Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Ероховец, Инвариант Бухштабера простых многогранников, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 5, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9231>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:27:41

Инвариант Бухштабера простых многогранников

Н. Ю. Ероховец

Пусть $P = \{x \in \mathbb{R}^n : A_p x \leq b_p\}$ – простой многогранник и $\mathfrak{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ – множество его гиперграней. Каждой грани $F_i \in \mathfrak{F}$ поставим в соответствие одномерную координатную подгруппу в $T^{\mathfrak{F}} = T^m$. Грани G многогранника P сопоставим координатную торическую подгруппу $T^G = \prod_{F_i \supset G} T^{F_i} \subset T^{\mathfrak{F}}$. Для каждой точки $q \in P$ обозначим через $G(q)$ наименьшую грань, содержащую q .

Для комбинаторного простого многогранника P^n положим: $\mathcal{X}_P = (T^{\mathfrak{F}} \times P^n)/\sim$, где $(t_1, p) \sim (t_2, q)$ тогда и только тогда, когда $p = q$, и $t_1 t_2^{-1} \in T^{G(p)}$.

Оказывается, $\mathcal{X}_P$ является гладким многообразием размерности $m + n$ с гладким действием тора T^m , индуцированным стандартным действием тора на первом сомножителе. При этом $\mathcal{X}_P/T^m = P$, а стабилизатором точки $[(t, q)]$ является $T^{G(q)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числом Бухштабера $s(P)$ называется максимальная размерность подгрупп $H \cong T^s$, действующих свободно.

Проблема, поставленная В. М. Бухштабером в 2002 г. заключается в том, чтобы научиться конструктивно вычислять $s(P)$ в комбинаторных терминах.

Заметка посвящена изучению свойств инварианта $s(P)$.

Было известно, что $1 \leq s(P) \leq m - n$ и $s(P) = 1 \Leftrightarrow P = \Delta^n$. И. В. Измestьев [1] заметил, что $s(P) \geq m - \gamma(P)$, где $\gamma(P)$ – хроматическое число многогранника P (наименьшее число цветов, в которые можно раскрасить гиперграни так, что соседние будут разных цветов).

Далее мы используем следующее описание $s(P)$ (см. [2; лемма 8.24]): в выбранном базисе T^m торической подгруппе H размерности s соответствует целочисленная матрица A размера $m \times s$. Действие H свободно тогда и только тогда, когда для любой вершины подматрица размера $(m - n) \times s$, состоящая из всех строк матрицы A , соответствующих гиперграням P , не проходящим через эту вершину, задает вложение $\mathbb{Z}^s \rightarrow \mathbb{Z}^{m-n}$ на прямое слагаемое. Если дополнить отображение, определяемое A , до точной последовательности: $0 \rightarrow \mathbb{Z}^s \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{B} \mathbb{Z}^{m-s} \rightarrow 0$, то мы получим еще один вариант определения $s(P)$ – это наибольшее натуральное число, при котором существует отображение $\mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{Z}^{m-s}$ такое, что для любой вершины образ набора гиперграней, пересекающихся в этой вершине, можно дополнить до базиса целочисленной решетки $\mathbb{Z}^{m-s}$. Заметим, что при $s = m - n$ это в точности условие * Дена–Соммервилля [2]. Для любого $(n - 1)$ -мерного симплицеального комплекса K имеются соответствующие определения $s(K)$ такие, что $s(\partial(P^*)) = s(P)$.

ТЕОРЕМА. Число $s(P)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $s(P) + s(Q) \leq s(P \times Q) \leq s(P) + s(Q) + \min(m_1 - n_1 - s(P), m_2 - n_2 - s(Q))$;
- 2) $s(P \sharp Q) \geq s(P) + s(Q)$, где $P \sharp Q$ – связная сумма многогранников вдоль вершин;
- 3) $s(P) \geq s(Q)$, если Q получается из P забыванием одного из m неравенств;
- 4) $s(F) \geq m_1 - m + s(P)$, где F – гипергрань многогранника с m_1 гипергранями;
- 5) $s(P)$ нельзя вычислить, зная только f -вектор многогранника и $\gamma(P)$;
- 6) для разветвленного комбинаторного накрытия (см. [3]) $\partial(P^*) \rightarrow K$ границы двойственного многогранника над симплицеальным комплексом с k вершинами $s(P) \geq m - k + s(K)$;

7) $s(P) \geq m - \gamma(P) + s(\Delta_{n-1}^{\gamma-1})$, где $\Delta_{n-1}^{\gamma-1}$ – это $(n - 1)$ -мерный остов $(\gamma - 1)$ -мерного симплекса;

8) если $\hat{P}$ получается из P движением гиперграни таким, что до некоторого момента времени комбинаторный тип многогранника не изменяется, а затем движущаяся гиперплоскость отсекает ровно одну новую вершину, то $|s(P) - s(\hat{P})| \leq 1$.

Последняя операция является бизвездным преобразованием симплицального комплекса $\partial(P^*)$. Эти преобразования были введены У. Пахнером для исследования свойств PL-многообразий. Таким образом, если ввести на пространстве простых многогранников метрику $d(P, Q)$ – наименьшее число бизвездных преобразований, переводящих $\partial(P^*)$ в $\partial(Q^*)$ (см. [4]), то из свойства 8) следует, что $|s(P) - s(Q)| \leq d(P, Q)$.

Чтобы получить свойства 1)–3), удобно использовать первый вариант комбинаторного определения $s(P)$, а для доказательства свойств 4) и 5) больше подходит второй.

Свойства 6), 7) можно установить, исследуя свойства комбинаторных разветвленных накрытий (т. е. невырожденных симплицальных отображений): правильная раскраска в γ цветов гиперграней многогранника P эквивалентна невырожденному симплицальному отображению $\partial(P^*) \rightarrow \Delta_{n-1}^{\gamma-1}$, а при таком отображении можно индуцировать отображения вершин в $\mathbb{Z}^{m-s}$.

Укажем пример двух многогранников с одинаковыми f -векторами и хроматическими числами, но разными $s(P)$. Нам потребуется описание простого n -многогранника с не более чем $n+3$ гипергранями [5] в терминах правильного $(2k-1)$ -угольника, $k \geq 2$, у которого в вершинах расставлены числа $a_1, \dots, a_{2k-1}$, $a_i > 0$, $\sum a_i = n+3$. Каждой гипергранни соответствует вершина многоугольника, причем три такие гипергранни задают вершину P , в которой пересекаются оставшиеся n тогда и только тогда, когда 0 лежит в треугольнике, образованном соответствующими вершинами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если $m = n+3$, то $s(P) = 3$ тогда и только тогда, когда $k \leq 4$.

Бизвездное преобразование переводит многогранник $(a_1, \dots, a_i, \dots, a_{i+k}, \dots, a_{2k-1})$ в многогранник $(a_1, \dots, a_i - 1, 1, a_{i+1}, \dots, a_{i+k-1}, 1, a_{i+k} - 1, \dots, a_{2k-1})$, при этом если a_s становится равным 0, нужно объединить в одну вершину точки противоположного a_s ребра, а числа сложить.

Из этого наблюдения и того, как изменяется h -вектор при бизвездном преобразовании (см. [2]), получаем утверждение

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если $m \leq n+3$, то

$$h(P) = (t-1)^{-3} \left(t^{n+3} - 1 + \sum_{i=1}^{2k-1} t^{a_i + \dots + a_{i+k-2}} - \sum_{i=1}^{2k-1} t^{a_i + \dots + a_{i+k-1}} \right).$$

Рассмотрим два многогранника: $P = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ и $Q = (2, 1, 2, 1, 1, 2, 1)$. Многогранник P является двойственным к циклическому, а Q получается из него бизвездным 3-преобразованием, не меняющим f -вектор и $\gamma(P)$. Но $s(P) = 2$, $s(Q) = 3$.

Свойство 8) можно получить из комбинаторного описания перехода через вершину: имеется $n+1$ гипергрань такая, что для любой из первых i гиперграней оставшиеся n задают вершину, а для любой из гиперграней с номерами $i+1, \dots, i+j = n+1$ не задают. Тогда бизвездное преобразование меняет местами эти множества, и если во втором определении $s(P)$ каждому вектору $\mathbb{Z}^{m-s}$, соответствующему всем гиперграням, кроме одной из первого множества, добавить в конце 0, а оставшемуся вектору добавить в конце 1, то мы увидим, что $s(\hat{P}) \geq s(P) - 1$.

Автор благодарен В. М. Бухштаберу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] И. В. Измestьев, *Матем. заметки*, **69:3** (2001), 375–382. [2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004. [3] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, Тр. МИАН, **247**, Наука, М., 2004, 41–58. [4] A. Nabutovsky, *Comm. Math. Phys.*, **181:2** (1996), 303–330. [5] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, Wiley, New York, 1967.

Н. Ю. Ероховец (N. Yu. Erokhovets)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: erohovetsn@hotmail.com

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
09.06.2008