения без дополнительных особенностей все же возможно.

Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ голоморфных векторных расслоений F^Λ с логарифмическими связностями ∇^Λ , построенное по представлению (2). *Фуксовым весом* расслоения F^Λ называется величина

$$\gamma(F^\Lambda) = \sum_{i=1}^p (k_1 - k_i),$$

где $(k_1, \dots, k_p)$ – тип расщепления расслоения F^Λ .

Если пара $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda) \in \mathcal{F}$ стабильна, то для типа расщепления расслоения F^Λ имеют место неравенства

$$k_i - k_{i+1} \leq n - 2, \quad i = 1, \dots, p - 1 \quad (14)$$

(см. [10; теорема 11.1]). Поскольку в случае неприводимого представления (2) семейство $\mathcal{F}$ состоит только из стабильных пар (у расслоения F^Λ нет подрасслоений, стабилизирующихся связностью ∇^Λ , если представление неприводимо), то для такого представления определена величина

$$\gamma_{\max}(\chi) = \max_{F^\Lambda \in \mathcal{F}} \gamma(F^\Lambda) \leq \frac{(n-2)p(p-1)}{2},$$

называемая *максимальным фуксовым весом* неприводимого представления χ .

Выражение для минимально возможного числа m_0 дополнительных особых точек, возникающих при построении фуксова уравнения (3) по *неприводимому* представлению (2), было получено А. А. Болибрухом [32]:

$$m_0 = \frac{(n-2)p(p-1)}{2} - \gamma_{\max}(\chi). \quad (15)$$

В случае произвольного представления имеется следующая оценка числа m_0 дополнительных особенностей (см. [28]):

$$m_0 \leq \frac{(n+1)p(p-1)}{2} + 1.$$

Из формулы (15), в частности, следует, что *набор особых точек a_1, a_2, a_3 ($n = 3$) и неприводимое двумерное представление ($p = 2$) всегда могут быть*

реализованы фуксовым дифференциальным уравнением второго порядка, поскольку в этом случае $\gamma(F^\Lambda) = 1$ для любого расслоения F^Λ нечетной степени. Как показано в [33] (см. также [34]), среди приводимых двумерных представлений (с тремя образующими G_1, G_2, G_3 и соотношением $G_1 G_2 G_3 = I$) содержатся два типа, которые не могут быть реализованы фуксовым дифференциальным уравнением второго порядка с тремя особыми точками:

$$G_1 = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} c_2 & d_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} c_3 & d_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}, \quad d_i \neq 0; \quad (16)$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} c_3 & 0 \\ 0 & d_3 \end{pmatrix}, \quad c_i \neq d_i. \quad (17)$$

Из формулы (15) также следует, что набор особых точек $a_1, \dots, a_n$ и неприводимое представление (2) могут быть реализованы фуксовым дифференциальным уравнением (3) тогда и только тогда, когда среди элементов семейства $\mathcal{F}$ найдется расслоение с типом расщепления $((p-1)(n-2), (p-2)(n-2), \dots, n-2, 0)$.

Поскольку в случае неприводимого представления (2) семейство $\mathcal{F}$ совпадает с семейством $\mathcal{F}^{\text{st}} \subset \mathcal{F}$, элементами которого являются только стабильные пары, то следующая теорема является обобщением последнего утверждения на случай произвольного представления.

ТЕОРЕМА 3 (И.В. Вьюгин [35]). *Набор особых точек $a_1, \dots, a_n$ и представление (2) могут быть реализованы фуксовым дифференциальным уравнением (3) тогда и только тогда, когда среди элементов семейства $\mathcal{F}$ найдется стабильная пара $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$ такая, что тип расщепления расслоения F^Λ равен $((p-1)(n-2), (p-2)(n-2), \dots, n-2, 0)$.*

Теперь естественным оказывается вопрос: 1 можно ли обобщить формулу (15) на случай произвольного представления и утверждать, что

$$m_0 = \frac{(n-2)p(p-1)}{2} - \max_{F^\Lambda \in \mathcal{F}^{\text{st}}} \gamma(F^\Lambda) ?$$

ПРИМЕР 2 (И.В. Вьюгин). Используя теорему 3, нетрудно показать, что двумерные представления с тремя образующими вида (16) или (17) действительно не могут быть реализованы фуксовым дифференциальным уравнением второго порядка с тремя особыми точками. Это следует из того, что семейство $\mathcal{F}$, построенное по каждому из данных представлений, не содержит стабильную пару.

Действительно, представление с образующими вида (16) является Б-представлением, а по такому представлению нельзя построить стабильную пару (это следует из доказательства теоремы 11.2 из [10]).

Представление же с образующими вида (17) является прямой суммой $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$ двух (одномерных) представлений с образующими G_i^1, G_i^2 . Поскольку при каждом $i = 1, 2, 3$ спектры матриц G_i^1, G_i^2 не пересекаются ($c_i \neq d_i$), то для

степени любого расслоения F^Λ из семейства $\mathcal{F}$ выполнено соотношение

$$\deg F^\Lambda = \deg F_1 + \deg F_2,$$

где F_1 и F_2 – (одномерные) подрасслоения, отвечающие подпредставлениям χ_1 и χ_2 соответственно, т. е. стабилизирующиеся связностью ∇^Λ (это равенство следует из того, что в данном случае множество показателей связности ∇^Λ является объединением множеств показателей ее ограничений на F_1 и F_2). Следовательно, неравенства $\deg F_1 < \deg F^\Lambda/2$, $\deg F_2 < \deg F^\Lambda/2$, необходимые для стабильности пары $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$, одновременно выполняться не могут.

С помощью теоремы 3 можно также доказать (мы здесь это делать не будем), что оставшиеся типы приводимых двумерных представлений с тремя образующими могут быть реализованы фуксовым дифференциальным уравнением второго порядка с тремя особыми точками.

Упомянем об интересной связи между проблемой Римана–Гильберта для скалярных фуксовых уравнений и *уравнением Пенлеве VI* (P_{VI}) – нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-t} \right) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{u-t} \right) \frac{du}{dt} \\ & + \frac{u(u-1)(u-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{t}{u^2} + \gamma \frac{t-1}{(u-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(u-t)^2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

относительно неизвестной функции $u(t)$. *Подвижными особенностями* решений этого уравнения (положение которых зависит от начальных условий) могут быть только полюсы. В таком случае говорят, что уравнение удовлетворяет *свойству Пенлеве*⁴. Самим П. Пенлеве [37] изначально изучен частный случай уравнения (18), соответствующий значениям параметров $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta = 1/2$. В общем виде (18) уравнение P_{VI} впервые записано Р. Фуксом [38] (сыном Л. Фукса) и добавлено Б. Гамбье [39], учеником П. Пенлеве, в список уравнений, известных сейчас как уравнения Пенлеве I–VI. Среди нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих свойством Пенлеве, уравнения этого списка выделяются тем, что в общем случае их решения не выражаются через элементарные или классические специальные функции (предполагается, что правые части уравнений рациональны по $\frac{du}{dt}$ и мероморфны по u, t). Р. Фуксом было предложено два способа получения уравнения P_{VI} . Первый, на котором мы здесь остановимся, связан с изомонодромными деформациями линейных дифференциальных уравнений. Второй, более геометрический, подход использует эллиптические интегралы.

Рассмотрим четыре точки $t, 0, 1, \infty$ ($t \in D(t^*)$, где $D(t^*) \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ – диск малого радиуса с центром в точке t^*) и *неприводимое* $SL(2, \mathbb{C})$ -представление

$$\chi^*: \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{t, 0, 1\}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C}),$$

порожденное матрицами G_1, G_2, G_3 , соответствующими точкам $t, 0, 1$.

⁴Идея использования подобного ограничения на решения, по-видимому, впервые появилась у С. В. Ковалевской [36] в исследовании задачи об интегрировании волчка.

В зависимости от расположения точки t возможны два случая.

1) Любое векторное расслоение F^Λ из семейства $\mathcal{F}$, построенного по данным четырем точкам и представлению χ^* , такое, что $\deg F^\Lambda = 0$, голоморфно тривиально (данный случай имеет место для почти всех значений $t \in D(t^*)$, см. [10; упражнение 16.4]).

2) Среди элементов семейства $\mathcal{F}$ существует голоморфно нетривиальное расслоение F^Λ степени нуль.

Из неравенств (14) следует, что $\gamma_{\max}(\chi^*) \leq 2$, поэтому в первом случае типы расщепления голоморфно нетривиальных расслоений F^Λ (ненулевой степени) могут быть только $(k, k-1)$ или (k, k) . Вариант $(k+1, k-1)$ невозможен, поскольку тогда расслоение, построенное по набору матриц $\Lambda_1 - kI$, Λ_2 , Λ_3 , Λ_4 , имеет нулевую степень, т. е. голоморфно тривиально, но в то же время его тип расщепления равен $(1, -1)$. Следовательно, в первом случае $\gamma_{\max}(\chi^*) = 1$.

Во втором случае тип расщепления голоморфно нетривиального расслоения нулевой степени равен $(1, -1)$, и в этом случае $\gamma_{\max}(\chi^*) = 2$.

Итак, ввиду формулы (15), для почти всех значений $t \in D(t^*)$ набор точек t , 0 , 1 , ∞ и неприводимое двумерное представление χ^* реализуются фуксовым дифференциальным уравнением второго порядка с одной дополнительной особенностью. Обозначим ее через $u(t)$ (рассматривая как функцию параметра t). Оказывается, что функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (18) при некоторых значениях констант α , β , γ , δ . [Уравнение P_{VI} получено Р. Фуксом именно как дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет дополнительная (пятая) особенность $\lambda(t)$ некоторого фуксова уравнения второго порядка с особыми точками 0 , 1 , t , ∞ и монодромией, не зависящей от параметра t .] Этот интересный факт можно пояснить при помощи *изомонодромных деформаций фуксовых систем*.

Выберем значение $t = t^0$, при котором существует фуксова система

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{B_1}{z - t^0} + \frac{B_2}{z} + \frac{B_3}{z - 1} \right) y$$

с особыми точками t^0 , 0 , 1 , ∞ , представлением монодромии χ^* и такая, что $\text{tr } B_i = 0$, а матрица $B_\infty = -B_1 - B_2 - B_3$ диагональна. Обозначим через $\pm\theta_i/2$ собственные значения матриц B_i .

Существование такой системы показать несложно. Достаточно предъявить набор $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_\infty\}$ допустимых матриц такой, что $\text{tr}(\Lambda_i + E_i) = 0$, $i = 1, 2, 3, \infty$, и собственные значения матрицы $\Lambda_\infty + E_\infty$ отличны от нуля (тогда для почти всех значений t^0 соответствующее расслоение F^Λ будет голоморфно тривиальным и логарифмическая связность ∇^Λ будет определять фуксову систему, обладающую нужными свойствами). Поскольку $\det G_i = 1$, то сумма $\rho_i^1 + \rho_i^2$ собственных значений матрицы E_i является целым числом, причем эта сумма равна 0 или 1 ввиду условия $0 \leq \text{Re } \rho_i^j < 1$. В первом случае остается положить $\Lambda_i = \text{diag}(1, -1)$, а во втором $-\Lambda_i = \text{diag}(0, -1)$.

Данная система может быть вложена в *изомонодромное семейство*⁵ Шле-зингера [40]

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{B_1(t)}{z-t} + \frac{B_2(t)}{z} + \frac{B_3(t)}{z-1} \right) y, \quad B_i(t^0) = B_i, \quad (19)$$

фуксовых систем с особенностями $t, 0, 1, \infty$, голоморфно зависящее от параметра $t \in D(t^0)$, где $D(t^0)$ – диск малого радиуса с центром в точке t^0 . При этом $B_1(t) + B_2(t) + B_3(t) = -B_\infty = \text{diag}(-\theta_\infty/2, \theta_\infty/2)$. Б. Мальгранжем [41] показано, что матричные функции $B_i(t)$ продолжаются на универсальное накрытие T пространства $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ как мероморфные функции. Множество $\Theta \subset T$ их полюсов называется Θ -дивизором Мальгранжа.

Обозначим через $B(z, t) = (b_{ij}(z, t))$ матрицу коэффициентов семейства (19). Поскольку верхний правый элемент матрицы $B_1(t) + B_2(t) + B_3(t) = -B_\infty$ равен нулю, то такой же элемент матрицы $z(z-1)(z-t)B(z, t)$ при каждом фиксированном t является многочленом первой степени по z . Определим $\tilde{u}(t)$ как единственный корень этого многочлена. Далее мы воспользуемся следующей теоремой из [42] (см. также [10; теорема 18.1]).

ТЕОРЕМА 4. *Функция $\tilde{u}(t)$ удовлетворяет уравнению P_{VI} (18), где константы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ связаны с параметрами $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_\infty$ следующими соотношениями:*

$$\alpha = \frac{(\theta_\infty - 1)^2}{2}, \quad \beta = -\frac{\theta_2^2}{2}, \quad \gamma = \frac{\theta_3^2}{2}, \quad \delta = \frac{1 - \theta_1^2}{2}.$$

Рассмотрим вектор-строки

$$q_0 = (1, 0), \quad q_1(z, t) = \frac{dq_0}{dz} + q_0 B(z, t) = (b_{11}, b_{12})$$

и составленную из них матрицу

$$\Gamma(z, t) = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix},$$

мероморфно обратимую на $\overline{\mathbb{C}} \times D(t^*)$, поскольку $\det \Gamma(z, t) = b_{12} \not\equiv 0$ в силу неприводимости представления χ^* . Определим мероморфные на $\overline{\mathbb{C}} \times D(t^*)$ функции $b_1(z, t)$, $b_2(z, t)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$q_2 := \frac{dq_1}{dz} + q_1 B(z, t) = (-b_2, -b_1) \Gamma(z, t).$$

Тогда

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} B(z, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \Gamma - \Gamma B(z, t),$$

⁵Изомонодромность означает, что монодромия систем этого семейства не зависит от значения параметра t . Более того, собственные значения матриц $B_i(t)$ также не зависят от t и совпадают с собственными значениями $\pm\theta_i/2$ матриц $B_i(t^0) = B_i$ (подробнее см. [10; лекции 13, 14]).

откуда

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} = \frac{d\Gamma}{dz} \Gamma^{-1} + \Gamma B \Gamma^{-1}.$$

Последнее означает, что при каждом фиксированном $t \in D(t^0)$ калибровочное преобразование $y' = \Gamma(z, t)y$ переводит соответствующую систему семейства (19) в систему

$$\frac{dy'}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} y',$$

первая координата решения которой является, как обычно, решением скалярного уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + b_1(z, t) \frac{dw}{dz} + b_2(z, t)w = 0.$$

Данное (фуксово) уравнение имеет особые точки $t, 0, 1, \infty$ и монодромию χ^* , но есть у него и дополнительная особенность $u(t)$ – это, как следует из построения функций $b_1(z, t)$, $b_2(z, t)$, нуль функции $\det \Gamma(z, t) = b_{12}(z, t)$. В силу теоремы 4 функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению P_{VI} . (Заметим, что $u(t) \neq t, 0, 1, \infty$, если $t \in D(t^*) \setminus \tilde{\Theta}$, где $\tilde{\Theta}$ – счетное множество, состоящее из таких значений параметра t , что соответствующее семейство $\mathcal{F}$, построенное по особенностям $t, 0, 1, \infty$ и представлению χ^* , содержит нетривиальное расслоение степени нуль.)

Таким образом, множество точек $t, 0, 1, \infty$ и неприводимое $SL(2, \mathbb{C})$ -представление χ^* реализуются скалярным фуксовым уравнением с дополнительной особенностью $u(t)$, которая (как функция параметра $t \in D(t^*)$) удовлетворяет уравнению P_{VI} . Особые точки функции $u(t)$, продолженной на T , являются полюсами, а множество $\tilde{\Theta} \supset \{t \in D(t^*) \mid u(t) = t, 0, 1 \text{ или } \infty\}$ является счетным множеством значений параметра, при которых рассматриваемая проблема Римана–Гильберта решается без дополнительных особенностей.

Не останавливаясь здесь на этом подробно, отметим, что приведенные выше рассуждения можно распространить на общий случай $n + 3$ особых точек $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} = 0, a_{n+2} = 1, a_{n+3} = \infty$ и неприводимого $SL(2, \mathbb{C})$ -представления. При этом дополнительные особенности $u_1(a), \dots, u_n(a)$ реализующего их скалярного фуксова уравнения (как функции параметра $a = (a_1, \dots, a_n)$) будут удовлетворять системе Гарнье [43] – системе нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (при $n = 1$ совпадающей с уравнением P_{VI}).

И уравнения P_{VI} , и их многомерные обобщения – системы Гарнье – допускают запись в гамильтоновой форме. Так, П. Пенлеве [44], используя второй из упоминавшихся подходов Р. Фукса, вывел эквивалентную форму уравнения P_{VI} с использованием $\wp$ -функции Вейерштрасса

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(l, m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z + l + m\tau)^2} - \frac{1}{(l + m\tau)^2} \right)$$

с периодами 1 и τ ($\text{Im } \tau > 0$).

После замены координат

$$u = \frac{\wp(q) - e_1}{e_2 - e_1}, \quad t = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1},$$

где $e_j = \wp(\omega_j)$ – значения $\wp$ -функции в соответствующих полупериодах ω_j , $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0, 1/2, (1 + \tau)/2, \tau/2)$, с учетом некоторых классических формул из теории эллиптических функций уравнение (18) принимает вид

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{j=0}^3 \alpha_j \wp'(q + \omega_j).$$

Здесь $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = -\beta$, $\alpha_2 = \gamma$, $\alpha_3 = -\delta + 1/2$, а $\wp'$ – производная $\wp$ -функции.

Несложно заметить, что в таком виде уравнение выглядит намного проще и симметричнее, чем при классической записи. Особенно удобен этот вид для работы с гамильтоновой формой уравнения. Гамильтониан соответствующей гамильтоновой системы

$$2\pi i \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad 2\pi i \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

имеет в этих переменных простой и короткий вид:

$$H(p, q, \tau) = \frac{p^2}{2} - \sum_{j=0}^3 \alpha_j \wp(q + \omega_j).$$

Система неавтономна, ввиду зависимости $\wp$ -функции в потенциале от “времени” τ .

Существуют и другие гамильтоновы формы записи уравнения P_{VI} . Вообще, гамильтонов подход широко используется при исследовании уравнений Пенлеве, систем Гарнье, изомонодромных деформаций фуксовых систем (см., например, [45]). Имеются также интересные геометрические интерпретации уравнений P_{VI} (см., в частности, статьи [46]–[49]), позволяющие находить в явном виде их алгебраические решения. Важным следствием этого является возможность эффективного решения проблемы Римана–Гильберта для некоторых двумерных представлений с четырьмя особыми точками (см. [50]).

§ 4. Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности

Перейдем к рассмотрению *пфаффовых* систем

$$dy = \omega y, \quad y \in \mathbb{C}^p, \quad (20)$$

фуксова типа на компактной римановой поверхности X рода g , где ω – мероморфная на X матричная дифференциальная 1-форма, особые точки $a_1, \dots, a_n$ которой суть полюсы первого порядка. Если сформулировать проблему Римана–Гильберта аналогично случаю римановой сферы, т.е. поставить вопрос о реализации заданного набора точек $a_1, \dots, a_n \in X$ и представления

$$\chi: \pi_1(X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}) \rightarrow \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) \quad (21)$$

фуксовой системой (20), то ответ в общем случае окажется отрицательным, что следует из приведенного ниже подсчета размерностей.

Фундаментальная группа пространства $X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ является группой с $n + 2g$ образующими и одним соотношением. (Напомним, что образующими группы $\pi_1(X \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ являются простые петли $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, обходящие точки $a_1, \dots, a_n$ соответственно, а также дополняющие их петли $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ — образующие группы $\pi_1(X)$. Они удовлетворяют соотношению $\gamma_1 \cdots \gamma_n = \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \cdots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1}$.) Следовательно, размерность пространства

$$\mathcal{M}_a = \text{Hom}(\pi_1(X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}), \text{GL}(p, \mathbb{C})) / \text{GL}(p, \mathbb{C})$$

классов сопряженности представлений (21) равна $(n - 1 + 2g)p^2 - (p^2 - 1) = (n - 2 + 2g)p^2 + 1$ (см. § 1).

В то же время, согласно одной из формулировок теоремы Римана–Роха (см. [29; теорема 16.9, замечание 17.10]),

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) - \dim H^0(X, \Omega_D) = 1 - g - \deg D,$$

где

а) $D: X \rightarrow \mathbb{Z}$ — дивизор на X степени $\deg D = \sum_{x \in X} D(x)$ (напомним, что по определению $D(x) \neq 0$ лишь для конечного числа точек x на компактной римановой поверхности),

б) $H^0(X, \mathcal{O}_{-D})$ — пространство мероморфных на X функций f , для которых $\text{ord}_x f \geq D(x)$,

в) $H^0(X, \Omega_D)$ — пространство мероморфных на X 1-форм ω , для которых $\text{ord}_x \omega \geq -D(x)$.

В нашем случае $D(a_i) = 1$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $\deg D = n$ и $\dim H^0(X, \Omega_D) = n - 1 + g$ (заметим, что $H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) = 0$, поскольку $f \equiv 0$ — единственная голоморфная на компактной римановой поверхности функция, обращающаяся в нуль в точках a_i). Поэтому размерность пространства $\mathcal{M}_a^*$ фуксовых систем (20) с особыми точками $a_1, \dots, a_n$, рассмотренных с точностью до эквивалентности $\omega \sim S^{-1}\omega S$, $S \in \text{GL}(p, \mathbb{C})$, равна $(n - 1 + g)p^2 - (p^2 - 1) = (n - 2 + g)p^2 + 1$.

Итак, разность размерностей пространств $\mathcal{M}_a$ и $\mathcal{M}_a^*$ равна gp^2 . В случае $g > 0$ эта разность оказывается положительной, поэтому для построения системы (20) с заданными особенностями и монодромией необходимо вводить дополнительные особые точки (решения в которых не ветвятся, но матрица коэффициентов имеет полюсы). Точнее, *проблема реализации представления (21) разрешима в классе пфаффовых систем с регулярными особенностями, если допустить дополнительные особые точки* (Х. Рёрль [26]).

Более детальное изучение порядков полюсов формы коэффициентов системы и числа дополнительных особенностей составляет предмет одного из возможных обобщений классической проблемы Римана–Гильберта на случай компактной римановой поверхности положительного рода. Известно, что *любое двумерное неприводимое представление может быть реализовано системой вида (20), число дополнительных особенностей которой не превосходит $3g - 1$,*

причем все особые точки этой системы будут фуксовыми, за исключением одной (регулярной), которая может быть выбрана среди дополнительных, и ее ранг Пуанкаре не превосходит $2g - 1$ (А. А. Болибрух [30]).

Интересным вопросом является [2] получение оценок числа дополнительных особых точек (и рангов Пуанкаре системы) в случае представлений произвольной размерности.

Мы рассмотрим подробнее другой способ обобщения классической проблемы Римана–Гильберта, предложенный Э. Эно и Э. Фивегом [51]. Построим семейство $\mathcal{F}$ голоморфных векторных расслоений F^Λ над X с логарифмическими связностями ∇^Λ , имеющими заданные особенности и монодромию. (Построение происходит аналогично тому, как это делалось для сферы Римана в §2. Сначала по представлению (21) над $X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ строится голоморфное векторное расслоение с голоморфной связностью, а затем оно продолжается в особые точки $a_1, \dots, a_n$. Продолжения носят локальный характер, поэтому осуществляются в координатных окрестностях каждой точки a_i так же, как в случае сферы Римана.) Как говорилось ранее (см. §2), голоморфно тривиальное расслоение над сферой Римана – это то же самое, что полустабильное расслоение степени нуль, поэтому в случае компактной римановой поверхности положительного рода естественно рассмотреть следующую проблему.

Можно ли построить полустабильное голоморфное векторное расслоение нулевой степени с логарифмической связностью, имеющей заданные особенности и монодромию (т.е. существует ли среди элементов семейства $\mathcal{F}$ полустабильное расслоение степени нуль)?

Проблема, сформулированная таким образом (как и ее классический аналог), в общем случае имеет отрицательное решение. Контрпример снова может быть получен с помощью Б-представлений. (В случае компактной римановой поверхности представление (21) называется *Б-представлением*, если оно приводимо и жорданова форма матриц монодромии G_i , соответствующих обходу особенностей a_i , состоит ровно из одной клетки.) Аналогично теореме 2 доказывается, что если Б-представление (21) реализуется парой $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$, где F^Λ – полустабильное голоморфное векторное расслоение нулевой степени, то наклон канонического продолжения F^0 является целым числом.

Представление (21) с тремя произвольными особыми точками, заданное матрицами локальной монодромии G_1, G_2, G_3 из примера 1 и единичными матрицами $H_1, \dots, H_{2g}$, соответствующими образующим фундаментальной группы $\pi_1(X)$, является Б-представлением, но не обладает указанным выше свойством, поэтому не может быть реализовано как представление монодромии логарифмической связности в полустабильном векторном расслоении нулевой степени.

В работе Э. Эно и К. Хертлинга [52] показано, что в случае поверхности положительного рода можно построить контрпримеры лишь с одной особой точкой, если размерность $p > 4$.

Прежде всего интересно выяснить, [3] является ли коммутативность представления (21) достаточным условием положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности?

Посмотрим теперь на аналоги достаточных условий положительной разрешимости классической проблемы Римана–Гильберта.

1) Если одна из образующих $G_1, \dots, G_n$ представления (21), соответствующих обходу особенностей $a_1, \dots, a_n$, диагонализуема, то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение⁶ (А. А. Болибрух [30]).

2) Если представление (21) двумерно ($p = 2$), то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение (А. А. Болибрух [30]).

3) Если представление (21) неприводимо, то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение (Э. Эно, Э. Фивег [51]).

4) [4] Пусть представление (21) является монодромией некоторого скалярного фуксова дифференциального уравнения порядка p на X с особенностями $a_1, \dots, a_n$. Имеет ли в этом случае проблема Римана–Гильберта положительное решение?

5) Если среди элементов семейства $\mathcal{F}$ расслоений с логарифмическими связностями, имеющими заданные особенности $a_1, \dots, a_n$ и монодromию (21), найдется хотя бы одна стабильная пара $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$, то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение (А. А. Болибрух [30]).

Четвертое достаточное условие в случае компактной римановой поверхности X положительного рода сформулировано в виде вопроса, ответ на который пока не известен. Под фуксовым дифференциальным уравнением порядка p на X с особенностями $a_1, \dots, a_n$ понимается набор локальных фуксовых дифференциальных уравнений

$$\frac{d^p y}{dz^p} + b_1(z) \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}} + \dots + b_p(z) y = 0$$

(где z – локальная координата на X), согласованных между собой, т. е. на пересечении карт решения уравнений совпадают.

При решении задачи о построении фуксова дифференциального уравнения на X с заданными особыми точками и монодромией, как и в случае римановой сферы, необходимо возникают дополнительные особенности. М. Йосида [53] показал, что по неприводимому представлению (21) можно построить фуксово уравнение, число дополнительных особенностей которого не превосходит

$$\frac{p(p-1)}{2} (n + 2g - 2) + (p-1)(g-1).$$

Данная оценка улучшает на g полученную ранее М. Оцуки [54]. (В теоремах Оцуки и Йосиды налагается еще одно условие – диагонализуемость одной из матриц $G_1, \dots, G_n$ монодромии. Этого условия можно избежать, используя построение семейства $\mathcal{F}$, основанное на результатах А. Левеля, см. § 2.)

Возникает следующий естественный вопрос: [5] можно ли получить обобщение имеющихся оценок числа дополнительных особенностей фуксова уравнения на случай произвольного представления (21)?

⁶Заметим, что речь идет именно о матрицах, соответствующих обходу особенностей, а не обходу вдоль образующих группы $\pi_1(X)$.

§ 5. Проблема Римана–Гильберта для систем с иррегулярными особенностями

В этом параграфе мы изложим обобщение проблемы Римана–Гильберта на случай системы (1) с *иррегулярными* особыми точками $a_1, \dots, a_n \in \bar{\mathbb{C}}$. Данное обобщение было предложено в работе [55].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Минимальным рангом Пуанкаре системы (1) в особой точке a_i называется наименьший из рангов Пуанкаре систем*

$$\frac{dy'}{dz} = B'(z)y', \quad B'(z) = \frac{d\Gamma}{dz} \Gamma^{-1} + \Gamma B(z) \Gamma^{-1},$$

мероморфно эквивалентных системе (1) в окрестности O_i точки a_i .

Например, минимальный ранг Пуанкаре регулярной особой точки равен нулю, а минимальный ранг Пуанкаре иррегулярной особенности положителен.

В отличие от систем с регулярными особыми точками, класс мероморфной эквивалентности системы в окрестности иррегулярной особенности a_i не определяется однозначно матрицей G_i локальной монодромии. Учитывая это, обобщенную проблему Римана–Гильберта для систем с иррегулярными особыми точками можно сформулировать следующим образом.

Для каждого $i = 1, \dots, n$ рассмотрим локальную систему

$$\frac{dy}{dz} = B_i(z)y, \quad B_i(z) = \frac{B_{-r_i-1}^i}{(z-a_i)^{r_i+1}} + \dots + \frac{B_{-1}^i}{z-a_i} + B_0^i + \dots, \quad (22)$$

в окрестности O_i (иррегулярной) особой точки a_i минимального ранга Пуанкаре r_i такую, что матрица монодромии этой системы совпадает с образующей G_i представления (2). Существует ли глобальная система (1) с особенностями $a_1, \dots, a_n$ рангов Пуанкаре $r_1, \dots, r_n$ и заданной монодромией (2), мероморфно эквивалентная системам (22) в соответствующих окрестностях O_i ?

Заметим, что классическую проблему Римана–Гильберта можно сформулировать в такой же форме. Дополнительные (по сравнению с классической формулировкой) требования мероморфной эквивалентности искомой системы фиксированному набору локальных систем в фуксовом случае выполняются автоматически. Действительно, в окрестности O_k всякая локальная фуксова система с монодромией G_k мероморфно эквивалентна системе

$$\frac{dy}{dz} = \frac{E_k}{z-a_k} y, \quad E_k = \frac{1}{2\pi i} \ln G_k.$$

Таким образом, системы (22) в этом случае однозначно определены представлением монодромии (2) и могут быть опущены.

Будем называть представление (2) вместе с локальными системами (22) *обобщенными данными монодромии*.

Обобщенные данные монодромии называются *приводимыми*, если приводимы представление (2) и локальные системы (22). Приводимость последних

означает, что они могут быть приведены мероморфными преобразованиями к системам с матрицами коэффициентов одинакового блочно-верхнетреугольного вида. В противном случае обобщенные данные монодромии называются *неприводимыми*.

Известно (см., например, [56]), что в окрестности иррегулярной особенности $a = a_i$ ранга Пуанкаре $r = r_i$ система (22) обладает формальной фундаментальной матрицей $\hat{Y}(z)$ вида

$$\hat{Y}(z) = \hat{F}(z)(z - a)^{\hat{E}} e^{Q(z)}, \quad (23)$$

где

а) $\hat{F}(z)$ – формальный (матричный) ряд Лорана по степеням $z - a$ с конечной главной частью и $\det \hat{F}(z) \neq 0$;

б) $Q(z) = \text{diag}(Q^1, \dots, Q^N)$, где диагональные матрицы $Q^j(z)$ суть многочлены P^j от $(z - a)^{-1/s}$ без свободных членов, степени не больше rs , причем каждый блок $Q^j(z)$ замкнут относительно аналитического продолжения вокруг особой точки $z = a$ (т.е. матрицы $Q^j(a + ze^{2\pi i})$ и $Q^j(a + z)$ отличаются только некоторой перестановкой диагональных элементов);

в) $\hat{E} = (2\pi i)^{-1} \ln \hat{G}$, $\hat{G} = \text{diag}(\hat{G}^1, \dots, \hat{G}^N)$ – матрица *формальной монодромии* (блочно-диагонального вида, соответствующего виду матрицы Q), определяемая соотношением

$$\hat{Y}(a + ze^{2\pi i}) = \hat{Y}(a + z)\hat{G},$$

и собственные значения ρ матрицы $\hat{E}$ удовлетворяют условию $0 \leq \text{Re } \rho < 1$.

Известно также, что каждый диагональный элемент $q(z)$ матрицы $Q(z)$ имеет вид

$$q(z) = -\frac{\lambda}{r}(z - a)^{-r} + o(|z - a|^{-r}), \quad z \rightarrow a,$$

где λ – некоторое собственное значение матрицы $B_{-r_i-1}^i$ (разным $q(z)$ при этом соответствуют разные собственные значения матрицы $B_{-r_i-1}^i$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Индексом Каца* особой точки $z = a$ называется число $(\deg P)/s$, где $P = \text{diag}(P^1, \dots, P^N)$. (Напомним, что $Q(z) = P((z - a)^{-1/s})$.)

Поскольку матрица $Q(z)$ является мероморфным инвариантом системы (1), из свойств этой матрицы следует, что индекс Каца не превосходит минимальный ранг Пуанкаре особенности. Более того, минимальный ранг Пуанкаре является наименьшим целым числом, большим или равным индексу Каца особенности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Иррегулярная особенность системы (22) называется *формально неразветвленной*, если диагональные элементы матрицы $Q(z)$ из разложения (23) являются линейными комбинациями целых степеней $z - a$, т.е. если $s = 1$. В противном случае особенность называется *формально разветвленной*. (Фуксову особенность естественно также назвать неразветвленной.)

В случае формально неразветвленной особенности каждый блок $Q^j(z)$ матрицы $Q(z)$ из разложения (23) скалярен, а матрица $\hat{E}$ находится в жордановой форме.

Метод решения обобщенной проблемы Римана–Гильберта для систем с иррегулярными особыми точками аналогичен методу решения классической проблемы. После построения над проколотой сферой Римана $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ голоморфного векторного расслоения F ранга p с голоморфной связностью ∇ , имеющей заданную монодромию (2), пара (F, ∇) продолжается до расслоения F^0 с мероморфной связностью ∇^0 , заданных на всей сфере Римана (и называемых каноническим продолжением пары (F, ∇)). Для этого, в отличие от классического случая (см. § 2), вместо функций склейки $g_{i\alpha}(z) = (z - a_i)^{E_i}$, являющихся фундаментальными матрицами систем вида (6), нужно рассмотреть функции $g_{i\alpha}(z) = Y_i(z)$ – фундаментальные матрицы соответствующих систем (22), а вместо задающих логарифмическую связность ∇^0 в окрестностях O_i матричных дифференциальных 1-форм $\omega_i = E_i dz / (z - a_i)$ – формы $\omega_i = B_i(z) dz = (dY_i)Y_i^{-1}$ коэффициентов систем (22).

Далее можно построить семейство $\mathcal{F}$ продолжений пары (F, ∇) , заменяя матрицы $g_{i\alpha}(z)$ в построении пары (F^0, ∇^0) матрицами

$$g'_{i\alpha}(z) = \Gamma_i(z)g_{i\alpha}(z), \quad (24)$$

а формы ω_i – формами

$$\omega'_i = (d\Gamma_i)\Gamma_i^{-1} + \Gamma_i\omega_i\Gamma_i^{-1}, \quad (25)$$

где $y' = \Gamma_i(z)y$ – всевозможные мероморфные преобразования системы (22), не повышающие ее ранг Пуанкаре r_i , $i = 1, \dots, n$.

Аналогично классическому случаю, *обобщенная проблема Римана–Гильберта для систем с иррегулярными особыми точками разрешима тогда и только тогда, когда хотя бы одно из расслоений семейства $\mathcal{F}$, построенного по обобщенным данным монодромии (2), (22), голоморфно тривиально.*

Рассмотрим теперь подмножество $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ семейства $\mathcal{F}$, построенное при помощи мероморфных преобразований с матрицами $\Gamma_i(z)$ из (24), (25) специального вида. Для этого нам понадобится следующее определение допустимой матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Рассмотрим систему (22) с (иррегулярной) особой точкой $a = a_i$ и формальной фундаментальной матрицей $\hat{Y}(z)$ вида (23). *Допустимой матрицей* для этой системы называется диагональная целочисленная матрица $\Lambda_i = \text{diag}(\Lambda_i^1, \dots, \Lambda_i^N)$, разбитая на блоки в соответствии с разбиением матрицы $Q(z)$, и такая, что:

- а) диагональные элементы блока Λ_i^j образуют невозрастающую последовательность, если блок $Q^j(z)$ не разветвлен;
- б) Λ_i^j является скалярной матрицей, если блок $Q^j(z)$ разветвлен.

Представим матрицу $\hat{Y}(z)$ в следующем виде:

$$\hat{Y}(z) = \hat{F}(z)(z - a)^{-\Lambda_i}(z - a)^{\Lambda_i}(z - a)^{\hat{E}}e^{Q(z)}. \quad (26)$$

Из аналога леммы Соважа (см. [3; лемма 11.2]) для формальных матричных рядов следует существование голоморфно обратимой в O_i матрицы $\Gamma'_i(z)$ такой, что

$$\Gamma'_i(z)\hat{F}(z)(z-a)^{-\Lambda_i} = (z-a)^D\hat{F}_0(z), \quad (27)$$

где D – диагональная целочисленная матрица и $\hat{F}_0(z)$ – обратимый формальный (матричный) ряд Тейлора по $z-a$.

Определим теперь нужное нам мероморфное преобразование для каждой иррегулярной особой точки $a = a_i$ матрицей $\Gamma^{\Lambda_i}(z) = (z-a)^{-D}\Gamma'_i(z)$, зависящей от допустимой матрицы Λ_i (поскольку $\Gamma'_i(z)$ зависит от Λ_i). Из (26), (27) следует, что преобразование $y' = \Gamma^{\Lambda_i}(z)y$ переводит систему (22) в систему с формальной фундаментальной матрицей

$$\hat{Y}'(z) = \hat{F}_0(z)(z-a)^{\Lambda_i}(z-a)^{\hat{E}}e^{Q(z)}.$$

Как показано в [55], такое преобразование не повышает ранг Пуанкаре r_i системы (22). Таким образом, семейство $\mathcal{E}$ продолжений $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$ пары (F, ∇) на всю сферу Римана, полученное при помощи всевозможных наборов $\Lambda = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$ допустимых матриц для особенностей $a_1, \dots, a_n$, является подмножеством семейства $\mathcal{F}$.

Заметим, что голоморфная тривиальность одного из расслоений семейства $\mathcal{E}$ влечет положительную разрешимость проблемы Римана–Гильберта (поскольку $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$), но из отсутствия голоморфно тривиальных расслоений в семействе $\mathcal{E}$ еще не следует отрицательное решение проблемы.

Если допустить, чтобы ранг Пуанкаре одной из особенностей глобальной системы (1), которую требуется построить по обобщенным данным монодромии (2), (22), не был минимальным, то проблема будет иметь положительное решение. А именно, справедлив следующий аналог теоремы Племеля (см. [57]).

ТЕОРЕМА 5. *Обобщенные данные монодромии (2), (22) могут быть реализованы системой (1), имеющей минимальные ранги Пуанкаре во всех особых точках, кроме, быть может, одной (например, a_1), в которой ранг Пуанкаре системы не превосходит числа $r_1 + (p-1)(n+R-1)$, где $R = \sum_{i=1}^n r_i$.*

Для рассматриваемой задачи также известны аналоги достаточных условий положительной разрешимости классической проблемы Римана–Гильберта. Они формулируются в предположении, что хотя бы для одной локальной системы (22) ее особая точка a_i формально неразветвлена.

1) Если матрица $\hat{G}_i$ формальной монодромии (соответствующая формально неразветвленной особенности a_i) диагонализуема, то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение⁷ (см. теорему 6 далее).

2) Если обобщенные данные монодромии (2), (22) двумерны ($p = 2$), то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение (С. Малек [55]).

3) Если обобщенные данные монодромии (2), (22) неприводимы, то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение (А. А. Болибрух [55]).

⁷Если особая точка a_i фуксова, то диагонализировать нужно потребовать от соответствующей матрицы монодромии G_i .

4) [6] Пусть (2), (22) являются обобщенными данными монодромии некоторого скалярного линейного дифференциального уравнения порядка p с особенностями $a_1, \dots, a_n$. Имеет ли в этом случае проблема Римана–Гильберта положительное решение?

5) Если среди элементов подсемейства $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ найдется хотя бы одна стабильная пара $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$, то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение (А. А. Болибрух [55]).

Поясним четвертое достаточное условие, сформулированное в виде вопроса. Под обобщенными данными монодромии скалярного дифференциального уравнения

$$\frac{d^p y}{dz^p} + b_1(z) \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}} + \dots + b_p(z) y = 0$$

порядка p с особенностями $a_1, \dots, a_n$ будем понимать его представление монодромии и набор локальных систем (22), ранги Пуанкаре которых минимальны и которые мероморфно эквивалентны в окрестностях особых точек системам с матрицей коэффициентов вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -b_p & \dots & \dots & -b_1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Индекс Каца K_i скалярного уравнения в особой точке a_i можно определить как соответствующий индекс системы с матрицей коэффициентов вида (28). Таким образом, вопрос о реализации обобщенных данных монодромии скалярного линейного дифференциального уравнения предполагает построение глобальной системы с особенностями a_i рангов Пуанкаре $r_i = -[K_i]$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x .

ТЕОРЕМА 6. Если для одной из локальных систем (22) ее особая точка a_i формально неразветвлена, а матрица $\hat{G}_i$ формальной монодромии диагонализуема, то проблема Римана–Гильберта для обобщенных данных монодромии (2), (22) имеет положительное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную пару $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$ из подсемейства $\mathcal{E}$ голоморфных векторных расслоений со связностями, построенного по обобщенным данным монодромии (2), (22), удовлетворяющим условию теоремы. Без ограничения общности можно считать, что $a_i = a_1$.

Как следует из теоремы Биркгофа–Гротендика (см. пояснения перед теоремой 1), связность ∇^Λ задает глобальную систему (1) с особенностями $a_1, \dots, a_n$ и обобщенными данными монодромии (2), (22), при этом ранги Пуанкаре особых точек $a_2, \dots, a_n$ этой системы равны $r_2, \dots, r_n$ соответственно (т.е. минимальны), а в окрестности (формально неразветвленной) особой точки a_1 система имеет формальную фундаментальную матрицу $\hat{Y}(z)$ вида

$$\hat{Y}(z) = (z - a_1)^{-K} \hat{F}_0(z) (z - a_1)^{\Lambda_1} (z - a_1)^{\hat{E}_1} e^{Q(z)},$$

где $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_p)$, $k_1 \geq \dots \geq k_p$, – тип расщепления расслоения F^Λ , $\hat{F}_0(z)$ – обратимый формальный (матричный) ряд Тейлора по $z - a_1$ и $Q(z)$ – (диагональный) матричный многочлен от $1/(z - a_1)$ степени r_1 .

Поскольку особая точка a_1 формально неразветвлена, то матрица $\hat{E}_1 = (2\pi i)^{-1} \ln \hat{G}_1$ находится в жордановой форме, т. е. диагональна (по условию теоремы).

Из аналога леммы Болибруха о перестановке (см. [10; лемма 10.2]) для формальных матричных рядов следует существование голоморфно обратимой вне точки a_1 матрицы $\Gamma(z)$ такой, что

$$\Gamma(z)(z - a_1)^{-K} \hat{F}_0(z) = \hat{H}_0(z)(z - a_1)^{K'},$$

где $\hat{H}_0(z)$ – обратимый формальный (матричный) ряд Тейлора по $z - a_1$, K' – диагональная матрица, полученная из матрицы $-K$ некоторой перестановкой ее диагональных элементов.

Таким образом, глобальное мероморфное преобразование $y' = \Gamma(z)y$ переводит рассматриваемую систему в систему с теми же особенностями и обобщенными данными монодромии и не меняет ранги Пуанкаре особых точек $a_2, \dots, a_n$ (в силу голоморфной обратимости матрицы $\Gamma(z)$ в этих точках). Остается показать, что ранг Пуанкаре преобразованной системы в особой точке a_1 равен r_1 . Это следует из вида формальной фундаментальной матрицы $\hat{Y}'(z)$ этой системы:

$$\hat{Y}'(z) = \Gamma(z)\hat{Y}(z) = \hat{H}_0(z)(z - a_1)^D e^{Q(z)},$$

где $D = K' + \Lambda_1 + \hat{E}_1$ – диагональная матрица, поэтому матрица коэффициентов

$$B'(z) = \frac{d\hat{Y}'}{dz} \hat{Y}'^{-1} = \frac{d\hat{H}_0}{dz} \hat{H}_0^{-1} + \hat{H}_0 \left(\frac{D}{z - a_1} + \frac{dQ}{dz} \right) \hat{H}_0^{-1}$$

преобразованной системы имеет полюс порядка $r_1 + 1$ в точке a_1 (напомним, что $Q(z)$ – матричный многочлен от $1/(z - a_1)$ степени r_1). Теорема доказана.

Помимо классической проблемы Римана–Гильберта, еще одним частным случаем рассматриваемой задачи является проблема о биркгофовой стандартной форме, соответствующая двум особым точкам ($a_1 = 0$, $a_2 = \infty$) – иррегулярной и фуксовой. В этом случае обобщенные данные монодромии состоят из локальной системы

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \quad B(z) = \frac{B_{-r-1}}{z^{r+1}} + \dots + \frac{B_{-1}}{z} + B_0 + \dots, \quad (29)$$

в окрестности иррегулярной особой точки $z = 0$ минимального ранга Пуанкаре r и локальной фуксовой системы

$$\frac{dy}{dz} = \frac{E}{z} y, \quad E = \frac{1}{2\pi i} \ln G,$$

в окрестности бесконечности, где G – матрица монодромии системы (29).

Задача сводится к построению глобальной системы вида

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{B'_{-r-1}}{z^{r+1}} + \dots + \frac{B'_{-1}}{z} \right) y, \quad (30)$$

мероморфно эквивалентной системе (29) в окрестности нуля.

Система (30) называется *биркгофовой стандартной формой* системы (29). Вопрос о том, всякая ли система может быть преобразована (с помощью мероморфного преобразования) к биркгофовой стандартной форме, остается открытым. Известно, что ответ на этот вопрос положителен в размерностях $p \leq 3$, а также в случае *неприводимости* системы (29) или *диагонализируемости* ее матрицы монодромии. Исторически последние два достаточных условия были получены ранее (А. А. Болибрухом и Дж. Биркгофом соответственно, см. [10; лекция 12], а также обзорную статью В. Бальзера [58]), но по сути они являются частными случаями достаточных условий 3), 1) положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта для систем с иррегулярными особыми точками.

Х. Л. Турритин [59] показал, что если все собственные значения матрицы B_{-r-1} из (29) различны, то система может быть преобразована к биркгофовой стандартной форме. Следствием теоремы 6 является следующее обобщение теоремы Турритина.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если для одной из локальных систем (22) все собственные значения матрицы $B_{-r_i-1}^i$ различны, то проблема Римана–Гильберта для обобщенных данных монодромии (2), (22) имеет положительное решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 6 достаточно показать, что особая точка a_i формально неразветвлена и матрица $\hat{G}_i$ формальной монодромии диагонализуема.

Рассмотрим разложение вида (23) для формальной фундаментальной матрицы соответствующей системы (22) в окрестности особой точки a_i . Если бы эта особенность была формально разветвленной, то аналитическое продолжение вокруг нее некоторого диагонального элемента $q^j(z)$ матрицы $Q(z)$ совпадало бы с другим диагональным элементом $q^k(z)$ этой матрицы, что невозможно, поскольку

$$\begin{aligned} q^j(z) &= -\frac{\lambda_j}{r_i} (z - a_i)^{-r_i} + o(|z - a_i|^{-r_i}), \\ q^k(z) &= -\frac{\lambda_k}{r_i} (z - a_i)^{-r_i} + o(|z - a_i|^{-r_i}), \end{aligned}$$

где $\lambda_j \neq \lambda_k$ – собственные значения матрицы $B_{-r_i-1}^i$.

Диагонализируемость матрицы $\hat{G}_i = \text{diag}(\hat{G}_i^1, \dots, \hat{G}_i^N)$ следует из того, что особая точка $z = a_i$ формально неразветвлена и все диагональные элементы матрицы $Q(z) = \text{diag}(Q^1, \dots, Q^N)$ различны (поэтому каждый блок $Q^j(z)$, будучи скалярной матрицей, состоит из одного элемента, так же как и каждый блок $\hat{G}_i^j$). Следствие доказано.

Можно также рассмотреть обобщенную проблему Римана–Гильберта для скалярных дифференциальных уравнений с иррегулярными особыми точками. Обобщенными данными монодромии в таком случае будем называть представление (2) с образующими $G_1, \dots, G_n$ и набор локальных уравнений

$$\frac{d^p y}{dz^p} + b_1^i(z) \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}} + \dots + b_p^i(z) y = 0, \quad (31)$$

заданных в окрестностях соответствующих особенностей a_i , $i = 1, \dots, n$ (при этом матрица локальной монодромии уравнения (31) совпадает с G_i).

Построение глобального уравнения с заданной монодромией, мероморфно эквивалентного в окрестности каждой особой точки a_i соответствующему локальному уравнению (31), в общем случае сопровождается появлением дополнительных особенностей. (Два линейных дифференциальных уравнения будем называть *мероморфно эквивалентными* в окрестности особой точки, если мероморфно эквивалентны соответствующие им линейные системы с матрицами коэффициентов вида (28).) Число m дополнительных особенностей удовлетворяет неравенству

$$m \leq \frac{(K + n + 1)p(p - 1)}{2} + 1,$$

где $K = -\sum_{i=1}^n [-K_i]$, K_i – индекс Каца локального уравнения (31); см. [57]. Заметим, что в случае, когда все локальные уравнения (31) фуксовы, задача превращается в классическую проблему Римана–Гильберта для скалярных фуксовых уравнений.

В заключение данного параграфа скажем о возможном одновременном обобщении классической проблемы Римана–Гильберта на случай пфаффовых систем с иррегулярными особенностями на компактной римановой поверхности X рода g . В качестве обобщенных данных монодромии рассмотрим представление (21) с образующими $G_1, \dots, G_n$, $H_1, \dots, H_{2g}$ и локальные системы

$$dy = \omega_i y, \quad y \in \mathbb{C}^p, \quad (32)$$

в окрестностях O_i (иррегулярных) особых точек a_i минимальных рангов Пуанкаре r_i (матрица локальной монодромии каждой системы (32) при этом совпадает с соответствующей G_i). По обобщенным данным монодромии (21), (32) построим семейство $\mathcal{F}$ голоморфных векторных расслоений с мероморфными связностями, имеющими заданные особенности $a_1, \dots, a_n$ рангов Пуанкаре $r_1, \dots, r_n$ соответственно и обобщенные данные монодромии (семейство $\mathcal{F}$ строится аналогично случаю римановой сферы, рассмотренному в этом параграфе). Теперь задача может быть сформулирована следующим образом.

[7] *Можно ли построить полустабильное голоморфное векторное расслоение степени нуль со связностью, имеющей заданные особенности $a_1, \dots, a_n$ рангов Пуанкаре $r_1, \dots, r_n$ и обобщенные данные монодромии (21), (32) (т.е. существует ли среди элементов семейства $\mathcal{F}$ полустабильное расслоение степени нуль)?*

§ 6. Некоторые геометрические свойства отображения монодромии

В этом параграфе мы дадим геометрическое описание некоторых важных понятий и конструкций, связанных с проблемой Римана–Гильберта. Отметим, что хотя мы будем рассматривать самый “классический” случай – фуксовы системы и классическую проблему Римана–Гильберта, все приведенные ниже построения имеют аналоги и для различных обобщений классической проблемы.

Напомним, что введенное в § 1 отображение монодромии

$$\mu_a: \mathcal{M}_a^* \rightarrow \mathcal{M}_a$$

является отображением из пространства $\mathcal{M}_a^*$ фуксовых систем с особыми точками $a_1, \dots, a_n$ в пространство $\mathcal{M}_a$ представлений

$$\chi: \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}) \rightarrow \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$$

группы с n образующими и одним соотношением. В координатном описании:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_a^* & \cong & \mathcal{O} = \left\{ (B_1, \dots, B_n) \mid B_i \in \mathrm{Mat}(p, \mathbb{C}), \sum_{i=1}^n B_i = 0 \right\} / \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) \\ \downarrow \mu_a & & \downarrow \mu_a \\ \mathcal{M}_a & \cong & \left\{ (G_1, \dots, G_n) \mid G_i \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}), \prod_{i=1}^n G_i = I \right\} / \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}) \end{array}$$

Естественно возникает вопрос о существовании, корректности определения и свойствах обратного отображения

$$\mathrm{RH}_a: \mathcal{M}_a \rightarrow \mathcal{M}_a^*.$$

Такое отображение называется *отображением Римана–Гильберта*. Следует заметить, что при определении отображения, обратного μ_a , возникает та трудность, что существенно различные системы могут иметь одинаковую монодромию. Тем не менее можно показать, что пространство $\mathcal{M}_a^*$ естественным образом расслаивается на листы, для каждого из которых отображение RH_a корректно определено (хотя и не на всем пространстве $\mathcal{M}_a$; подробнее см. [60]).

Следующий шаг – перейти от рассмотрения фуксовых систем с n фиксированными особыми точками ко всем возможным фуксовым системам с n произвольными особенностями. Продолжим рассмотренные отображения на пространство всех фуксовых систем. Обозначим

$$P = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$$

пространство всевозможных наборов n попарно различных точек $\mathbb{C}$. Тогда

$$\mathcal{M}^* = P \times \mathcal{O}$$

является *пространством модулей* фуксовых систем. Точка $(a, \mathbf{B}) \in \mathcal{M}^*$, где $a = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)$, представляет фуксову систему

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{z - a_i} \right) y, \quad \sum_{i=1}^n B_i = 0.$$

Пространство представлений также необходимо расширить:

$$\mathcal{M} = \{(a, \chi) \mid a \in P, \chi \in \mathcal{M}_a\}.$$

Теперь естественным образом определяются отображения

$$\mu: \mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{M}, \quad \text{RH}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^*$$

(точка базы P – набор полюсов $a = (a_1, \dots, a_n)$ – при обоих отображениях переходит в себя, а отображения между слоями осуществляются с помощью μ_a и RH_a).

В определенных выше понятиях классическая проблема Римана–Гильберта формулируется следующим образом: *имея точку в пространстве $\mathcal{M}$, выяснить, существует ли ее прообраз относительно отображения μ .*

Отображения μ и RH имеют ряд важных и полезных свойств. Не вдаваясь в детали, отметим некоторые из них.

1. Отображение μ по ряду его свойств естественно рассматривать как некоммутативное обобщение экспоненциального отображения. Так, набор матриц, в сумме равных нулю, переходит в набор матриц, в произведении равных единице. Кроме того, спектр каждой из матриц монодромии G_k в точности равен спектру экспоненты $\exp(2\pi i B_k)$ соответствующей матрицы-вычета B_k , а в *нерезонансном* случае (в случае, когда никакие два собственных значения матрицы B_k не отличаются на натуральное число) совпадают не только спектры матриц G_k и $\exp(2\pi i B_k)$, но и классы сопряженности этих матриц (см. [10; следствие 6.1, предложение 6.1]).

2. Отображение μ крайне трансцендентно. В общем случае набор вычетов системы и ее монодромия выражаются друг через друга “новыми” специальными функциями. (Заметим, что это верно и для такого частного случая как уравнение P_{VI} .)

3. Отображение μ локально почти всюду инъективно (в смысле упоминаемого выше расслоения пространства $\mathcal{M}_a^*$ на листы).

4. Рассматривая пространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^*$ как расслоения над базой P , можно заметить, что отображения μ и RH согласованы с естественными связностями в данных расслоениях: горизонтальные сечения одного расслоения переходят в такие же сечения другого. В то время как локальные горизонтальные сечения расслоения $\mathcal{M}$ устроены тривиально (над каждой точкой они проходят через одно и то же представление), конструкция локальных горизонтальных сечений расслоения $\mathcal{M}^*$ намного интереснее: все фуксовы системы, соответствующие локальному горизонтальному сечению $\mathbf{B}(a): D(a^0) \rightarrow \mathcal{M}^*$, где $D(a^0) \subset P$ – шар малого радиуса с центром в точке a^0 , имеют одну и ту же монодromию, также можно проверить, что совпадают и показатели этих систем (собственные значения матриц $B_i(a)$). Таким образом, всякое горизонтальное сечение расслоения $\mathcal{M}^*$ есть не что иное, как набор решений некоторой расширенной проблемы Римана–Гильберта⁸, параметризованный положением полюсов фуксовой системы. Этот объект известен также как *изомонодромное семейство*. Набор же всех локальных горизонтальных сечений расслоения $\mathcal{M}^*$, переходящих под действием отображения μ в некоторое фиксированное горизонтальное

⁸Имеется в виду задача построения фуксовой системы с заданными особыми точками, монодромией и показателями (см. [61], а также [10; лекция 16]).

сечение расслоения $\mathcal{M}$, в ограничении на любой слой $\mathcal{M}_a^*$ дает множество всех решений классической проблемы Римана–Гильберта.

Список литературы

- [1] А. А. Болибрух, “Проблема Римана–Гильберта”, *УМН*, **45:2** (1990), 3–47; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “The Riemann–Hilbert problem”, *Russian Math. Surveys*, **45:2** (1990), 1–58.
- [2] L. Sauvage, “Sur les solutions régulières d’un système d’équations différentielles”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **3** (1886), 391–404.
- [3] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, Wiley, New York–London–Sydney, 1964.
- [4] J. Moser, “The order of a singularity in Fuchs’ theory”, *Math. Z.*, **72:1** (1959), 379–398.
- [5] E. Wagenführer, “On the regularity of systems of linear differential equations at singular points”, *Analysis*, **4:3–4** (1984), 267–298.
- [6] D. A. Lutz, R. Schäfke, “On the identification and stability of formal invariants for singular differential equations”, *Linear Algebra Appl.*, **72** (1985), 1–46.
- [7] J. Horn, “Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen. II”, *Math. Ann.*, **40:4** (1892), 527–550.
- [8] А. А. Болибрух, “Проблема Римана–Гильберта на комплексной проективной прямой”, *Матем. заметки*, **46:3** (1989), 118–120.
- [9] D. V. Anosov, A. A. Bolibrukh, “The Riemann–Hilbert problem”, *Aspects Math.*, **E22**, Vieweg, Braunschweig, 1994.
- [10] А. А. Болибрух, *Фуксовы дифференциальные уравнения и изомонодромные деформации* (в печати).
- [11] V. P. Kostov, “Monodromy groups of regular systems on the Riemann sphere”, *Differential equations and quantum groups*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **9**, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, 209–254.
- [12] J. Plemelj, “Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe”, *Monatsch. Math. Phys.*, **19:1** (1908), 211–246.
- [13] W. Dekkers, “The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank 2 on $P^1(\mathbb{C})$ ”, *Équations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe* (Inst. Rech. Math. Avancée, Strasbourg, 1975), *Lecture Notes in Math.*, **712**, Springer, Berlin, 1979, 33–43.
- [14] А. А. Болибрух, “О достаточных условиях положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта”, *Матем. заметки*, **51:2** (1992), 9–19; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “On sufficient conditions for the positive solvability of the Riemann–Hilbert problem”, *Math. Notes*, **51:2** (1992), 110–117.
- [15] V. P. Kostov, “Fuchsian systems on $\mathbb{CP}^1$ and the Riemann–Hilbert problem”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **315:2** (1992), 143–148.
- [16] А. А. Болибрух, “О построении фуксова уравнения по представлению монодромии”, *Матем. заметки*, **48:5** (1990), 22–34; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “Construction of a Fuchsian equation from a monodromy representation”, *Math. Notes*, **48:5** (1990), 1090–1099.
- [17] L. Fuchs, “Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten”, *J. Reine Angew. Math.*, **68** (1868), 354–385.
- [18] Б. Риман, “Две теоремы общего характера, касающиеся линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами”, *Сочинения*, Гостехиздат, М., 1948, 176–186; пер. с нем.: B. Riemann, “Zwei allgemeine Lehrsätze

- über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten”, *Math. Werke*, 357–369.
- [19] А. Пуанкаре, “О группах линейных уравнений”, *Избранные труды в 3-х томах*, т. 3, Наука, М., 1974, 145–234; пер. с франц.: H. Poincaré, “Sur les groupes des équations linéaires”, *Acta Math.*, **4**:1 (1884), 201–312.
- [20] Д. Гильберт, *Проблемы математики*, Наука, М., 1969; пер. с нем: D. Hilbert, “Mathematische Probleme”, *Gött. Nachr.*, 1900, 253–297.
- [21] А. А. Болибрух, “Обратные задачи монодромии аналитической теории дифференциальных уравнений”, *Математические события XX века*, ФАЗИС, М., 2003, 53–79; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “Inverse monodromy problems of the analytic theory of differential equations”, *Mathematical events of the twentieth century*, Springer, Berlin, 2006, 49–74.
- [22] Д. В. Аносов, В. П. Лексин, “Андрей Андреевич Болибрух в жизни и науке (30.01.1950–11.11.2003)”, *УМН*, **59**:6 (2004), 3–22; англ. пер.: D. V. Anosov, V. P. Leksin, “Andrei Andreevich Bolibrukh in life and science (30 January 1950–11 November 2003)”, *Russian Math. Surveys*, **59**:6 (2004), 1009–1028.
- [23] И. А. Лаппо-Данилевский, *Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, Гостехиздат, М., 1957.
- [24] A. H. M. Levelt, “Hypergeometric functions. I”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **64** (1961), 361–372.
- [25] Yu. S. Iyashenko, S. Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*, Grad. Stud. Math., **86**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [26] H. Röhlrl, “Das Riemann–Hilberts Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen”, *Math. Ann.*, **133**:1 (1957), 1–25.
- [27] P. Deligne, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Math., **163**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1970.
- [28] И. В. Вьюгин, Р. Р. Гонцов, “О дополнительных параметрах в обратных задачах монодромии”, *Матем. сб.*, **197**:12 (2006), 43–64; англ. пер.: I. V. V’yugin, R. R. Gontsov, “Additional parameters in inverse monodromy problems”, *Sb. Math.*, **197**:12 (2006), 1753–1773.
- [29] О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, М., 1980; пер. с нем.: O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Heidelberger Taschenbücher, **184**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977.
- [30] А. А. Болибрух, “Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности”, *Тр. МИАН*, **238** (2002), 55–69; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “The Riemann–Hilbert problem on a compact Riemannian surface”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **238** (2002), 47–60.
- [31] И. В. Вьюгин, “О конструктивных условиях разрешимости проблемы Римана–Гильберта”, *Матем. заметки*, **77**:5 (2005), 643–655; англ. пер.: I. V. V’yugin, “Constructive solvability conditions for the Riemann–Hilbert problem”, *Math. Notes*, **77**:5–6 (2005), 595–605.
- [32] A. A. Bolibrukh, “Vector bundles associated with monodromies and asymptotics of Fuchsian systems”, *J. Dynam. Control Systems*, **1**:2 (1995), 229–252.
- [33] T. Kimura, K. Shima, “A note on the monodromy of the hypergeometric differential equation”, *Japan. J. Math. (N. S.)*, **17**:1 (1991), 137–163.
- [34] В. А. Побережный, “О специальных группах монодромии и проблеме Римана–Гильберта для уравнения Римана”, *Матем. заметки*, **77**:5 (2005), 753–767; англ. пер.: V. A. Poberezhnyi, “Special monodromy groups and the Riemann–Hilbert problem for the Riemann equation”, *Math. Notes*, **77**:5–6 (2005), 695–707.
- [35] И. В. Вьюгин, “Об эквивалентных формулировках 21-й проблемы Гильберта”, *Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам* (Суздаль), 2008, 62–63.

- [36] S. Kowalevski, “Sur le problème de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe”, *Acta Math.*, **12**:1 (1889), 177–232.
- [37] P. Painlevé, “Sur les équations différentielles du second ordre et d’ordre supérieur dont l’intégrale générale est uniforme”, *Acta Math.*, **25**:1 (1902), 1–85.
- [38] R. Fuchs, “Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **141** (1905), 555–558.
- [39] B. Gambier, “Sur les équations différentielles du second ordre dont l’intégrale générale est uniforme”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **142** (1906), 266–269.
- [40] L. Schlesinger, “Über Lösungen gewisser Differentialgleichungen als Funktionen der singularen Punkte”, *J. Reine Angew. Math.*, **129** (1906), 287–294.
- [41] B. Malgrange, “Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières”, *Mathematics and physics, Semin. École Norm. Sup.* (Paris, 1979–1982), Progr. Math., **37**, Birkhäuser, Boston, MA, 1983, 401–426.
- [42] M. Jimbo, T. Miwa, “Monodromy preserving deformations of linear differential equations with rational coefficients. II”, *Phys. D*, **2**:3 (1981), 407–448.
- [43] R. Garnier, “Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l’intégrale générale est uniforme et sur une classe d’équations nouvelles d’ordre supérieur dont l’intégrale générale a ses points critiques fixes”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **29** (1912), 1–126.
- [44] P. Painlevé, “Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixés”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **143** (1907), 1111–1117.
- [45] B. Dubrovin, M. Mazzocco, “Canonical structure and symmetries of the Schlesinger equations”, *Comm. Math. Phys.*, **271**:2 (2007), 289–373; [arXiv:math/0311261](#).
- [46] N. J. Hitchin, “Poncelet polygons and the Painlevé equations”, *Geometry and analysis* (Bombay, 1992), Tata Inst. Fundam. Res., **13**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995, 151–185.
- [47] B. Dubrovin, M. Mazzocco, “Monodromy of certain Painlevé-VI transcendents and reflection groups”, *Invent. Math.*, **141**:1 (2000), 55–147.
- [48] P. P. Boalch, “From Klein to Painlevé via Fourier, Laplace and Jimbo”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **90**:1 (2005), 167–208.
- [49] Ph. Boalch, “Six results on Painlevé VI”, *Théories asymptotiques et équations de Painlevé*, Sémin. Congr., **14**, Soc. Math. France, Paris, 2006, 1–20.
- [50] Ph. Boalch, “Some explicit solutions to the Riemann–Hilbert problem”, *Differential equations and quantum groups*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **9**, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, 85–112.
- [51] H. Esnault, E. Viehweg, “Semistable bundles on curves and irreducible representations of the fundamental group”, *Algebraic geometry: Hirzebruch 70* (Warsaw, 1998), Contemp. Math., **241**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 129–138.
- [52] H. Esnault, C. Hertling, “Semistable bundles on curves and reducible representations of the fundamental group”, *Internat. J. Math.*, **12**:7 (2001), 847–855; [arXiv:math/0101194](#).
- [53] M. Yoshida, “On the number of apparent singularities of the Riemann–Hilbert problem on Riemann surface”, *J. Math. Soc. Japan*, **49**:1 (1997), 145–159.
- [54] M. Ohtsuki, “On the number of apparent singularities of a linear differential equation”, *Tokyo J. Math.*, **5**:1 (1982), 23–29.
- [55] A. A. Bolibruch, S. Malek, C. Mitschi, “On the generalized Riemann–Hilbert problem with irregular singularities”, *Expo. Math.*, **24**:3 (2006), 235–272.
- [56] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz, “A general theory of invariants for meromorphic differential equations. I. Formal invariants”, *Funkcial. Ekvac.*, **22**:2 (1979), 197–221.
- [57] R. R. Gontsov, I. V. V’yugin, “Some addition to the generalized Riemann–Hilbert problem”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* (to appear).

- [58] В. Бальзер, “Проблема приведения Биркгофа”, *УМН*, **59**:6 (2004), 41–54; англ. пер.: W. Balser, “Birkhoff’s reduction problem”, *Russian Math. Surveys*, **59**:6 (2004), 1047–1059.
- [59] H. L. Turrittin, “Reduction of ordinary differential equations to the Birkhoff canonical form”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **107**:3 (1963), 485–507.
- [60] V. Poberezhny, “On the Painlevé property of isomonodromic deformations of Fuchsian systems”, *Acta Appl. Math.*, **101**:1–3 (2008), 255–263.
- [61] A. Bolibruch, “Inverse problems for linear differential equations with meromorphic coefficients”, *Isomonodromic deformations and applications in physics* (Montréal, QC, 2000), CRM Proc. Lecture Notes, **31**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 3–25.

Р. Р. Гонцов (R. R. Gontsov)

Институт проблем передачи информации РАН

E-mail: gontsovr@mppei.ru

Поступила в редакцию

30.06.2008

В. А. Побережный (V. A. Poberezhnyi)

Институт теоретической и экспериментальной физики

E-mail: poberezh@itep.ru